

尺度の個人内分散を用いた回帰モデルの提案

星 野 崇 宏¹

教育心理学研究においては、直接測定のできない心理学的構成概念が研究対象となることがしばしばであり、同一の概念を測定していると考えられる項目を複数用意することで尺度を作成し、その平均・または1因子の因子分析モデルによる因子得点によって、各個人の心理学的構成概念の大きさを数値化する。しかし、実際の解析の際にしばしばみられることであるが、平均得点の大きさだけでなく、各個人の反応の変動性も重要な情報を提供するであろうという状況がしばしば存在するものと思われる。しかし、個人内の分散についての情報を積極的に利用する解析手法は、これまで開発されてこなかった。そこで本研究は、古典的テスト理論における弱同族測定モデルに個人ごとの変量効果を導入し個人内分散の母数を考えることで、平均だけでなく個人内分散も、他の変数・尺度の説明変数となるモデルを提案する。本方法は尺度研究だけではなく、学習効果のない反復測定の個人内分散に関する研究にも応用可能である。シミュレーションデータにより、本研究の母数推定法の妥当性を確認し、FFPQの情動性の個人平均と個人内分散を、STAIの説明変数とする回帰を行い、本研究の有用性を示した。

キーワード：個人内分散、古典的テスト理論、階層的モデル、STAI、周辺最尤法

問題と目的

尺度の合計得点法とその問題点

教育心理学研究の研究対象の多くは、直接測定のできない心理学的構成概念である。例えば学力や何らかの性格特性を測定したい場合、対象を直接単一の測定項目で測ることが不可能であったり、測定対象となる構成概念が幅広い概念を含むことが多い。そのため、同一の構成概念を測定していると考えられる多数の項目の集合からなる尺度を作成し、その合計得点を算出するということがしばしば行われる。そして、測定項目が本当にその測定内容を測定しているかどうかを調べるために、他の変数との関係の推論を行うという妥当性の検証が行われる(基準関連妥当性の検証)。また、その尺度の妥当性が検証されていれば、研究者の関心に応じて、その尺度と他の尺度が同一被験者に対してとられ、それらの尺度が測定しているとされる心理学的構成概念間の関係の研究がされる。

妥当性検証のために行われることの1つとして、測定項目が測定しているとされる内容に関係の深いということが既に確認されている、ある別の変数や尺度との相関を採るということがある。例えばある職業適性

を測定する尺度を新しく構成し、その妥当性を検証する。その場合、実際にその職業に就いている人にその尺度に答えてもらい、それと同時にその人の職業の業績や満足度に関する変数・尺度を取り、それらの相関が高ければ、新しく構成した尺度の妥当性が高く、相関が低ければ妥当性も低い、ということが言える(ここでは、尺度得点の高低とその職業に就けるかどうか、ということとはとりあえず考慮しない)。同様に、例えば妥当性の検証された職業適性尺度とビッグファイブ尺度を同一被験者に対してとり、職種Aに対する下位尺度と外向性尺度の相関が高いということをもって、職種Aの適性として外向性が考えられるという推論を行う。このような目的で関心下の尺度(群)に対して統計処理を施す場合、一般的には尺度の合計点が算出され、それと他の変数・尺度との相関係数の算出や回帰が行われる。

しかし、尺度の合計点、あるいは平均点を用いて他の変数との関係を見る場合、その尺度に属する多数の項目の有する情報がたった1つの情報によって縮約されてしまうという問題がある。特に尺度の項目数が多い場合、各個人の尺度得点の期待値だけではなく、各個人のその尺度得点の個人内分散の大きさが他の変数に対して何らかの意味を有すると考えることができる状況は多い。

例えば、職業適性尺度と実際にその職業に就いたときの業績について考えよう。正確さを要求され、日常的・定型的で反復作業の多い業務形態では、なるべく

¹ 東京大学総合文化研究科／日本学術振興会
bayesian@jasmine.ocn.ne.jp

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金の補助を受けて行われた。

その業務に関係する能力(適性)は安定して発揮されることが要求される。また、能力の平均の高低が直接業績に影響すると考えられる。これに対して、あまり量をこなすことは要求されないが、ある水準以上の創造性を要求される業務形態においては、その能力の平均の高低だけでなく、個人内分散の高さが業績に関連することは実際に十分考えられる。

具体的に数値例として、ある業務に関係する能力についての個人Aの分布が平均が100点、標準偏差が20点であり、個人Bの分布が同様に平均が70点、標準偏差が40点であるとしよう。日常的・定型的で反復作業の多い業務に関するものなら、能力が直接業績に反映するため、業績はA氏の方が高くなるだろう。これに対し、例えば企画・開発などのある水準以上の創造性を要求される業務形態であるなら、コンスタントにある程度高い能力を発揮するA氏より、頻度は少なくとも、ときどき高度に能力を発揮をすることがあるB氏の方が業績は高いであろう(150点以上必要とされる仕事は、Bは2.275%の確率で可能であるが、Aは0.621%の確率でしか出来ない)。

