

論文 格子等価連続体化法による圧縮場理論の表現

伊藤 睦^{*1}・Ahmad Syed Ishtiaq^{*2}・田辺 忠顕^{*3}

要旨：Collins らにより提案された修正圧縮場理論¹⁾は、せん断力を受ける鉄筋コンクリート要素に対する解析手法として広く知られている。修正圧縮場理論の基本的な想定は、ひび割れ発生コンクリート要素の主応力方向は主ひずみ方向と一致することにある。本研究では、格子等価連続体化法の特徴を示し、その一手法として修正圧縮場理論を表現し、繰り返し応力場への拡張を行った。数値解析例を示し、実験値との比較を行った結果、本解析手法が比較的良好な予測を示すことが認められた。

キーワード：格子等価連続体化法、修正圧縮場理論、Mohr のひずみ円、応力円

1. 序論

鉄筋コンクリート材料の2次元構成モデルは、近年数多く提案され、既往の研究は、以下のように3種に大別できる。1) ひび割れ面沿いのせん断伝達応力を、せん断伝達構成則より算定するモデル、2) ひび割れ方向を固定するモデル、3) ひび割れ方向が回転するモデル。2) に関しては、ひび割れ発生時の主応力方向をひび割れ方向と固定する手法が主流であり、本研究で示す格子等価連続体化法の適用もまた、既に試みられている²⁾。3) では、Collins らが、ひび割れを有する鉄筋コンクリート要素を、一様な性質の連続体と捉え、要素内での力の釣合条件、及び変形の適合条件を用いてせん断問題を解く、修正圧縮場理論¹⁾が有名である。また、前川らの研究成果では、1)～3) が上手く組み合わせられている³⁾。

本研究では、上記のモデル全てに適用可能な有限要素法構成式として、格子等価連続体化法を示す。この構成式は、RC 部材内の力の流れを、各種一次元格子成分を用いることにより明快に表現し、不平衡力を一般的な有限要素法同様、等価節点力として取り扱うことができるた

め、力の流れが明快であり、不安定成分が少なく、engineering oriented な構成式と考えられる。さらに本研究では、格子等価連続体化法を繰り返し応力場に拡張する一手法として、修正圧縮場理論の概念を適用した解析手法を示し、解析結果を実験結果と比較することで、本解析手法の精度の検討を行う。

2. 解析モデル

2.1 格子等価連続体化法

格子等価連続体化法のコンセプトは、RC 要素が有する異方性と RC 部材内の力の流れを、コンクリート、及び補強材の格子成分を想定することにより表現しようとするものである。RC 要素構成式構築の理論的概念は、コンクリート、補強筋ともそれぞれ smeared crack model, smeared reinforcement model と等価である。格子等価連続体化法の特徴は、格子成分応力と全体応力場の関連に、kinematics 型の micro-plane を用いることにより、RC 要素の耐荷機構を形成するコンクリート、及び補強筋の局所座標方向を、破壊の進行に応じて自由に与えることが可能な点である。これにより、今後の展望も踏

^{*1} 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 工修 (正会員)

^{*2} 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 工修 (正会員)

^{*3} 名古屋大学大学院 教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

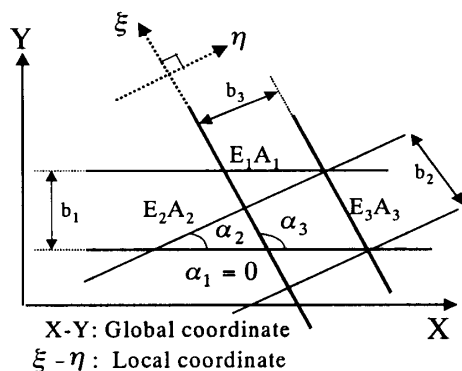


図-1 局所座標系における格子成分

また、例えば以下の点を格子成分で評価することが可能となる。補強筋においても、方向角を自由に操作できる定式化を行うことにより、軸鉄筋格子成分の方向角を操作することで、ダウエル作用を簡易に評価する。また、帯鉄筋格子成分の方向角を定めることにより、部材軸直角方向以外に配置された帯鉄筋の耐荷機構も構成式で容易に評価する。コンクリートの耐荷機構に関しては、ひび割れ面でのせん断伝達を、せん断ひずみ-せん断応力の関係を用いるのではなく、新たにひび割れ面で格子成分を想定することにより、このメカニズムも構成式に取り入れることが可能となる²⁾。

