

[143] 鉄筋コンクリート部材の引張剛性に関する解析的研究

正会員 ○吉川弘道（間組技術研究所）

正会員 田辺忠顯（名古屋大学工学部）

1. R C 単軸部材の引張剛性

本文は、単軸引張部材の引張硬化(tension stiffening)に着目し、R C 部材の引張剛性を鉄筋とコンクリートの付着機構に基づいて解析的に導出し、R C 部材全体の等価な応力～ひずみ関係を定式化するものである。

部材軸 x にわたって、一様な引張応力 σ を受ける鉄筋コンクリートの単軸部材を考える。任意断面の鉄筋とコンクリートの弾性ひずみを ε_s , ε_c とするとき、ひびわれまたは鉄筋とコンクリートの相対的すべりにより、これら両者は必ずしも等しくない。すなわち、全ひずみを ε とすれば、鉄筋のひずみ ε_s はこれと等しく、コンクリートひずみ ε_c はこれより小さい値となる。この差をクラックひずみ ε_{cr} と定義すると、これら 3 者のひずみの関係は次式となる。

$$\varepsilon = \varepsilon_s, \quad \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_{cr} \quad (1)$$

また、鉄筋とコンクリートの応力を σ_s , σ_c 、弾性係数を E_s , E_c として、各々の材料構成則を次式で表す。

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s = E_s \varepsilon \quad (2) \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c, \quad \varepsilon_c = E_c(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \quad (3)$$

作用応力 σ と内力 σ_s , σ_c との釣合い条件は、

$$\sigma = \sigma_c + p\sigma_s \quad (4)$$

と書けることは明らかである。ここで、p は鉄筋比を表し、 $p = A_s / A_c$ で求められる (A_s , A_c は鉄筋とコンクリートの断面積を表す)。式(2)～(4)から、本研究の主目的である鉄筋+コンクリートの合成体としての応力～ひずみ関係を求めることができ、下式のように表す。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_c + pE_s} + \frac{\varepsilon_{cr}}{1 + np} = \frac{\sigma + E_c \varepsilon_{cr}}{E_c + pE_s} \quad (5)$$

また、R C 合成体としての見掛け上の弾性係数 E_{rc} (割線係数) を、 $E_{rc} = \sigma / \varepsilon$ のように定義し、次式のようなクラックひずみの値を与えると、R C 単軸部材としての両端の剛性を求めることができる。

$$\text{状態I: } \varepsilon_{cr} = 0, (\varepsilon = \varepsilon_c) \rightarrow E_{rc} = E_c + pE_s \quad (6)$$

$$\text{状態II: } \varepsilon_{cr} = \sigma / pE_s, (\varepsilon = \varepsilon_{cr}) \rightarrow E_{rc} = pE_s$$

これらは、ひびわれのない純弾性状態と引張コンクリートの寄与が全くなくなったときを表わし、各々、状態 I、状態 II とよぶ。 ε , ε_{cr} , E_{rc} と作用応力 σ との関係を図-1に模式的に示す。さらに、クラックひずみを具体的に提示し、これら両剛性間の遷移過程を解析的に考察する。

2. 線形付着モデルに基づく定式化

○付着基本式----規則的に分布するひびわれをもつ R C 単軸部材の、ひびわれ間隔 $2l_c$ における諸物理量の変化を図-2に示す。ひびわれを有する R C 部材は、鉄筋とコンクリート両者の相対的変位（これをすべり量 g とする）によってせん断応力（これを付着応力 u とする）が生じる。そして、鉄筋～コンクリート間の付着機構に関する基本微分方程式(7)と勾配 $k u_s / g_s$ をもつ線形付着応力～すべり関係式 (8)を次式のように仮定することにより、

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{\psi(1+np)}{A_s E_s} u \quad (?) \quad \frac{u}{u_s} = k \frac{g}{g_s} \quad (8)$$

次の微分方程式を得る。ここで、 ψ は鉄筋径を示し、 k , u_s , g_s は図-3(a)に示すとおりである。

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{k u_s \psi (1+np)}{g_s A_s E_s} \frac{u}{u_s} = \frac{u}{b_c^2}, \quad b_c^{-2} = \frac{k u_s \psi (1+np)}{g_s A_s E_s} \quad (9)$$