従って、職業適性の測定を目的とする尺度においても、これと同様に尺度得点だけでなく、その個人内分散が従属変数であるところの業績を説明する可能性も考えることができる。

また、尺度の個人内分散だけでなく、例えば繰り返して行われる測定における個人内分散の大小が他の変数・尺度の値に影響するという状況もしばしば存在すると考えられる。

個人内分散そのものの推定は、Goldstein (1995) や Snijders and Bosker (1999) などの階層的モデリングで可能である。しかし、階層的モデリングにおいても、個人内分散は分散要素の分離のためにのみモデリングされ、結局のところ平均や分散にどのレベルの要因が影響しているかが解析の目的とされ、個人内分散の値そのものの情報の積極的利用がされていない。従って尺度得点、または反復測定の個人内分散と他の変数との関係を直接モデリングした統計手法はこれまで存在しなかった。そこで本研究は、同一の構成概念を測定する多数の項目の集合や反復測定があるときに、その項目の個人ごとの平均だけでなく、個人内分散も他の変数の値に影響を及ぼす、比較的単純なモデルを提案し、その母数推定法を提示する。また、シミュレーションデータの解析によって推定方法の妥当性を例証し、実データの解析により適用例を示す。

モデル1: 1つの尺度の個人平均・個人内分散を用いた回帰モデル

モデル設定

N 人の被験者に対して、 J 項目より構成される、単一の構成概念の測定を目的として作成された尺度 X (または学習効果のない反復測定)と、それとは別の構成概念を測定しているとされる変数 y がとられているとする。ここで、分析の関心は X の真値・個人内分散が y の測定値に与える影響である。

被験者 i の j 項目めに対する得点を x_{ij} と置く。このとき、

$$x_{ij} = a_j + b_j f_{ij} + e_{ij} \quad (1)$$

但し、 f_{ij} , e_{ij} はそれぞれ被験者 i の j 項目めの基準化された尺度値、誤差である。また、 a_j は j 項目めの平均値、 b_j は j 項目の分散の大きさに関する母数であり、局外母数である。そして、 $e_{ij} \sim N(0, \sigma_{x_{Ej}}^2)$ ($j=1 \sim J$)という仮定を置く。それぞれは独立である。

ここで、さらに仮定として

$$f_{ij} \sim N(t_i, \sigma_i^2) \quad (j=1 \sim J) \quad (2)$$

と置く。このモデルは、 t_i をテストの真値と考え、かつ全ての被験者で $\sigma_i^2=0$ であると制約した場合、古典的テスト理論の弱同族測定(池田, 1973, 1994)と同値になる。しかし本研究では、尺度 x での各被験者の個人内変動をモデルに組み入れるために、あえて各個人ごとに σ_i という母数を導入する。以降、 t_i を尺度の真値、 σ_i^2 を尺度の個人内分散と呼ぶ。

ここで注意すべきことは、本研究のモデル設定においては、項目のパラメータと個人に付与されるパラメータが別々に定義されていることである。特に、個人内分散 σ_i^2 は、項目ごとの測定誤差 $\sigma_{x_{Ej}}^2$ とは別々に定義されている。

また、変数 y に対して以下の回帰式を仮定する。

$$y_i = \mu_y + \alpha t_i + \beta \sigma_i + e_{yi} \quad (3)$$

ここで説明変数として個人内分散 σ_i^2 でなく、標準偏差 σ_i を用いたのは、 t_i と同一のスケールで考えるためである。

また、 $e_{yi} \sim N(0, \sigma_y^2)$ と仮定する。

ここで式(2)のように、個人ごとに真値の分布の分散が異なるという仮定がされていることに注意する。項目ごとの平均、分散の影響を除いた上での、各被験者の各項目へのスコアを f_{ij} としたとき、その平均が t_i 、分散が σ_i^2 であるとする。一般に、回帰モデルは、説明変数を所与として構成されているため、説明変数の分布の仮定をする必要がない。従って、一番単純に尺度 x の個人内分散の変数 y への影響を考えるには、

式(1), (2)で表現されるモデルにおいて, 各個人ごとに t_i, σ_i を推定し, それを所与として式(3)の回帰係数の推定を行う, または, 式(1), (2), (3)を最尤法などにより同時に推定すればよい。しかし, t_i, σ_i は因子分析の因子得点と同様に, 各被験者ごとに存在するため, 式(1), (2), (3)に関する構造母数とこれらを同時に推定することには一般的に問題があるとされる (Neyman & Scott, 1948)。

そこで, t_i, σ_i に対する分布の仮定として, それぞれ平均 0, 分散 1 の正規分布と, 自由度 3, 尺度 1 の逆カイ分布を仮定する。前者の設定は因子分析モデルと同様のモデル設定であると考えられる。後者については, 標準偏差の分布設定としてベイズ統計学では標準的に用いられている。この設定は中村・前川 (1993) や柴山・繁樹 (1994) の一般項目反応理論での周辺最尤推定においても用いられているものである。自由度が 3 であるという設定は, 自由度 1 (各被験者に対して個人内標準偏差は 1 つ観測されるため) のカイ分布の逆数は自由度 3 の逆カイ分布に従うことによる。また, 尺度を 1 と設定することにより, この標準偏差の分布の期待値が 1 になる。以上のモデル設定から, x_i, y_i の周辺分布は, 以下の積分を行うことによって得られる。

$$p(x_i, y_i) = \int \int p(x_i | f_i) p(f_i | t_i, \sigma_i) p(y_i | t_i, \sigma_i) p(t_i) p(\sigma_i) df_i dt_i d\sigma_i \quad (4)$$