以上のように、格子等価連続体化法構成式は、ひび割れが発生した鉄筋コンクリート要素の複雑な特性に及ぼす要因を、コンクリート、及び補強筋格子成分を用いると共に、それらの方向角を破壊の進行に応じて操作することや、格子成分の応力-ひずみ関係を適切に評価することで、自由に表現することが可能となる。

2.2 格子等価連続体化法構成式

ひび割れが発生した鉄筋コンクリート要素の応力-ひずみマトリクスは、平面格子成分を仮定することにより以下のように求められる。

図-1に示すように、鉄筋コンクリート要素内に、コンクリート及び補強材の平面格子を想定する。図中、 $E_i A_i$ は各格子成分の剛性であり、 α_i は各格子成分の全体座標系 X 軸からの方向角、 b_i は部材間隔を示す。全体座標系におけるひずみベクトル $\{\varepsilon_g\}$ を用いることにより、

例えば図中の局所座標系、 ξ 軸方向のひずみは、式(2)により求められる。以下、下添え字 g は全体座標系、 ℓ は局所座標系を示す。

$$\{\varepsilon_g\} = \{\varepsilon_X \ \varepsilon_Y \ \gamma_{XY}\}^T \quad (1)$$

$$\{\varepsilon_\xi\} = [\cos^2 \alpha_3 \ \sin^2 \alpha_3 \ \cos \alpha_3 \sin \alpha_3] \{\varepsilon_g\} \quad (2)$$

式(2)を同様に用いれば、仮定した n 本の格子成分の局所座標方向ひずみは式(3)のようにまとめることができる。

$$\{\varepsilon_\ell\} = [L_\ell] \{\varepsilon_g\} \quad (3)$$

$$[L_\ell] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_n & \sin^2 \alpha_n & \cos \alpha_n \sin \alpha_n \end{bmatrix}$$

式(3)から、各格子成分の局所座標方向のひずみが求められることから、単位厚さに平均化された格子成分の等価応力 $\{n_\ell\}$ は、各格子成分の応力-ひずみ関係を用いることにより、式(4)より求めることができる。この場合、格子成分の応力-ひずみ関係には、1 軸モデルを用いる。

$$\{n_\ell\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_i \\ \vdots \\ n_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_1 A_1}{b_1} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \frac{E_i A_i}{b_i} \varepsilon_i \\ \vdots \\ \frac{E_n A_n}{b_n} \varepsilon_n \end{Bmatrix} = [R_n] \{\varepsilon_\ell\} \quad (4)$$

$$[R_n] = \begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_i & \\ & & & \ddots \\ & & 0 & & r_n \end{bmatrix}, \quad r_i = \frac{E_i A_i}{b_i}$$

ここで注意すべきは、式(4)から求められる等価応力 $\{n_\ell\}$ の単位は、式(4)からも明らかのように、 kN/mm となる。本研究では、この単位で示される応力を等価応力と呼ぶ。このような定式化を行う利点は、式(4)中の r_i を以下のように書き改めることが可能であることにある。

$$r_i = \frac{E_i A_i}{b_i} = \frac{E_i b_i t_i}{b_i} = E_i t_i \quad (5)$$

t_i は、格子成分それぞれの断面幅方向の厚さである。これにより、仮定する格子成分の断面積や、それらの配置間隔を、特に考慮する必要

が無いこととなる。さらに式(4)より求められた、局所座標系方向の各格子成分の等価応力ベクトルは、式(6)により全体座標系の等価応力ベクトル $\{\mathbf{n}_g\}$ に変換することが可能となる。

$$\{\mathbf{n}_g\} = [\mathbf{L}_n^*] \{\mathbf{n}_l\} \quad (6)$$

$$[\mathbf{L}_n^*] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_1 & \cdots & \cos^2 \varphi_i & \cdots & \cos^2 \varphi_n \\ \sin^2 \varphi_1 & \cdots & \sin^2 \varphi_i & \cdots & \sin^2 \varphi_n \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 & \cdots & \cos \varphi_i \sin \varphi_i & \cdots & \cos \varphi_n \sin \varphi_n \end{bmatrix}$$

where $\varphi_i = -\alpha_i$

以上より、等価連続体化法による等価応力-ひずみマトリクス $[\mathbf{D}_p]$ は、式(7)となる。

$$\{\mathbf{n}_g\} = [\mathbf{L}_n^*][\mathbf{R}_n][\mathbf{L}_e]\{\mathbf{e}_g\} = [\mathbf{D}_p]\{\mathbf{e}_g\} \quad (7)$$

$$[\mathbf{D}_p] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n r_i \cos^4 \alpha_i & \sum_{i=1}^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i & \sum_{i=1}^n r_i \cos^3 \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sum_{i=1}^n r_i \sin^4 \alpha_i & \sum_{i=1}^n r_i \cos \alpha_i \sin^3 \alpha_i & \sum_{i=1}^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i \\ \text{symm.} & & \end{bmatrix}$$

