

論文 有限要素法によるフレッシュコンクリートの粘塑性流動解析

山田 義智*1・桃原 陸*2・大城 武*3

要旨：本研究は、フレッシュコンクリートを非圧縮(体積一定)性流体とみなし、フレッシュコンクリート流動時の構成式と不動時の構成式を導いた。そして、流動時の粘性の状態は、ひずみ速度に依存する材料非線形性を有することを示した。また、本研究では、運動方程式を解く際に、材料非線形性と非圧縮性を考慮できる手法として剛塑性有限要素法を改良した解析法を提案し、スランプ試験を対象としてその解析法の有用性を検討した。

キーワード：構成式、非圧縮性、材料非線形、剛塑性有限要素法、スランプ試験

1. はじめに

フレッシュコンクリートの流動特性は、降伏値と塑性粘度を変数とするビンガムモデルを用いてほぼ表現できることが多くの研究で報告されている。筆者らは、液体等の自由表面問題を扱う解析手法として用いられている MAC (Marker and Cell) 法にビンガムモデルを考慮してフレッシュコンクリートの流動解析を行い、その適用性を示したり。この手法は運動方程式を差分により離散化しており、複雑な境界形状を有する流動問題への適用には困難がある。また、ビンガムモデルを扱う場合、後述する材料非線形の問題があるが、この問題の合理的な解決を提示するには至っていない。

本研究では、まず最初に、フレッシュコンクリートの流動特性を表わす構成式を示し、材料非線形の問題を明確にする。次に、この構成式を有限要素法により離散化して複雑な境界形状を有する流動問題への適用性を高めるとともに、材料非線形問題の解法も示す。なお、本研究で提案する有限要素法は、剛塑性有限要素法を改良した手法である。また、この有限要素法と森らが提案した有限要素法による先駆的な解法^{2)・4)}との違いは、運動方程式を解く際に非圧縮性を満足させる点およびビンガムモデルに内在する

材料非線形の問題を考慮している点である。

本研究では、スランプ試験を対象とした流動解析を試みる。そして、本解析により得られた結果を既往の研究成果と比較し、提案する構成式と本解析手法の有用性を検討する。

2. フレッシュコンクリートの構成式

フレッシュコンクリートの流動特性を表すビンガムモデルでは、降伏以前において流動が生じない。しかし、本研究で用いる有限要素法解析では、ひずみ速度成分が0であると解析を行うことが出来ない。そこで、本解析では、ある流動開始値を超えるまではフレッシュコンクリートを非常に高い粘性を有する粘性流体として扱い、その流動速度を非常に小さくすることで不動状態とみなす。一方、ある流動開始値を越えた後は、ビンガムモデルの応力とひずみ速度関係を満足するような粘塑性流体として扱う。

フレッシュコンクリート流動時の粘塑性流体モデルは、図-1(a)に示すように、粘性要素と塑性要素より構成される。また、フレッシュコンクリートが不動状態とみなされる場合は図-1(b)のような高粘性の粘性要素のみで表される。

以下では、まず、流動する粘塑性流体の構成式を導く。次にフレッシュコンクリートが流動

*1 琉球大学助手 工学部環境建設工学科 博士(工学) (正会員)

*2 琉球大学大学院 理工学研究科環境建設工学専攻 (正会員)

*3 琉球大学教授 工学部環境建設工学科 Ph.D (正会員)

する流動開始値の定義を行い、不動状態の高粘性流体の構成式も導く。

2.1 流動時の構成式

図-1(a)に示す塑性要素において、塑性要素のひずみ速度は、降伏関数Fと塑性ポテンシャルを同じとする次式の関連流れ則で表せるものとする。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}^p} \quad (1)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ は塑性要素のひずみ速度成分、 τ_{ij}^p は塑性要素の応力成分、 $d\lambda$ は正のスカラー値である。

本研究では、フレッシュコンクリートの流動時には非圧縮（体積一定）性が成り立つものとして、降伏関数Fには偏差応力の第2次不変量のみ関数であるミーゼスの降伏条件($\frac{1}{2}\tau_{ij}^p\tau_{ij}^p = \tau_y^2$)を採用する。これにより、式(1)は次式となる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \tau_{ij}^p \quad (2)$$

ここで、 τ_{ij}^p は塑性要素の偏差応力成分である。一方、粘性要素のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^v$ は次式となる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^v = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij}^v \quad (3)$$