ここで

$$x_i | f_i \sim N(a + Bf_i, \Psi) \quad (5)$$

但し $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{ij})^t$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_j)^t$, $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_j)$, $\Psi = \text{diag}(\sigma_{x_{E1}}^2, \dots, \sigma_{x_{Ej}}^2)$ であるとする。また

$$f_i | t_i, \sigma_i \sim N(t_i 1, \sigma_i^2 I) \quad (6)$$

従って, t_i, σ_i 所与で,

$$\begin{pmatrix} f_i \\ y_i \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} t_i 1 \\ \mu_y + \alpha t_i + \beta \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_i^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}\right). \quad (7)$$

ここで,

$$p(f_i, y_i | \sigma_i) = \int p(f_i | t_i, \sigma_i) p(y_i | t_i, \sigma_i) p(t_i) dt_i. \quad (8)$$

の積分は解析的に解けて,

σ_i 所与で,

$$\begin{pmatrix} f_i \\ y_i \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \mu_y + \beta \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_i^2 I + 11^t & \alpha 1^t \\ \alpha 1^t & \sigma_y^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}\right). \quad (9)$$

よって, σ_i 所与で,

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} a \\ \mu_y + \beta \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B(\sigma_i^2 I + 11^t)B^t + \Psi & \alpha B 1^t \\ \alpha 1^t B^t & \sigma_y^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}\right). \quad (10)$$

結局, 式(4)の f_i, t_i に関する積分は解析的に可能で,

$$p(x_i, y_i) = \int p(x_i, y_i | \sigma_i) p(\sigma_i) d\sigma_i \quad (11)$$

の積分が残るが, これは解析的には不可能であり, 次

節での積分近似が必要である。また, 母数推定の際には, 全被験者の情報

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^N p(x_i, y_i) \quad (12)$$

を用いて行えばよいということになる。

最大尤度法による推定方法

モデル 1 では, 潜在変数の次元は一次元である。従って, 項目反応理論における周辺最尤推定法 (Bock & Lieberman, 1970; Bock & Aitkin, 1981; 中村・前川, 1993 柴山・繁樹, 1994) に必要な積分における一般的な手法である, 区分求積法 (Stroud & Sechrest, 1966) を用いて式(11)における潜在変数 σ_i の積分消去を行う。具体的には,

$$p(x_i, y_i) = \int p(x_i, y_i | \sigma_i) p(\sigma_i) d\sigma_i \approx \sum_k^q p(x_i, y_i | Q_k) A(Q_k) \quad (13)$$

と近似する。ここで Q_k は区分求積点, $A(Q_k)$ はそれに対応する重みである。

モデル 1 の対数尤度 $\log l(x, y)$ の区分求積法による近似は, 以下のようになる。

$$\log l(x, y) \approx -\frac{N(J+1)}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} + \sum_{i=1}^N \left\{ \log \left(\sum_k^q |\Sigma_k|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\text{tr} \Sigma_k^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_i - a \\ y_i - (\mu_y + \beta Q_k) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_i - a \\ y_i - (\mu_y + \beta Q_k) \end{pmatrix}^t \right) A(Q_k) \right] \right\} \right. \quad (14)$$

$$\left. \text{但し, } \Sigma_k = \begin{pmatrix} B(Q_k^2 I + 11^t)B^t + \Psi & \alpha B 1^t \\ \alpha 1^t B^t & \sigma_y^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \right)$$

である。

本研究では, Fisher の Scoring 法を用いた各母数の推定を行う。そのためには, 各母数による一回微分係数ベクトル $\frac{\partial \log l(x, y)}{\partial \theta}$ が必要である。しかし, 直接計算するのではなく, 微積分の順序交換法則より, 以下の式変形

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^N \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i) \frac{p(x_i, y_i | \sigma_i) p(\sigma_i)}{p(x_i, y_i)} d\sigma_i \\ &= \sum_{i=1}^N \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i) \times p(\sigma_i | x_i, y_i) d\sigma_i. \end{aligned} \quad (15)$$

から, $\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma^2)$ を導出することにより,

$\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i)$ の導出が可能になる。これは Magnus & Neudecker (1988) の行列微分法から容易に導出でき, 付録 1 に掲載した。

また, N 標本に対するフィッシャー情報行列 $N \times I_i(\theta)$ は, フィッシャー観測情報行列

$$\hat{E} \left(\frac{\partial^2 \log l(x, y)}{\partial \theta \partial \theta^t} \right) = \frac{1}{N} \sum_i^N \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i) \right)^t$$

$$= \left\{ \sum_i^N \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i) \right)' p(\sigma_i | x_i, y_i) d\sigma_i + \int \frac{p(\sigma_i)}{p(x_i, y_i)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i) - p(x_i, y_i | \sigma_i) \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_i, y_i) \right) d\sigma_i \right\} / N \quad (16)$$