式(7)は、平面格子を想定して応力状態を記述する一般的な格子等価連続体化法構成式である。実際本研究で想定する格子成分は、圧縮力と引張力を受け持つ2本のコンクリート格子成分、及び軸方向補強筋、帯鉄筋格子成分、せん断伝達をモデル化する2本の格子成分²⁾、計6本の格子成分である。これらの格子成分は、鉄筋コンクリート要素の平均的な抵抗を表現するためのものであり、図-1中に示すひび割れ発生後の格子成分の方向角 α_i は、自由に選択することが可能である。

2.3 修正圧縮場理論

圧縮場理論、修正圧縮場理論の特徴は、ひび割れを離散的に捉えるのではなく、ひび割れの発生している RC 要素の平均ひずみ、平均応力を考えることにより、これを一様な性質を持つ連続的な要素として捉え、そのような要素内での力の釣り合い条件、及び変形の適合条件を用いてせん断問題を一般的に解こうとするものである。

ひび割れは平均的に取り扱われ、要素は一様

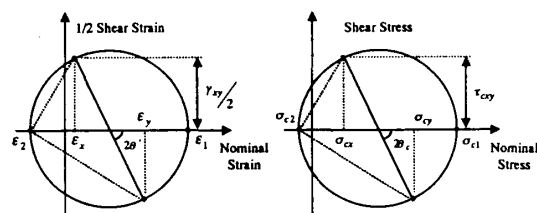


図-2 Mohr のひずみ円, 応力円

に変形するものと仮定することから、ひずみに関しては、軸方向ひずみ ε_x 、軸直角方向ひずみ ε_y 、及びせん断ひずみ γ_{xy} 、または主圧縮ひずみ ε_2 、及び主引張ひずみ ε_1 とその角度 θ' を考慮することとなる。このような要素についてのひずみの適合条件は、図-2に示すモールのひずみ円より次式のように書ける。

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_x) \tan \theta' \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_x) \tan^2 \theta' \quad (9)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x - (\varepsilon_1 - \varepsilon_x) \tan^2 \theta' \quad (10)$$

RC 要素に作用している応力 f_x 、 f_y 、 v_{xy} は、コンクリートと補強筋により受け持たれ、力の釣り合い条件は、次式となる。

$$f_x = \sigma_{cx} + \rho_{sx} \sigma_{sx} \quad x \text{ direction} \quad (11)$$

$$f_y = \sigma_{cy} + \rho_{sy} \sigma_{sy} \quad y \text{ direction} \quad (12)$$

$$v_{xy} = \sigma_{cxy} \quad xy \text{ direction} \quad (13)$$

ここで、 ρ_{sx} 、 ρ_{sy} は鉄筋比であり、 σ_{cx} 、 σ_{cy} はコンクリート応力、 σ_{sx} 、 σ_{sy} は、補強筋の応力を表す。式(13)は、せん断力は全てコンクリートによって受け持たれることを意味する。

コンクリートの応力状態には、図-2に示すコンクリートの Mohr の応力円により、次式の関係が与えられる。

$$\sigma_{cx} = \sigma_{c1} - \tau_{cxy} / \tan \theta_c \quad (14)$$

$$\sigma_{cy} = \sigma_{c1} - \tau_{cxy} \cdot \tan \theta_c \quad (15)$$

$$\sigma_{c2} = \sigma_{c1} - \tau_{cxy} \cdot (\tan \theta_c + 1 / \tan \theta_c) \quad (16)$$

未知パラメータは、軸方向鉄筋応力 σ_{sx} 、帯鉄筋応力 σ_{sy} 、コンクリートの主圧縮、引張応力、及び θ_c の4つであり、これらを解くための関係式として、式(8)～式(16)が用いられ、さらにコンクリート、及び補強筋の応力-ひずみ関係式が用いられる。また、コンクリートに関しては、 $\theta' = \theta_c$ の関係が仮定される。