ここで、 τ_{ij}^v は粘性要素の偏差応力成分、 μ は塑性粘度である。

図-1(a)からも分かるように、粘塑性流体のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は、塑性要素のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ および粘性要素のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^v$ と等しい。

粘塑性流体の偏差応力成分 τ_{ij}^{vp} は、次式で表される。

$$\tau_{ij}^{vp} = \tau_{ij}^p + \tau_{ij}^v \quad (4)$$

式(4)は、 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^v$ を考慮して式(2),(3)より、次式のように展開される。

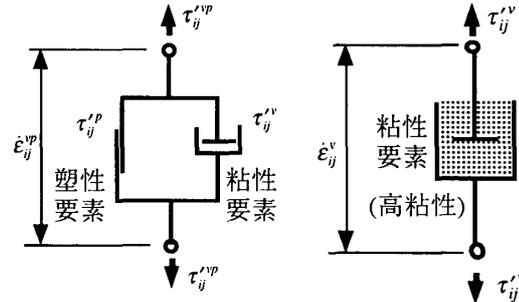
$$\tau_{ij}^{vp} = \left(2\mu + \frac{1}{d\lambda}\right) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (5)$$

$$\tau_{ij}^{vp} = (1 + 2\mu d\lambda) \tau_{ij}^p \quad (6)$$

式(6)の両辺を2乗し総和をとると次式となる。

$$\tau_{ij}^{vp} \tau_{ij}^{vp} = (1 + 2\mu d\lambda)^2 \tau_{ij}^p \tau_{ij}^p \quad (7)$$

偏差応力の第2次不変量が $J_2^{\tau} = \frac{1}{2}\tau_{ij}^{vp}\tau_{ij}^{vp}$ であることと、ミーゼスの降伏条件を考慮することにより、式(7)は次式となる。



(a) 粘塑性流体（流動時） (b) 高粘性流体（不動時）
図-1. フレッシュコンクリートの構成モデル

$$J_2^{\tau} = (1 + 2\mu d\lambda)^2 \tau_y^2 \quad (8)$$

ここで、 τ_y はせん断降伏値である。

式(8)より $d\lambda$ について整理し、これを式(5)に用いると次式となる。この式は、Hohenemser・Pragerのビンガム流体の流動時の構成式⁵⁾と等価になる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\tau_y}{\sqrt{J_2^{\tau}}}\right) \tau_{ij}^{vp} \quad (9)$$

いま、式(10)で表される関数 f を導入すると、式(9)は式(11)となる。なお、 $\eta = \frac{\mu}{f}$ である。

$$f = 1 - \frac{\tau_y}{\sqrt{J_2^{\tau}}} \quad (10)$$

$$\tau_{ij}^{vp} = \frac{2\mu}{f} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (11)$$

ここで、粘塑性流体のひずみ速度テンソルの第2次不変量が $J_2^{\epsilon} = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ であること、および、粘塑性流体の偏差応力の第2次不変量が $J_2^{\tau} = \frac{1}{2}\tau_{ij}^{vp}\tau_{ij}^{vp}$ であることを考慮すると、式(11)から次の関係が得られる。

$$J_2^{\tau} = 4\eta^2 J_2^{\epsilon} \quad (12)$$

式(12)において両辺の平方根をとると、 $\sqrt{J_2^{\tau}} = \sqrt{4\eta^2 J_2^{\epsilon}} = \eta\sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}} = \eta\sqrt{\Pi}$ となる。ここで、 $\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ である。これを、式(10)に代入し、関数 f の逆数を求めると次式となる。

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{\tau_y}{f\sqrt{J_2^{\tau}}} = 1 + \frac{\tau_y}{f\eta\sqrt{\Pi}} = 1 + \frac{\tau_y}{\mu\sqrt{\Pi}} \quad (13)$$

上式より、式(11)は次の様に整理される。

$$\tau_{ij}^{vp} = \frac{2\mu}{f} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (14)$$

上式は流動時の粘塑性流体の偏差応力とひずみ速度の関係を表している。この関係より、流

動を生じる時のフレッシュコンクリートの一般化した構成式は、フレッシュコンクリートを非圧縮と仮定すると次式で表される。

$$\tau_{ij}^{vp} = -P\delta_{ij} + 2\left(\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (15)$$