具体的な推定方法は以下の通りである。

[1] 各母数の初期値 θ^0 を用意する。(ここで繰り返しカウントは $l=0$) l 回目の繰り返しにおける、母数の値を θ^l とすると、

[2] 以下の式から母数の値を更新し、 θ^{l+1} を生成する。

$$\theta^{l+1} = \theta^l + \hat{E} \left(\frac{\partial^2 \log l(x, y)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big| \theta = \theta^l \right)^{-1} \frac{\partial \log l(x, y)}{\partial \theta} \Big| \theta = \theta^l. \quad (17)$$

[3] 収束判定をする。収束基準が満たされていれば、 θ^{l+1} を推定値とし、満たされていないければ、[2] を繰り返す。

フィッシャー情報行列の逆行列と母数の推定値を用いて、標準誤差も導出ができる。また、 χ^2 漸近検定によって、「尺度 x での個人内分散は変数 y に影響を与えない」とする帰無仮説に対する検定が可能である。これは、 $H_0: \beta = 0$ という帰無仮説の検定を χ^2 検定によって行えばよい。但し、漸近検定であるため、ある程度以上の標本数が必要であることに注意する必要がある。 t_i, σ_i の擬似的ベイズ推定

t_i, σ_i は、各個人ごとに存在する付随母数であるが、これがある分布に従うと仮定することにより周辺最尤法による積分消去がなされる。しかし、各個人の真値、個人内分散を知りたいという状況は、教育心理学研究においてはしばしば見られると思われる。そこで、ここでは t_i, σ_i を母数と見なし、ベイズの定理からそれぞれの事後分布を考える。

t_i, σ_i の事後分布は、それぞれ

$$p(t_i | x_i, y_i) = \frac{p(t_i) \int p(x_i, y_i | t_i, \sigma_i) p(\sigma_i) d\sigma_i}{p(x_i, y_i)} \quad (18)$$

$$p(\sigma_i | x_i, y_i) = \frac{p(x_i, y_i | \sigma_i) p(\sigma_i)}{p(x_i, y_i)} \quad (19)$$

の分布に各母数の推定値を代入することによって得られる。この事後分布の平均、標準偏差が、それぞれ推定値、標準誤差に対応する。ここで、式(7)から、 $p(x_i, y_i | t_i, \sigma_i)$ の分布は容易に導出でき、多変量正規分布であることが分かる。

モデル2：ある尺度の個人平均・個人内分散による別の尺度の平均への回帰モデル

モデル設定

$$x_{ij} = a_j^x + b_j^x f_{ij}^x + e_{ij}^x \quad (20)$$

$$y_{ik} = a_k^y + b_k^y f_{ik}^y + e_{ik}^y \quad (21)$$

但し、 $x_{ij}, f_{ij}^x, e_{ij}^x, y_{ik}, f_{ik}^y, e_{ik}^y$ はそれぞれ被験者 i の尺度 x, y の j 項目めの実現値、基準化された尺度値、誤差である。また、 $e_{ij}^x \sim N(0, \sigma_{x_{Ej}}^2), e_{ik}^y \sim N(0, \sigma_{y_{Ek}}^2) (i=1 \sim N, j=1 \sim J_x, k=1 \sim J_y)$ という仮定を置く。また、 a_j^x, a_k^y は尺度 x, y の j 項目めの平均値、 b_j^x, b_k^y は尺度 x, y の項目の標準偏差にあたる。ここで、さらに仮定として

$$f_{ij}^x \sim N(t_{xi}, \sigma_{xi}^2) \quad (j=1 \sim J_x) \quad (22)$$

$$f_{ik}^y \sim N(t_{yi}, \sigma_{yi}^2) \quad (k=1 \sim J_y) \quad (23)$$

とすることで、尺度 x での個人内分散として σ_{xi}^2 、尺度 y での個人内分散として σ_{yi}^2 を設定する。また、モデル1と同様に、各被験者の尺度上の真値、個人内変動と別の尺度でのそれらの関係を表すために、さらに以下のような母数の構造化を行う。

$$t_{yi} = \alpha t_{xi} + \beta \sigma_{xi} + e_{yti} \quad (24)$$

ここでまた、 $t_{xi} \sim N(0, 1), e_{yti} \sim N(0, \sigma_{yti}^2)$ という仮定を置く。それぞれは独立である。そこでさらに、モデル1と同様に、 σ_{xi}, σ_{yi} の分布として、自由度3、尺度1の独立な逆カイ分布を仮定する。

$$p(x_i, y_i) = \int p(x_i | f_i^x) p(f_i^x | t_{xi}, \sigma_{xi}) p(y_i | f_i^y) p(f_i^y | t_{yi}, \sigma_{yi}) p(t_{xi}) p(t_{yi}) p(\sigma_{xi}) p(\sigma_{yi}) df_i^x df_i^y dt_{xi} dt_{yi} d\sigma_{xi} d\sigma_{yi}. \quad (25)$$