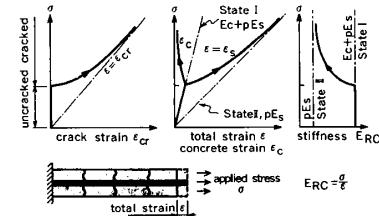
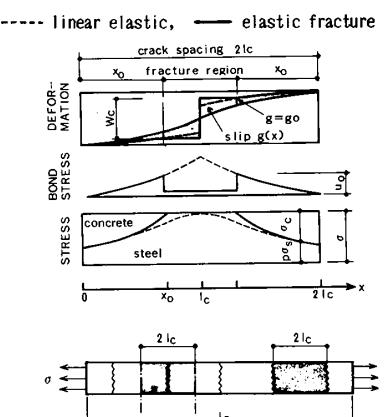


図-1 クラックひずみを用いた R C 単軸部材の変形と剛性の変化

図-2 単軸引張力を受ける R C 部材における変位・付着応力・材料応力の分布
(線形弾性と弾性破壊モデルの比較)

上式に境界条件 ($x = 0 \rightarrow g = 0$, $x = l_c \rightarrow dg/dx = \sigma / pE_s$) を課すことにより、最終的に下式を求解することができる。

$$g = b_c \frac{\sinh(x/b_c)}{\cosh(l_c/b_c)} + \frac{\sigma}{pE_s} \quad (10)$$

$$\sigma_s(x, \sigma) = \frac{\sigma}{(1+np)} \left\{ np + \frac{\cosh(x/b_c)}{\cosh(l_c/b_c)} \right\} \quad (11-1)$$

$$\sigma_c(x, \sigma) = \frac{\sigma}{1+np} \left\{ 1 - \frac{\cosh(x/b_c)}{\cosh(l_c/b_c)} \right\} \quad (11-2)$$

式(9)で定義した b_c は付着特性値と呼び、付着剛性を表わす重要な係数となる。これは、cmの次元をもち、付着剛性大なる程、 b_c は小さくなる。

○ひびわれ間隔----まず、全くひびわれのない状態で最初のひびわれが発生する条件は、 $\sigma = (1+np) f_t$ のように表わすことができる (f_t はコンクリートの引張強度を示す)。その後、作用引張力の増加により、ひびわれとひびわれの間 ($x=0, x=2l_c$) に2次ひびわれが発生し、ひびわれ本数は倍増、ひびわれ間隔は半減する。このときの応力条件は、式(11-2)を、 $\sigma_c(x=0, \sigma) = f_t$ とおいて、次のように表わすことができる。

$$\sigma = \frac{(1+np) f_t}{1 - \frac{1}{\cosh(l_c/b_c)}} \quad (12)$$

すなわち、上式を満足するとき、ひびわれ間隔は現在の $2l_c$ から l_c へと半減するもので、これをひびわれ間隔に関する上界値(upper bound)および下界値(lower bound)と定義する。また、式(12)を $2l_c$ について解くと、式(13)、さらにこれを b_c で正規化した μ を式(14)のように表わす。

$$2l_c = 2b_c \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np) f_t} \right\} \quad (13) \quad \mu = \frac{l_c}{b_c} = \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np) f_t} \right\} \quad (14)$$

式(12)、(13)、(14)を適用したひびわれ間隔の計算例を図-4に示した。

○クラックひずみと引張剛性----非弾性ひずみとしてのクラックひずみは、各点 x での鉄筋～コンクリート間の相対的変位(すべり量 g)によって、生じるものと考え、これを x の1回微分によって得られるひずみとして式(15)のように定義した。さらに、これをひびわれ間($x=0 \sim l_c$)で一様な平均量に変換し、式(16)を得た。

$$\varepsilon_{cr}(x) = dg(x)/dx \quad (15)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \varepsilon_{cr}(x) dx = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \frac{dg}{dx} dx = -\frac{\tanh(l_c/b_c)}{l_c/b_c} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \quad (16)$$