2.4 修正圧縮場理論の表現

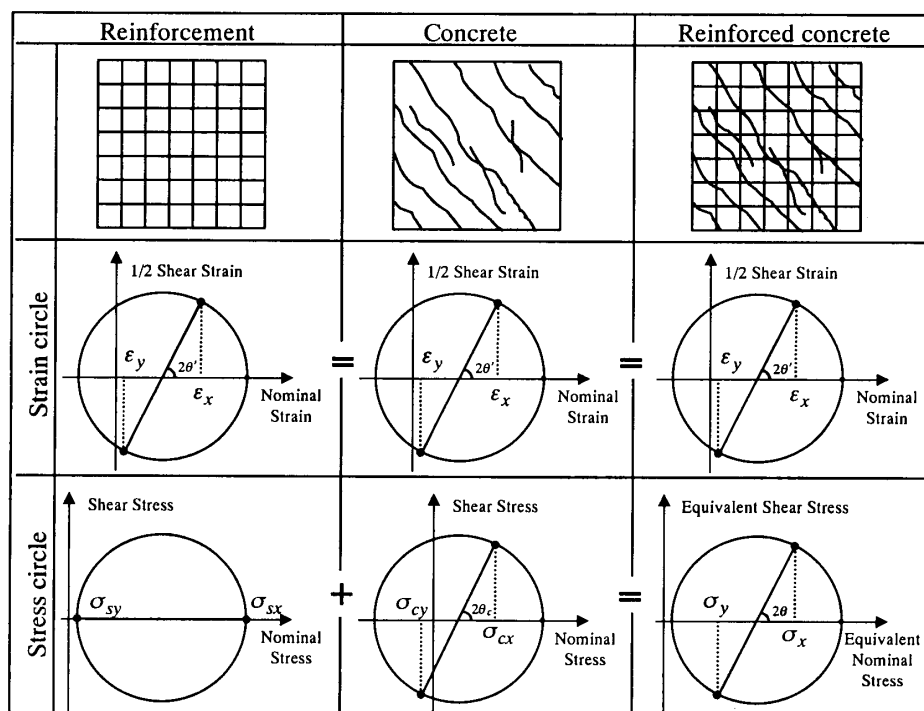


図-3 修正圧縮場理論を考慮した格子等価連続体化法の概念

本研究における格子等価連続体化法は、繰り返し応力場に拡張する一手法として、修正圧縮場理論の概念を、有限要素法において RC 材料の構成式として取り扱う。すなわち、格子等価連続体化法の格子成分の斜材角（図-1 中、 α_i ）を、修正圧縮場理論の「コンクリート要素の主応力方向は、主ひずみ方向と一致する」という仮定に基づき定めることにより、RC 材料の構成式を構築するものである。

図-3 に、本解析手法の概念図を示す。補強材、コンクリート、及び鉄筋コンクリート要素に作用するひずみ状態は、全て等しいと想定する。また、ひび割れは局所座標方向に進展すると仮定する。

局所座標方向 α_i 、すなわちコンクリート格子成分の方向角は、修正圧縮場理論の概念に基づき、主ひずみ方向と仮定した。この仮定により、Mohr のひずみ円、コンクリートの Mohr の応力円を描けば、図-3 中の θ' 、 θ_c が、次式を満たすこととなる。

$$\theta' = \theta_c \quad (17)$$

実際に、コンクリートの主応力方向と主ひずみ方向は一致しないが、本研究は修正圧縮場理

論の概念を用いるものである。また、補強筋の方向角は、軸方向鉄筋、帯鉄筋格子成分をそれぞれ、部材軸に平行、垂直方向と固定するとともに、ひび割れ面でのせん断伝達をモデル化する格子成分は、修正圧縮場理論と同様に仮定しないものとした。これにより、本研究で示される解析手法は、Stevens らの提案するモデル⁴⁾とほぼ等価となるが、不釣合力の収束手法が彼らのモデルと異なる⁴⁾。力の釣合は、不釣合力と等価節点力の比が 0.1%以下となるまで収束計算を行うこととした。

3. 格子成分の応力-ひずみ関係

本研究では、格子成分の平均的な応力-ひずみ関係に以下を用いた。

(1) コンクリート圧縮モデル

圧縮力を受け持つコンクリート格子の応力-ひずみ関係は、次式で仮定した。

$$\sigma_c = \eta f_c \left\{ 2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right\} \quad (18)$$