ここで

$$x_i | f_i^x \sim N(a^x + B_x f_i^x, \Psi_x) \quad (26)$$

また、 $t_{xi}, t_{yi}, \sigma_{xi}, \sigma_{yi}$ 所与で、

$$\begin{pmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} t_{xi} 1_{J_x} \\ (\alpha t_{xi} + \beta \sigma_{xi}) 1_{J_y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xi}^2 I_{J_x} & 0 \\ 0 & (\sigma_{yi}^2 + \sigma_{yti}^2) I_{J_y} \end{pmatrix} \right). \quad (27)$$

ここで、 t_{xi}, t_{yi} を積分消去できて、 $\sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2$ 所与で

$$\begin{pmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \sigma_{xi} 1_{J_y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xi}^2 I_{J_x} + 1_{J_x} 1_{J_x}' & \alpha 1_{J_x} 1_{J_y}' \\ \alpha 1_{J_y} 1_{J_x}' & (\sigma_{yi}^2 + \sigma_{yti}^2) I_{J_y} + \alpha^2 1_{J_y} 1_{J_y}' \end{pmatrix} \right). \quad (28)$$

従って、 $\sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2$ 所与で

$$\begin{pmatrix} x_i^x \\ x_i^y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} a^x \\ a^y + \beta \sigma_{xi} B_y 1_{J_y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_x (\sigma_{xi}^2 I_{J_x} + 1_{J_x} 1_{J_x}') B_x' + \Psi_x & B_x \alpha 1_{J_x} 1_{J_y}' B_y' \\ \alpha B_y 1_{J_y} 1_{J_x}' B_x' & B_y ((\sigma_{yi}^2 + \sigma_{yti}^2) I_{J_y} + \alpha^2 1_{J_y} 1_{J_y}') B_y' + \Psi_y \end{pmatrix} \right). \quad (29)$$

但し $f_i^x = (f_{i1}^x, \dots, f_{iJ_x}^x)^t, a^x = (a_1^x, a_2^x, \dots, a_{J_x}^x)^t, B_x = \text{diag}(b_1^x, b_2^x, \dots, b_{J_x}^x), \Psi_x = \text{diag}(\sigma_{x_{E1}}^2, \dots, \sigma_{x_{EJ_x}}^2), f_i^y = (f_{i1}^y, \dots, f_{iJ_y}^y)^t, a^y = (a_1^y, a_2^y, \dots, a_{J_y}^y)^t, B_y = \text{diag}(b_1^y, b_2^y, \dots, b_{J_y}^y), \Psi_y = \text{diag}(\sigma_{y_{E1}}^2, \dots, \sigma_{y_{EJ_y}}^2)$ であるとする。以上のことから、モデル1同様、式(25)の $f_i^x, f_i^y, t_{xi}, t_{yi}$ に関する積分は解析的に可能であり、 σ_{xi}, σ_{yi} の積分消去のみは近似的に行われる必要がある。ここでも、2次元という比較的小さい次元でのパラメータ既知の分布に関する積分なので、区分求積分により、

$$p(x_i, y_i) = \iint p(x_i | \sigma_{xi}) p(y_i | \sigma_{yi}) p(\sigma_i) p(\sigma_{yi}) d\sigma_{xi} d\sigma_{yi} \\ \approx \sum_k \sum_r p(x_i | Q_k) p(y_i | Q_k, R_r) A(Q_k) B(R_r) \quad (30)$$

と近似する。

$t_{xi}, t_{yi}, \sigma_{xi}, \sigma_{yi}$ のベイズ推定

モデル1と同様な方法で導出が可能である。例えば、

$$p(t_{xi} | x_i, y_i) = \frac{p(t_i) \int p(x_i, y_i | t_{xi}, \sigma_{xi}, \sigma_{yi}) p(\sigma_{xi}) p(\sigma_{yi}) d\sigma_{xi} d\sigma_{yi}}{p(x_i, y_i)} \quad (31)$$

最大尤度法による推定方法

基本的にはモデル1で提案された方法と同様であるが、モデル2の方が母数が多く、その分計算が複雑である。

モデル1と同様に、FisherのScoring法を用いた各母数の推定を行う。そのためには、各母数による微分係数が必要であり、これを付録2に掲載した。

シミュレーションデータの解析

ここでは、本研究において提案されたモデルの推定法の妥当性を検証するために、シミュレーションデータを発生させた。具体的には、 σ_i を自由度3の逆カイ分布から発生させ、 σ_i の値を所与として式(10)から x_i, y_i を発生させた。標本数は100、尺度Xの項目数は20であり、尺度でなく変数を説明するモデル1の場合を考える。ここで、区分求積法における区分点の範囲は[0.01, 8]の16個の点について計算した。各区分点での重みは基準化されている(Mislevy, 1984)。また、一部の真値とその推定値、標準誤差をTABLE 1に掲載した。表からも分かる通り、本研究において提案されたモデルによる母数推定法が妥当であることが示された。ここで、 $H_0: \beta=0$ という帰無仮説に対する χ^2 検定のp値は0.0098であり、「個人内分散の大小が変数yの値に影響している」と考えることができる。