上述のクラックひずみは、ひびわれ幅が $w_c = 2g(x=l_c)$ から求められることを利用して、 $\varepsilon_{cr} = w_c / 2l_c$ のようにも書換えることができる。これは、クラックひずみが、ひびわれ幅をひびわれ間隔で除して得られることを意味し、従来の研究例と合致する。さらに、式(16)の算出結果を式(5)に代入することにより、RC単軸部材としての応力～ひずみ関係、等価引張剛性 $E_{rc} \equiv \sigma / \varepsilon$ (割線係数)を次式のように求めることができ、これを図-5、状態Iと状態IIにおける諸係数を表-2に示した。

$$\varepsilon = \left\{ 1 + \frac{1}{np} \cdot \frac{\tanh(l_c/b_c)}{l_c/b_c} \right\} \frac{\sigma}{E_c + pE_s} = \frac{np + \tanh(l_c/b_c)}{np + 1} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \quad (17)$$

$$E_{rc} = \frac{np(E_c + pE_s)}{np + \tanh(l_c/b_c)} = \frac{(np+1)pE_s}{np + \tanh(l_c/b_c)} \quad (18) \quad E_{rc} = \frac{(np+1)pE_s}{np + \frac{(S^2-1)^{0.5}}{S \cdot \cosh^{-1}(S)}} \quad S = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - (1+np)f_t} \quad (19)$$

すなわち、外力 σ が $(1+np) f_t$ に達すると初ひびわれが生じ、引張応力 σ の増加に従って、正規化ひびわれ間隔は $\mu = \infty \rightarrow 0$ 、引張硬化係数は $\lambda = 0 \rightarrow 1$ 、 E_{rc} は $E_c + pE_s \rightarrow pE_s$ に漸近し、図-5はその間の計算例を示したもの

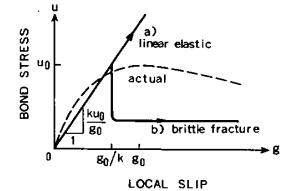


図-3 単純化した局所付着応力～すべり関係
(a)線形弾性モデル、(b)弾性破壊モデル

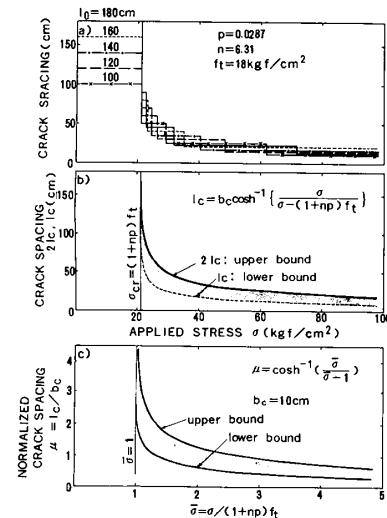


図-4 作用引張応力とひびわれ間隔の関係
(a)断続的に半減するひびわれ間隔 式(12)
(b)連続的に減少するひびわれ間隔 式(13)
(c)正規化したひびわれ間隔 式(14)

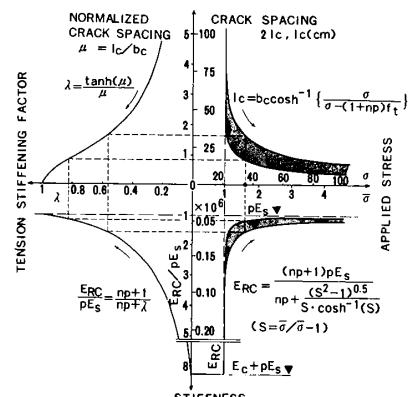


図-5 作用引張応力 σ と諸係数～ひびわれ間隔、引張硬化係数、引張剛性との関係 ($np=7 \times 0.02, f_t=21.4 \text{ kgf/cm}^2, b_c=10 \text{ cm}$ の場合)

のである。 λ は引張硬化係数を表し、次式によって定義した。

$$\lambda = \frac{\tanh(\frac{l_c}{b_c})}{\frac{l_c}{b_c}} = \frac{\tanh(\mu)}{\mu} \quad (20)$$