ここで、 τ_{ij}^{vp} は粘塑性流体の応力成分、 P は静水圧、 δ_{ij} はクロネッカーデルタを表す。

2.2 流動開始値の定義と不動時の構成式

ここでは、フレッシュコンクリートの不動時の構成式を示し、フレッシュコンクリートが不動状態から流動に転じる流動開始値を定義する。なお、構成式の導出は、2次元の単純せん断応力状態から始め、最後に一般応力状態に展開する。

式(14)において2次元(x-y表示)の単純せん断応力状態を考えると次式が得られ、図-2に示す降伏値 τ_y を切片とする直線(a)が引ける。これは、ビンガムモデルである³⁾。

$$\tau_{xy}^{vp} = 2\mu\dot{\epsilon}_{xy}^{vp} + \tau_y \quad (16)$$

このビンガムモデルは、降伏値をこえるまではひずみ速度を生じない。しかし、本解析では、ひずみ速度が0だと解析不能なため、ある流動開始値未満の不動状態ではフレッシュコンクリートを非常に高い粘性を持つ流体として扱う。いま、図-2に示す直線(b)を高い粘性を持つ不動時のフレッシュコンクリートの応力とひずみ速度の関係とすると、直線(a)と直線(b)の交わる時のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{xy}^v = \pi_c$ が流動開始値と定義される。ここで、不動時のフレッシュコンクリートの応力とひずみ速度の関係(直線(b))は次式となる。

$$\tau_{xy}^{vp} = \left(2\mu + \frac{\tau_y}{\pi_c}\right)\dot{\epsilon}_{xy}^v \quad (17)$$

本解析では、不動時のフレッシュコンクリートの粘度 $(2\mu + \frac{\tau_y}{\pi_c})$ が、流動時の塑性粘度 2μ より α 倍の大きな値を持つようにすることで、次式のように流動限界 π_c 値を決定した。ここで、 β は $2(\alpha-1)$ の逆数である。

$$\pi_c = \frac{\tau_y}{2(\alpha-1)\mu} = \frac{\beta\tau_y}{\mu} \quad (18)$$

いま、式(17)を一般の応力状態に拡張すると、

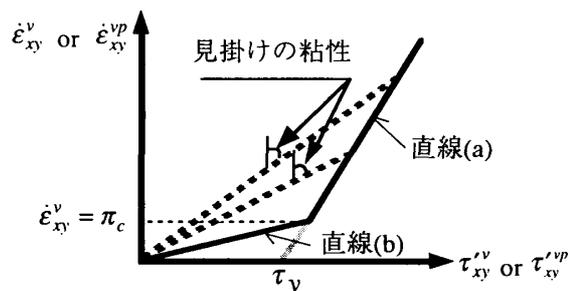


図-2. 単純せん断応力時の応力ひずみ速度関係

次式で表される。なお、 $\Pi_c = \pi_c^2$ である。

$$\tau_{ij}^v = -P\delta_{ij} + 2\left(\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi_c}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^v \quad (19)$$

式(15)、式(19)より、フレッシュコンクリートの構成式は、bi-viscosityモデル⁶⁾と称する次式で整理される。

$$\left. \begin{aligned} \text{(降伏前): } \tau_{ij}^v &= -P\delta_{ij} + 2\left(\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi_c}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^v, \quad (\pi < \pi_c) \\ \text{(降伏後): } \tau_{ij}^{vp} &= -P\delta_{ij} + 2\left(\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}, \quad (\pi \geq \pi_c) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで、 $\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ であることから、降伏後の粘性の状態は、ひずみ速度に依存する一種の材料非線形性を有することが分かる。これは、図-2に示すように、見掛けの粘性がひずみ速度に応じて変化する事からも理解される。よって、この構成式を用いて運動方程式を解く場合は、何らかの収束計算が必要となる。また、この構成式は非圧縮(体積一定)性を仮定しており、運動方程式を解く場合にも、非圧縮性を満足するように考慮する必要がある。

フレッシュコンクリートにおいては、平均応力の依存性も指摘されている⁴⁾。従って、平均応力を考慮した降伏関数や、その降伏関数に対応する塑性ポテンシャルを適用して構成式を導くことが必要になると考えられ、今後の課題である。

3. 運動方程式および有限要素法の定式化

本解析では、フレッシュコンクリートを均質連続体とみなしている。また、今回はスランプ試験を対象とするので流動領域を軸対称問題とする。従って、運動方程式は式(21)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) + F_z \\ \frac{\partial v}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right) + F_r \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで、