実データへの適用例

さらに、本研究において提案されたモデルの有用性を示すために、実データの解析を行った。被験者は国立大学の大学生163人であり、性格特性のビッグファイブを測定している尺度FFPQ(辻, 1998)と、不安を測定する代表的な尺度であるSTAI(状態-特性不安質問紙 ;

Spielberger, Gorsuch, Lushene, Vagg & Jacobs, 1983 ; 清水 & 今柴, 1981)が同時に測定された。ここでSTAIに関しては特性と状態の2つの不安を測定できるが、ここでは特性についての下位尺度が測定され、合計得点を算出した(α 係数は0.891)。また、FFPQの情動性下位尺度は20項目よりなり、5件法である(但し、ここではあくまで例示のための数値解析の便宜上、恣意的に2項目ごとに合計して、10項目とした。5件法では個人内分散を測定するのが難しいためである)。

ここで、情動性下位尺度の合計得点を算出し(α 係数0.844)、STAIの特性不安の合計得点との相関を調べたところ、相関係数は0.656であった。従って、少なくともFFPQにおける情動性が高いとSTAIにおける不安が高くなる、といえる。しかし、データを見ると分かることであるが、情動性下位尺度の各項目に対する個人個人の反応は様々である。合計得点は高いが、いくつかの項目に対して低い得点を与えるような被験者がいる一方、得点が安定して低い被験者もいる。そこで、「FFPQでの情動性下位尺度の真値 t_i だけでなく、個人内標準偏差 σ_i の大小がSTAIの特性不安の得点の高低に関係しているか」を本研究のモデル(モデル1)を用いて解析した。主要な解析結果をTABLE 2に掲載した。表から分かるように、 β は0.284であり、 χ^2 検定による $H_0: \beta=0$ の仮説も棄却される(p値は0.014)。従って、FFPQの情動性下位尺度の個人の真値だけでなく、個人内分散の大小も、STAIによって測定される不安の高低の一定の分散を説明することが分かった。

また、STAIの特性不安下位尺度は20個の項目からなる尺度であるため、同じデータに対してモデル2を適用することも可能である(ここでも便宜上、合計して10項目とした)。モデル2の解析法を適用した結果をTABLE 3に掲載した。ここでもモデル1と同様な結果が得られた($H_0: \beta=0$ の仮説のp値は0.019)。

結 語

近年、統計手法の誤用や結果の拡大解釈、特に外的妥当性を考慮しない一般化が問題となっているが、本手法における個人内分散 σ_i^2 も、あくまで「項目群Xで

TABLE 1 シミュレーションデータの解析

母数	真値	推定値	標準誤差
α	0.5	0.481	0.139
β	0.3	0.319	0.118
μy	2	1.882	0.299
σy^2	0.5	0.451	0.133

TABLE 2 FFPQの情動性とSTAIの特性不安の関係(モデル1)

母数	推定値	標準誤差
α	0.649	0.0538
β	0.284	0.0183
μy	42.917	2.9071
σy^2	67.355	5.2124

TABLE 3 FFPQの情動性と STAI の特性不安の関係 (モデル2)

母数	推定値	標準誤差
α	0.591	0.192
β	0.252	0.114
$\sigma\epsilon^2$	0.418	0.193

の個人 i の個人内分散」であり、項目群 X が測定対象とする構成概念の個人 i の変動そのものを示すものではないことに注意する必要がある。

また、 β の絶対値が大であるほど、 y の分布が正規分布から逸脱する。しかし、項目反応理論においても、正答回数の分布は、個人の能力を所与とした場合は二項分布に従うが、正答率の背後に潜在変数としての能力分布を仮定するために、結果としての正答回数の分布は二項分布から逸脱することを考えれば、本研究でのモデルの仮定も特異なものではないと言えよう。同様に、個人内分散を情報として積極的に利用するという本モデルでは、真値と個人内分散が所与であるときの分布は正規分布となる。

本研究のモデルが単純に尺度における個人ごとの分散を用いて回帰を行う場合とは異なるのは、階層的モデリングの考え方により個人内分散と測定誤差に関するパラメータを分けて定義していることが挙げられる。このことから、各項目の測定誤差の部分が除かれた、純粋な「個人内分散」と従属変数との関係を回帰モデルによって考えることができる。このことは、尺度・テスト得点の分散を、測定の様々な意味での非信頼性・誤差として（例えば、池田(1973, p.66)などに詳しい）みなすだけでなく、個人の「変化しやすさ」という情報としても考えるという分散情報の積極的利用という効用を生み出すと考えることができる。