式(17)、(18)は、式(14)を代入することにより、 $\mu = l_c/b_c$ の関係式として与えられ、 b_c と l_c に依存しないことがわかる。

これは、付着剛性が高い場合 (b_c が小さい時) ひびわれ間隔とひびわれ幅は小さくなり、一方付着性状が悪い場合 (b_c が大きい時) はこの逆となるが、両者の比として表されるクラックひずみは変わらないためである。

3. 弹性破壊付着モデルに基づく定式化

次に、付着応力 u が最大値 ($u = u_s$) に達した後、直ちにその耐力を失う弾性破壊付着モデルを用いて定式化を行い、クラックひずみと引張剛性を算出する。この場合、付着破壊領域では、鉄筋～コンクリート間の応力交換がないことを加味すれば、前章と同じ展開で導出することができる（図-2 の実線に対応する）。

○クラックひずみとひびわれ間隔……まず、付着破壊を開始する位置 x_s を求める必要がある（図-2 参照）。これは、式(10)において、 $g(x_s) = g_s / k$ と置いて、これを x_s について整理することにより得られる。すなわち、

$$\frac{x_s}{b_c} = \sinh^{-1} \left\{ \frac{g_s}{k b_c} + \frac{p E_s}{\sigma} \cosh \left(\frac{l_c}{b_c} \right) \right\} \quad (21)$$

ここで、すべり量 g は、弾性領域 ($0 \leq x \leq x_s$) では前章の式(10)をそのまま適用し、付着破壊の生じている領域 ($x_s < x \leq l_c$) では鉄筋のひずみ $\sigma / p E_s$ に相当すると考えると、下式のように表すことができる。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{b_c \sinh(x/b_c)}{b_c \cosh(l_c/b_c)} + \frac{\sigma}{p E_s} = g_1, & (0 \leq x \leq x_s) \\ \{(x - x_s) + b_c \frac{\sinh(x_s/b_c)}{\cosh(l_c/b_c)}\} \frac{\sigma}{p E_s} = g_2, & (x_s < x \leq l_c) \end{cases} \quad (22)$$

クラックひずみ ε_{cr} は前出の定義式(15)、(16)を再度用いて次式のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr} &= \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \frac{dg(x)}{dx} dx = \frac{1}{l_c} \left(\int_0^{x_s} dg_1 + \int_{x_s}^{l_c} dg_2 \right) \\ &= \frac{1}{l_c} \left\{ \frac{b_c \sinh(x_s/b_c)}{b_c \cosh(l_c/b_c)} + (l_c - x_s) \right\} \frac{\sigma}{p E_s} \end{aligned} \quad (23)$$

また、ひびわれ間隔についても、式(21)を用い、前章と同じ展開を繰返せばよく、次式のような結果に至る（正規化量 μ によって記述した）。

$$\mu = \frac{l_c}{b_c} = \cosh^{-1} \left[\frac{\sigma}{(1+np)f_t} \{ \cosh(\frac{x_s}{b_c}) - 1 \} \right] \quad (24)$$

上式を実行するためには収束計算を行う必要があり、数値解析上は前章の線形弾性解に比べて繁雑なものとなり、陽表現の解析解を得ることが不可能である。

○線形付着モデルとの比較……図-6 は、a)全ひずみ ε と作用応力 σ との関係、およびb)全ひずみ ε と弾性領域 x_s / l_c との関係を、線形弾性モデルと弾性破壊モデルの両者について示したものである。同図から、付着特性値 b_c を増加させると、破壊領域の占める割合が多くなり、 $E_{rc} = p E_s$ なる状態IIに近づいていくことがわかる。図-7 は、引張硬化係数 λ と付着特性値 b_c との関係を両モデルについて比較したもので、上記と同様のことが判断され、付着特性値の影響を知ることができる。両図から、 $b_c = 100\text{cm}$ の場合、ひびわれ発生後鉄筋とコンクリートの付着が急激に損なわれ、ほぼ状態IIの剛性 ($E_{rc} = p E_s, \lambda = 1$) となっているのに対し、 $b_c = 10\text{cm}$ ではひびわれ発生後も付着破壊領域が小さく、全応力レベルにわたって線形弾性解とほぼ合致していることがわかる。異形鉄筋を用いた通常の配筋状態では $b_c = 10\sim20\text{cm}$ の値となり、この範囲では線形付着モデルによって十分な解析精度をもつことが判断される。（また、 b_c は $\bar{\sigma} \approx 3$ におけるひびわれ間隔も意味する。）