$\frac{\partial}{\partial D}$: 実質微分, t : 時間(sec), ρ : 密度(kg/m³)

u, v : 軸方向 z および直交方向 r の流速(m/sec)

τ_{ij} : 応力成分, F : 体積力成分

塑性加工問題で用いられる剛塑性有限要素法は、非圧縮性や材料非線形性を考慮した解析が可能であり、本研究に適用することができる。そこで、本研究で用いる有限要素法は、この剛塑性有限要素法を粘塑性流動の解析が行える様に改良した。

提案する有限要素法では、式(21)の左辺の慣性項を省略し、同式の右辺を仮想仕事の原理を用いて有限要素法に定式化した。ここで、解析の時間発展は、時間刻み0.01sec毎に進行させる準動的な解法とし、各時間ステップ毎に要素節点を変位量に応じた位置に移動させながら計算を行った。

要素剛性マトリックスは、次式に示すように、平均応力に関連した右辺第一項の部分と、偏差応力に関連した右辺第二項の部分に分けて導いた。

$$k_{ij} = \int B_i^T D_v B_j dV + \int B_i^T D_s B_j dV \quad (22)$$

ここで、 B は速度-ひずみ速度マトリックスを表す。 D_v は平均応力に関する応力-ひずみ速度マトリックスであり、 D_s は偏差応力に関する応力-ひずみ速度マトリックスである。また、 T はマトリックスの転置を表す。

式(22)の平均応力に関連する右辺第一項では、ペナルティ関数法を用いて体積一定(非圧縮)条件を満足させている。ここで、ペナルティ係数は 10^{10} とした。この非常に大きなペナルティ係数を用いたことで、式(22)の右辺第二項部分が無視され、体積一定条件に拘束されて変形が出来なくなり、正しい結果とならないロッキングと呼ばれる現象が生ずる。これを防ぐために、本研究では、式(22)の右辺第二項部分を求める

際にガウス数値積分点数は 2×2 点とし、右辺第一項部分を求める際のガウス数値積分点数は1点とする選択低減積分を用いた。なお、要素は4節点アイソパラメトリック要素を用いた。

偏差応力に関連した式(22)の右辺第二項の部分においては、偏差応力と偏差塑性歪み速度の関係が重要となる。ミーゼスの降伏条件を用いた剛塑性有限要素法においては、偏差応力と偏差塑性歪み速度の関係は次式となる。

$$\tau'_{ij} = \frac{2\tau_y}{3\epsilon} \epsilon'_{ij} \quad (23)$$

本有限要素法においては、上式の $\frac{\tau_y}{3\epsilon}$ の値を降伏前には式(20)の $\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{11}\sigma_c}$ に、降伏後は同じく式(20)の $\mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{11}}$ に変えて計算を行った。

ここで、式(20)および図-2からも理解されるように、降伏後の粘性の状態はひずみ速度に依存し、材料非線形性状を示す。そこで、本有限要素法解析においては、非線形剛性方程式の解法として直接反復法による収束計算を行った。

4. 解析条件と解析結果およびその考察

4.1 解析条件

今回の有限要素法解析では、図-3に示すようにメッシュ分割し、境界条件として対称軸では鉛直方向の自由条件、底面では固定条件を与えた。フレッシュコンクリートが流動変形する過程において、自由表面上の節点が底面に達する可能性がある。この場合には、底面に達した位置で節点を固定条件とした。

今回解析を行うフレッシュコンクリートのビンガム定数の値は、表-1に纏めて示す。

本研究では、フレッシュコンクリートの非降伏状態を高粘性を持つ流体として扱っているもので、流動は完全には停止しない。そこで、本解析では、要素の全てが降伏基準の Π_c 以下になった場合に流動停止状態とした。

提案する有限要素法解析を用いて β 値の影響を調べたところ、この値は流動停止までの時間に大きく影響を与えた。筆者らが、スランプ12~18cmのフレッシュコンクリートの流動停止

までの時間を計測したところ、3～5秒程度であった。この実測のスランプ停止までの時間と一致するように、表-1のパラメータで検討したところ、 β 値は0.05が適当であり、本解析ではこの値を用いた。この値は、結果的に小門ら¹¹⁾の球引き上げ試験により得られた限界値($\sqrt{I_{2c}}$)の0.16/s以下に相当する。