また、本研究においては、1つの尺度と1つの変量、または2つの尺度の個人内分散と平均間の関係を表すモデルを考えた。そして、区分求積法による積分の近似の精度が高い、1次元または2次元の潜在変数によって表現されるモデルの推定法のみが提案された。しかし、FACREG モデル(Ogasawara, 1990 ; 小笠原, 1990)の潜在変数を用いた拡張モデルと、Monte Carlo EM アルゴリズム (Wei & Tanner, 1990) の適用により高次元の潜在変数の導入とそれらの相関係数の導入ができる。これにより、多数の尺度間の個人平均、個人内分散の相関関係を表すモデルの推定法が可能である。但し、多変量のモデルにおいて個人内分散を導入することによって、個人内分散要素が数値的に不安定になる可能性があり、そのことを含め別途報告予定である。

引用文献

- Bock, R.D., & Aitikin, M. 1981 Marginal maximum likelihood estimation of item parameters : Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, **46**, 443—459.
- Bock, R.D., & Lieberman, M. 1970 Fitting a response model for n dichotomously scored items. *Psychometrika*, **35**, 179—197.
- Goldstein, H. 1995 Multilevel statistical models. London : Edward Arnold.
- 池田 央 1973 心理学研究法 第8巻 テストII 東京大学出版会
- 池田 央 1994 現代テスト理論 朝倉書店
- 清水秀美・今柴国春 1981 STATE-TRAIT ANXIETY INVENTORY の日本語版(大学生用)の作成 教育心理学研究, **29**, 62—67.
- Magnus, J.R., & Meudecker, H. 1988 Matrix difference calculus with applications in statistics and econometrics. Chichester : Wiley.
- Mislevy, R.J. 1984 Estimating latent distributions. *Psychometrika*, **49**, 359—381.
- 中村知靖・前川眞一 1993 一般項目反応モデルにおける項目パラメータの周辺最尤推定法 教育心理学研究, **41**, 22—30.
- Neyman, J., & Scott, E.L. 1948 Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrica*, **16**, 1—32.
- Ogasawara, H. 1990 Covariance structure model when the factor means and the covariances are the functions of the third variables. *Japanese Psychological Research*, **32**, 19—25.
- 小笠原春彦 1990 共分散潜在構造モデル 行動計量学, **18**, 13—27.
- 柴山 直・繁桝算男 1994 一般項目反応モデルにおけるパラメータの推定方法 行動計量学, **21**, 57—65.
- Snijders, T.A.B., & Bosker, R.J. 1999 Multilevel Analysis : An introduction to basic and advanced multilevel modelling. London: Sage.
- Spielberger, C.D., Gorsuch, R., Lushene, R., Vagg, P., & Jacobs, G. 1983 Manual for the State-Trait Anxiety Inventory. Palo Alto, Calif.: Consulting Psychologists Press.
- Stroud, A.H., & Sechrest, D. 1966 Gaussian qua-

drature formulas Englewood Cliffs, N.J. :
Prentice-Hall.

辻平治郎編 1998 5 因子性格検査の理論と実際—こ
ころをはかる5つのものさし— 北大路書房

Wei, G.C.G., & Tanner, M.A. 1990 A Monte
Carlo implementation of the EM Algorithm and
the Poor Man's Data Augmentation Algorithm.
Journal of the American Statistical Association,
85, 699—704.

謝 辞

本研究を進めるにあたり繁樹算男先生(東京大学)に
ご指導頂きました。南風原朝和先生(東京大学)、石井秀
宗先生(大学入試センター)には論文作成にあたり、ご助
言をいただきました。また、丹野義彦先生(東京大学)
には実データを提供していただきました。小笠原春彦
先生(小樽商科大学)、足立浩平先生(甲子園大学)には、
参考文献のご教示を頂きました。この場をお借りして、
お礼を申し上げます。

(2001.1.18 受稿, 5.26 受理)

付録1 モデル1における各母数の微分係数

$$\left\{ \frac{\partial \text{vec} \Sigma_{xxk}}{\partial b^t} \right\}_{lm} = 2(b(Q_k^2 I + 11^t) \otimes I) \quad (32)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Sigma_{xyk}}{\partial b^t} \right\}_{lm} = aI, \left\{ \frac{\partial \Sigma_{yyk}}{\partial b^t} \right\}_{lm} = 0. \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{\partial \text{vec} \Sigma_x}{\partial \text{vec}(\text{diag}(\Psi))^t} \right\}_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{if } l = (n+1)(J+2)+1 \text{ and } m = n(n=1, \dots, J) \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \Sigma_k}{\partial a} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^t & 2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Sigma_k}{\partial \sigma_y^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial a^t} = \begin{pmatrix} -I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \mu_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q_k \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{diag}(B)} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = -\text{diag}(\Omega_{xxik} B(Q_k^2 I + 11^t) + a \Omega_{yxi k} 1^t) \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = -(1^t B^t \Omega_{xyik} + 2 \Omega_{yyik}) \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = (x_i - a)^t (\Sigma_k^{-1})_{xy} Q_k - (\Sigma_k^{-1})_{yy} ((\mu_y + \beta Q_k) - y_i) Q_k \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_y} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = (x_i - a)^t (\Sigma_k^{-1})_{xy} - (\Sigma_k^{-1})_{yy} ((\mu_y + \beta Q_k) - y_i) \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = -(\Sigma_k^{-1})_{xx} (a - x_i) + ((\mu_y + \beta Q_k) - y_i) (\Sigma_k^{-1})_{xy} \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_y^2} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = -\frac{1}{2} \Omega_{yyik} \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{diag}(\Psi)} \log p(x_i, y_i | \sigma_i = Q_k) = -\frac{1}{2} \text{diag}(\Omega_{xxik}) \quad (46)$$