η : 軟化係数

ε_0 : 1 軸圧縮最大応力時のひずみ

ε_c : 各格子成分の圧縮ひずみ

f_c : コンクリート 1 軸圧縮強度

ここで, Collins らの提案する次式を用いて, 最大圧縮応力を, 圧縮応力を受け持つ格子の直方向引張ひずみ ε_t により低下させた.

$$\eta = 1.0 / \{0.8 - 0.34(\varepsilon_t / \varepsilon_0)\} \leq 1.0 \quad (19)$$

除荷パスは, 初期勾配で応力が低下するものとし, 再載荷パスは, ひずみ履歴の中で, 過去最大となったひずみ・応力状態へ向かうものとした. また, 圧縮ひずみ領域では, 除荷の際, 引張応力を持たないことと仮定した.

(2) 破壊エネルギーの導入

引張力を受け持つコンクリート格子には, 六郷らにより提案された引張軟化曲線である 1/4 モデルを用いた. ひび割れ発生までは弾性体とし, ひび割れ発生後は, この引張軟化曲線を要素の長さで除することで, 応力-ひずみ関係に変換したものを用いる. 除荷パスは, 初期勾配で応力が低下するものとし, 再載荷パスは, コンクリート圧縮モデルと等しく仮定した. 破壊エネルギー G_F は, 0.1 N/mm とした.

(3) 鉄筋モデル

補強筋の応力-ひずみ関係は, バイリニアモデルとし, 除荷パス, 再載荷パスは, 弾性勾配で応力が変化すると仮定した.

4. RC はりの解析例

本解析手法を用いた RC はりの解析例を示す. 図-4 には, 解析モデル, 及び試験体寸法が記されている. コンクリート圧縮強度は, 24.6 MPa , 補強筋の降伏強度は 320 MPa であり, 軸鉄筋比, 及びせん断補強鉄筋比は, それぞれ 2.6% , 0.38% である. 図-5 に, 数値解析結果と実験値の比較を示す. 単調載荷の場合, 解析値は, 実験値の挙動, せん断耐力力を精度良く評価していると共に, 実験では得られていない軟化挙動もまた評価し得ることが認められる. また図-6 に, 格子成分の傾斜角 (主ひずみ方向) の変化を示す. 図中の番号は, 図-4 中の位置と対応している. 格子成分の斜材角は, ひび割れ発生直後

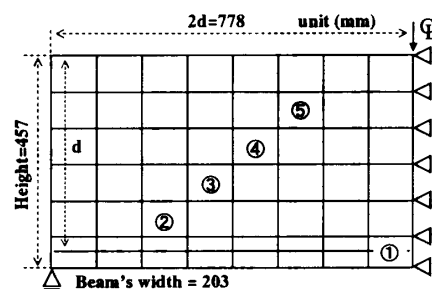


図-4 解析モデル及び試験体寸法

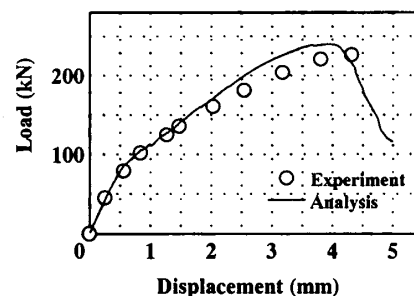


図-5 実験値との比較

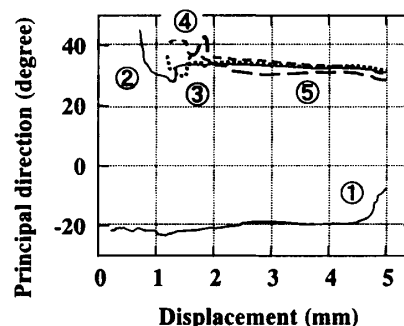


図-6 コンクリート格子斜材角の変化

に変化しているが, 最終的には, ほぼ 30° 前後に落ち着く結果が得られた. この 30° の角度は, 支点と載荷点とを結ぶ角度とほぼ等しい値である. また, 荷重軟化域においては, 多少変化することが確認された.