4.2 解析結果およびその考察

降伏値とスランプ値の関係について、本有限要素法の解析結果とMAC法¹¹⁾の解析結果および既往の結果¹²⁾との比較を図-4に示す。ここで用いるMAC法は、計算時の数値安定性から決められる小さな時間刻み幅に、安全係数(0.1)を乗じて更に小さな時間刻み幅としている。この操作により、前回の計算時よりひずみ速度が大きく変化する事を防ぎ、材料非線形性の影響を軽減することを試みた。このMAC法で得られた結果は、スランプ値およびスランプ停止時間(図-5参照)ともに実験結果を良く表している。一方、有限要素法による解析結果は、モデルA,BではMAC法の解析結果とほぼ一致し、水口らの実験結果とも良好な関係にある。しかし、モデルC,Dでは、本解析結果はMAC法に比べスランプ値を30～40mm大きく評価した。また、スランプ値が25cmを超えるようなモデルEについては、要素が大きな変形でいびつになっており、計算も途中で解が発散した。

図-5では、本有限要素法より得られたスランピング曲線とMAC法により得られたスランピング曲線を比較する。有限要素法の解析結果とMAC法の解析結果は、上述のスランプ値と同様にモデルA,Bでは良く一致しているが、モデルC,Dでは若干の差がある。MAC法では、式(21)の運動方程式の慣性項を考慮しているが、本有限要素法では、これを省略している。その為、降伏値および塑性粘度が高いモデルA,Bの場合は、見掛けの粘性が大きくなることで慣性項の影響が小さくなり、慣性項を省略した本有限要素法とMAC法の結果はほぼ一致するが、降伏値および塑性粘度が低いモデルC,Dでは、この慣

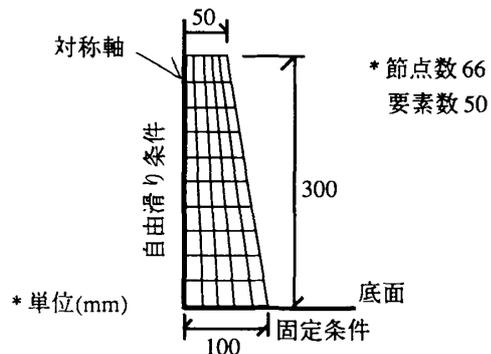


図-3. メッシュ分割および境界条件

表-1. 解析モデル

モデル名 ビンガム定数	A	B	C	D	E
降伏値 (Pa)	2000	1500	900	300	50
塑性粘度 (Pa·s)	700	500	300	100	50

性項の影響が無視できず、本有限要素法とMAC法との間で差がでたものと推察される。これらの結果から、降伏値および塑性粘度の低いフレッシュコンクリートについては、慣性項の影響が無視できないことが分かる。

慣性項の影響を便宜的に考慮する方法として、運動方程式において粘性項の力の負担を高めることが考えられる。本研究では仮想粘性係数と称する係数 Ω を式(20)の右辺第二項に乗じて粘性項の影響を大きくし、慣性項の影響を代用する便宜的な手法をモデルC,Dを対象として試みた。その結果を図-5に併せて示す。ここで、モデルCでは、 $\Omega=1.4$ とした場合にMAC法と近い結果となり、モデルDでは、 $\Omega=1.5$ とした場合にMAC法と近い結果となった。これより、降伏値および塑性粘度の低い場合ほど慣性項の影響が大きいことが分かる。

図-6には、モデルC($\Omega=1.4$ を考慮)のスランプの変形進行状況を示す。この図より、底面から1/3程度上部までの範囲が膨らみ出して、頂上部が下がっていく様子がわかる。また、このスランプの変形進行状況は、頂上部で若干の凹みが見られる等、MAC法による変形進行状況¹¹⁾と類似した結果になった。

5. まとめ

本研究では、フレッシュコンクリートを非圧縮(体積一定)性流体とみなし、流動時の構成式と不動時の構成式を導いた。そして、流動時の粘性の状態は、ひずみ速度に依存する材料非線形性を有することを示した。なお、流動時の構成式は、関連流れ則とミーゼスの降伏条件を考慮して導いている。

本研究では、剛塑性有限要素法を改良して、粘塑性流体の解析が行える有限要素法を提案した。この解法では、非圧縮性を満足し、材料非線形の問題を解決して運動方程式を解いている。