表-1 状態Iと状態IIにおける作用引張応力と諸係数との関係

State	Applied Stress σ	NORMALIZED CRACK SPACING $\mu = l_c/b_c$	Tension Stiffening Factor λ	Crack Strain ε_{cr}	Total Strain ε	Equivalent Stiffness E_{rc}
State I	$(1+np)f_t$	∞	0	0	$\frac{\sigma}{p E_s}$	$E_c + p E_s$
State II	∞	0	1	$\frac{\sigma}{p E_s}$	E_c	$p E_s$

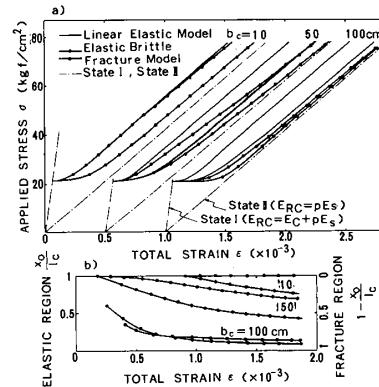


図-6 引張応力を受けるRC部材の、(a)載荷応力～全ひずみ関係
(線形弾性と弾性破壊モデルとの比較)、(b)弾性領域の変化

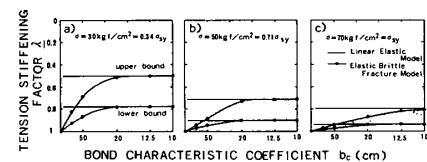


図-6 引張応力を受けるRC部材の、(a)載荷応力～全ひずみ関係
(線形弾性と弾性破壊モデルとの比較)、(b)弾性領域の変化

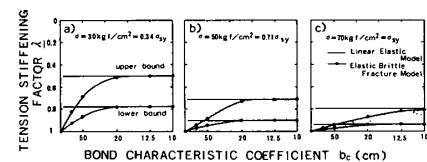


図-7 各応力レベルにおける付着特性値 b_c と引張硬化係数 λ との関係

4. 非線形引張剛性モデルの提案と実測値との比較

○非線形パラメーター β の導入…これまでの定式化とシミュレーション結果によれば、異形鉄筋に対して($b_c \leq 20\text{cm}$)線形弾性モデルと弾性破壊モデルとの差異がほとんどなく、数値計算上は後者の方が非常に複雑になることがわかった。一方、直接引張試験による実験結果を本理論にあてはめた場合、実験値は線形弾性解の範囲にあり、しかもひびわれ直後では理論解の上界値、荷重の増大に従って下界値に漸近していくことが認められている[2]。

以上のような考察のもとに、異形鉄筋を用い通常の配筋状態にあるRC単軸部材($b_c \leq 20\text{cm}$)を対象とする次のような解析手法を提案する。すなわち、2章で導出した線形弾性式を基本とし、付着破壊の進行に伴う非線形性を正規化ひびわれ間隔 μ の調整と非線形パラメーター β の導入によって勘案し、次式のように拡張する。

$$\mu = \beta \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np) f_{t}} \right\} \quad (25),$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma - f_{cr}}{f_{sy} - f_{cr}} \quad (26)$$

式(25)において、 $\beta = 1$ のとき線形弾性解の上界値を、 $\beta = 0.5$ のとき下界値を与えるが、著者らは新たに式(26)を提案した。(ここで、 f_{cr} は初期ひびわれ発生荷重、 f_{sy} は鉄筋降伏荷重を示し、 $f_{cr} = (1+np) f_t$, $f_{sy} = p f_s$ で与えられるものとする。)式(26)は、初期ひびわれ発生時において $\beta = 1$ 、鉄筋降伏時で $\beta = 0.5$ となり、この間を線形補間したものである。これによって、ひびわれの進展・付着劣化の進行に伴う非線形性が間接的に評価され、異形鉄筋を用いた場合有效な手法になり、収束計算を行うことなく、非線形解析が可能となる。