5. RC 柱の繰返し解析例

解析する実験データは, カルフォルニア大学の Priestley⁹⁾によるものである. 実験では, 一定軸力 2 MPa を作用させながら正負交番せん断力を作用させている. 柱の諸元を, 図-6 に示す. 材料強度は, コンクリート圧縮強度 (34.1 MPa), 軸鉄筋降伏強度 (469.2 MPa), 帯鉄筋降伏強度 (323.8 MPa) である. 図-7 に, 解析結果と実験結果の比較を示す. 解析結果は,

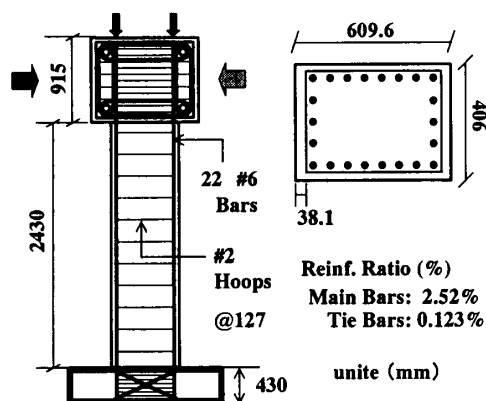


図-6 柱の諸元

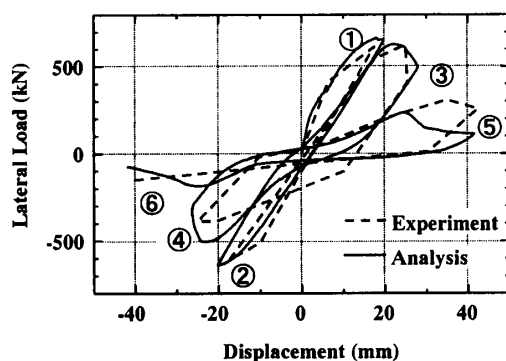


図-7 実験値との比較

最大耐荷力、耐荷力の低下とも精度良く評価できていることがわかる。しかし、unloading の際、実験値と解析値の挙動に差が見られる。これは、荷重が0付近に成るにつれ、コンクリートの方向角もまた、部材軸に平行、垂直方向に変化したことから、コンクリートの貢献を過小評価したためであると考えられる。

図-8 に、繰り返し点における解析モデルの変形を10倍した変形図を示す。予測された破壊箇所は、実験で観察された箇所とほぼ同様であり、予測された破壊モードも実験同様、軸鉄筋降伏後のせん断破壊であったが、変形図からは、解析値はせん断変形を過大評価する傾向が見受けられる。

6. 結論

本研究では、等価連続体化法構成式を繰り返し応力場に拡張する一手法として、圧縮場理論を表現した。RCはりの単調載荷解析、RC柱の繰り返し解析の数値解析例では、部材の耐荷力、破壊モードを精度良く評価できることが認

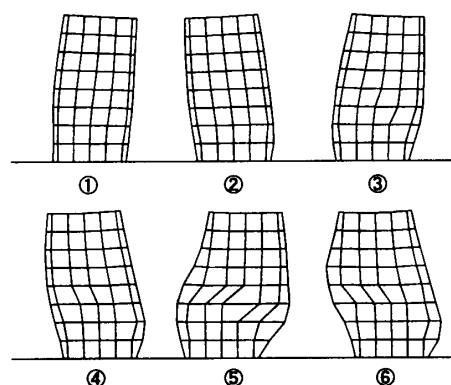


図-8 変形図

められたが、モデルの精度向上のためには、unloading, reloading の際には、格子成分の方向角を固定するなど、さらなる検討が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) Frank J. Vecchio and Michael. P. Collins: The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected shear, ACI Journal, March-April pp.219-231, 1986.
- 2) Tada-aki TANABE, Ahamed Syed Ishtiaq: Development of Lattice Equivalent Continuum Model for Analysis of Cyclic Behavior of Reinforced Concrete, Seminar on post-peak behavior of RC structures subjected to seismic load, Volume 2, pp.105-123, 1999.10.
- 3) Koichi MAEKAWA, Naoyuki FUKUURA and Xuehui AN: 2D AND 3D Multi-Directional Cracked Concrete Model under Reversed Cyclic Stresses, 参考文献2)と同様, pp.17-36.
- 4) N. J. Stevens, S. M. Uzumeri, M. P. Collins, and G. T. Will: Constitutive Model for Reinforced Concrete Finite Element Analysis, ACI Structural Journal, January-February pp.49-59, 1991.
- 5) Yan Xiao, M. J. Nigel Priestley, Frieder Seible: Steel Jacket Retrofit for Enhancing Shear Strength of Short Rectangular Reinforced Concrete Columns, Report No. SSRP-92/07, July 1993.