提案した有限要素法を用いて、スランプ試験を対象に解析を行ったところ、降伏値および塑性粘度が大きい場合の解析結果は、MAC法解析結果や既往の実験結果と良く一致したが、降伏値および塑性粘度が小さくなるにつれてMAC法解析結果や既往の実験結果と差が見られた。この理由は、本解析では式(21)の慣性項を省略した準動的解析であるためと推察される。この慣性項の影響を表す方法として仮想粘性係数 Ω 考慮する手法を提案したが、この手法は便宜的なものである。従って、合理的なフレッシュコンクリートの流動解析を行うためには慣性項を考慮した有限要素法に拡張する必要があり、今後の課題である。

[参考文献]

- 1) 山田義智, 大城武, 榎田佳寛: フレッシュコンクリート流動解析へのMAC法の適用, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.20, No.1, pp.131-136, 1998
- 2) 森博嗣, 谷川恭雄: 粘塑性有限要素法によるフレッシュコンクリートの流動解析, 日本建築学会構造系論文集, 第374号, pp.1-9, 1987.4
- 3) 森博嗣, 谷川恭雄: フレッシュコンクリートの各種コンシステンシー試験方法に関するレオロジー的考察, 日本建築学会構造系論文集, 第377号, pp.16-25, 1987.7
- 4) 森博嗣, 谷川恭雄: フレッシュコンクリートの構成則に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第396号, pp.9-16, 1989.2
- 5) Y.C. ファン(大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 訳):

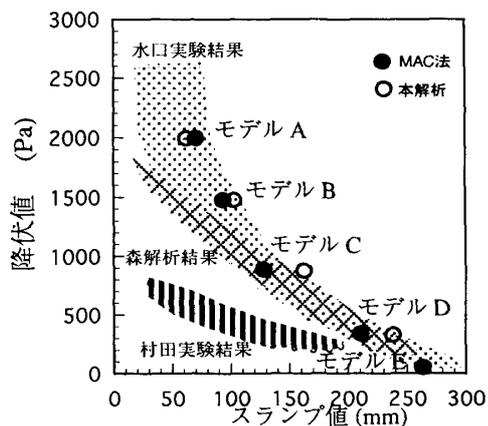


図-4. 降伏値とスランプ値の関係

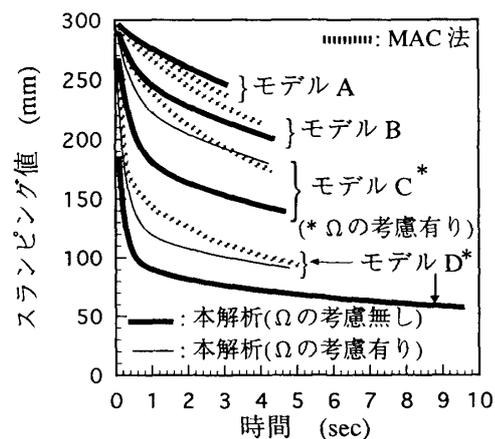


図-5. スランプ曲線の比較

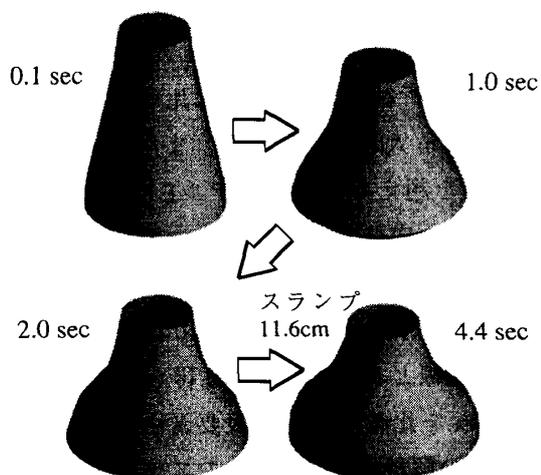


図-6. スランプの変形進行状況

- 連続体の力学入門, 培風館, 1977
- 6) 石川拓司, 大島修造, 他: 狭さく管内の血液流の数値シミュレーション, 日本機械学会論文集(B編)62巻600号, pp.49-56, 1996.8
- 7) 小門武, 細田尚, 宮川豊章: 数値流体解析による高流動コンクリートのレオロジー定数評価法に関する研究, 土木学会論文集, No.648/V-47, pp.109-125, 2000.5