○実測値との比較…以上のようない提案モデルを用いて、国内外8例の実測値([3],[4],[5],[6],[7])と比較し、これを図-8に示した。これらは、鉄筋応力と全ひずみとの関係、作用応力と全ひずみとの関係、等価剛性 E_{RC} の変化、コンクリート引張応力の軟化曲線を示したもので、いずれの場合も、計算値と実測値はよく一致した。

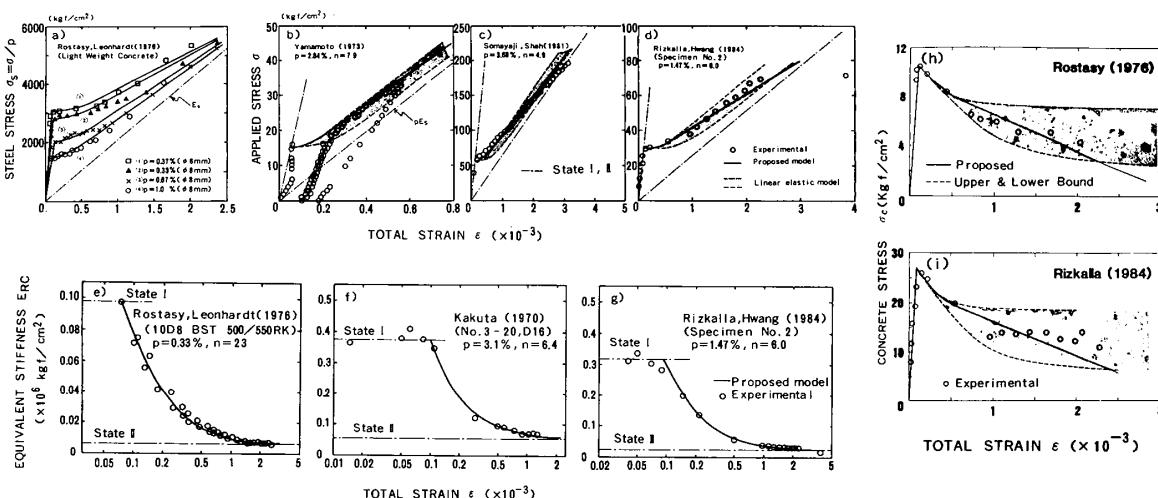


図-8 解析結果と実測値との比較、a)全ひずみと鉄筋応力との関係、b)~d)全ひずみと作用引張応力との関係、e)~g)全ひずみと等価剛性との関係、h)~i)全ひずみとコンクリート応力との関係(コンクリートのひずみ軟化曲線)

5. 結論

本研究は、付着の微分方程式から出発し、クラックひずみを介在することにより、ひびわれが順次進展するRC単軸部材の非線形挙動を合理的に取り扱い得ることを示したものである。また、本提案モデルは、引張コンクリートのひずみ軟化を表わし得ること、既往の森田・六車、CEBコード、Falkner, Isenbergの諸式と共に通点をもつことなど有用な知見を含むもので、詳しくは[2]を参照されたい。さらに、併報[1]にて、2次元平面応力場に拡張し、ひびわれの生じているRC平板を構成方程式として記述する。

○参考文献…[1] 田辺、吉川：RC平板の引張剛性と平面応力場における構成方程式、第8回JCI年次講演会、昭61.6, [2] 田辺、吉川：ひびわれを有する鉄筋コンクリート板の平面応力場における構成方程式、JCI論文、昭61.6, [3] 角田：鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅、JCI, Vol.8, No.9, 1970, [4] Leonhardt: IABSE Surveys S-4/7, 7, 1977, [5] 山本：大成建設研究所報第6号、1973年、[6] Somayaji: ACI, Vol.78, 1981, [7] Rizkalla: ACI, Vol.81, 1984,