但し,

$$\Omega_{ik} = \Sigma_k^{-1} (\Sigma_k - S_{ik}) \Sigma_k^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_{xxik} & \Omega_{xyik} \\ \Omega_{yxik} & \Omega_{yyik} \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} x_i - a \\ y_i - (\mu_y + \beta Q_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - a \\ y_i - (\mu_y + \beta Q_k) \end{pmatrix}^t \quad (48)$$

$$\mu_k = \begin{pmatrix} -a \\ -(\mu_y + \beta Q_k) \end{pmatrix} \quad (49)$$

付録2 モデル2における各母数の微分係数

$$\frac{\partial}{\partial \text{diag}(B_x)} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -\text{diag}(\Omega_{xxikr} B_x (Q_k^2 I_{J_x} + 1_{J_x} 1_{J_y}^t) + \alpha \Omega_{yxikr} B_y 1_{J_y} 1_{J_x}^t) \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -\text{tr}(B_y 1_{J_y} 1_{J_x}^t B_x^t \Omega_{xyikr} + 2 1_{J_y} 1_{J_y}^t B_y^t B_y \Omega_{yyikr}) \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = (x_i^x - a^x)^t (\Sigma_{kr}^{-1})_{xy} Q_k B_y 1_{J_y} - (\Sigma_{kr}^{-1})_{yy} ((a^y + \beta Q_k B_y 1_{J_y}) - x_i^y) Q_k \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial a^x} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -(\Sigma_{kr}^{-1})_{xx} (a^x - x_i^x) + ((a^y + \beta Q_k B_y 1_{J_y}) - x_i^y) (\Sigma_{kr}^{-1})_{xy} \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial a^y} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = (x_i^x - a^x)^t (\Sigma_{kr}^{-1})_{xy} - (\Sigma_{kr}^{-1})_{yy} ((a^y + \beta Q_k B_y 1_{J_y}) - y_i) \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{yt}^2} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Omega_{yyikr} I_{J_y} B_y^t B_y) \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{diag}(\Psi_x)} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -\frac{1}{2} \text{diag}(\Omega_{xxikr}) \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{diag}(\Psi_y)} \log p(x_i, y_i | \sigma_{xi} = Q_k, \sigma_{yi} = R_r) = -\frac{1}{2} \text{diag}(\Omega_{yyikr}) \quad (57)$$

但し,

$$\Omega_{ikr} = \Sigma_{kr}^{-1} (\Sigma_{kr} - S_{ikr}) \Sigma_{kr}^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_{xxikr} & \Omega_{xyikr} \\ \Omega_{yxikr} & \Omega_{yyikr} \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$S_{ikr} = \begin{pmatrix} x_i^x - a^x \\ x_i^y - (a^y + \beta Q_k B_y 1_{J_y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^x - a^x \\ x_i^y - (a^y + \beta Q_k B_y 1_{J_y}) \end{pmatrix}^t \quad (59)$$

$$\Sigma_{kr} = \begin{pmatrix} B_x (\sigma_{xi}^2 I_{J_x} + 1_{J_x} 1_{J_x}^t) B_x^t + \Psi_x & B_x \alpha 1_{J_x} 1_{J_y}^t B_y^t \\ \alpha B_y 1_{J_y} 1_{J_x}^t B_x^t & B_y ((\sigma_{yt}^2 + \sigma_{yi}^2) I_{J_y} + \alpha^2 1_{J_y} 1_{J_y}^t) B_y^t + \Psi_y \end{pmatrix} \quad (60)$$

A Regression Model for Questionnaires : When a Regressor is the Within-Subject Variance

TAKAHIRO HOSHINO (GRADUATE SCHOOL OF ARTS AND SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, AND RESEARCH FELLOW OF THE JAPAN
SOCIETY FOR THE PROMOTION OF SCIENCE) JAPANESE JOURNAL OF EDUCATIONAL PSYCHOLOGY, 2001, 49, 401-408

Educational psychology research often deals with psychological constructs that cannot be directly measured. Researchers usually evaluate the value of the construct for each person by a factor score or in terms of mean scores on a questionnaire that is thought to measure the construct. Although it is often the case that not only each person's mean score but also the intra-person variability will have important information, no method has been developed for utilizing within-subject variance. In the present research, by introducing random effects for each person into a weakly congeneric measurement model in classical test theory, we developed a model in which not only the mean but also the within-subject variance are regressors for other variables or scales. The proposed method is also applicable to repeated measurement. A simulation study demonstrated the validity of the estimation method of the proposed model. We also showed that within-subject variance on emotionality (in the Five-Factor Model) can be one of the regressors of STAI.

Key Words : within-person variance, classical test theory, hierarchical modeling, STAI, marginal maximum likelihood estimation