コンクリート工学年次論文集, Vol. 25, No. 2, 2003

論文 無限領域の地動を考慮したマス-バネ系モデルのエネルギー伝達境界

李　相勲[*1]・田邉　忠顕[*2]

要　旨：コンクリート連続高架橋のような離散系構造物における現在までのエネルギー伝達境界の議論は，解析領域の地動外乱によって発生したエネルギーの無限領域への逸散に対して主に行われており，無限遠方からの地動によるエネルギーの入射は考慮されていない．本研究ではマス-バネ系モデルを用いて，無限領域内の 1 つの質点を調和地動で励振し，無限に連なる質点の応答を積分することで無限遠方からのエネルギーの入射を求めた．また，この伝達境界の検証を行った上で，不規則構造を持つモデルに対する解析を行い，その影響を検討した．

キーワード：エネルギー伝達境界，離散系構造物，エネルギーの逸散と入射

1. はじめに

東海地震の来襲が予想されている現在，防災とともに耐震に対する重要性がますます強調されている．著者[1)]らは鉄筋コンクリートまたはPCコンクリートで多く造られている新幹線連続高架橋において，隣接する構造物との相互作用の必要性を論じてきた．今までの議論では，振動解析において無限領域の励振はないと仮定している．それは，非常に長い構造物を対象とするので，実際に全ての構造物に地震動が作用するとは考えにくいからである．その場合，解析対象の不規則領域を大きく取れば，実際の現象に近い結果を得ることができると考えられる．しかし，解析領域の大きさと実際の地震の作用範囲を結びつけるのは相当困難である．また，解析対象の大きさに比例して解析時間も大きくなる．無限に続く一様なマス-バネ系モデルを考えた場合，全領域に同じ地震動が作用すると，その応答は単一質点の応答と全く等しいはずである．しかし，中に不規則な部分が存在すると，その応答は単一質点のモデルでは評価することができない．即ち，不規則領域と規則的な無限領域との相互作用を考慮しなければならない．地盤のような連続体の場合はLysmerら[2)]がラブ波またはレーリー波を仮定して無限遠方からの波動入射を考慮しているが，橋梁のような離散系においては，地震動によって励起されたエネルギーの逸散による遠方からの入射波を求めるのは容易ではない．本研究では，離散系における，地動による遠方からのエネルギー入射を考慮できるよう，線形に仮定されたマス-バネ系モデルを用いて，伝達境界の定式化を行った．

2. 無限領域からの入射エネルギー

図-1 のようなマス-バネ系モデルが地動によって励振される場合を考える．例としてそのモ

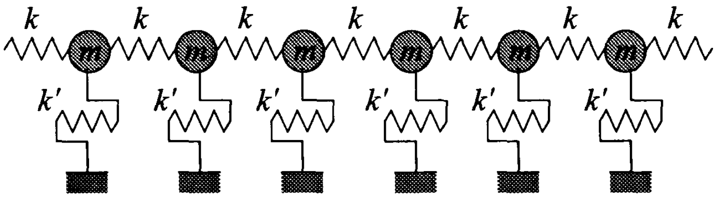

図-1　地動を考慮したマス-バネ系モデル

*1 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　博士課程後期課程　（正会員）
*2 名古屋大学大学院教授　工学研究科　土木工学専攻　工博　（正会員）

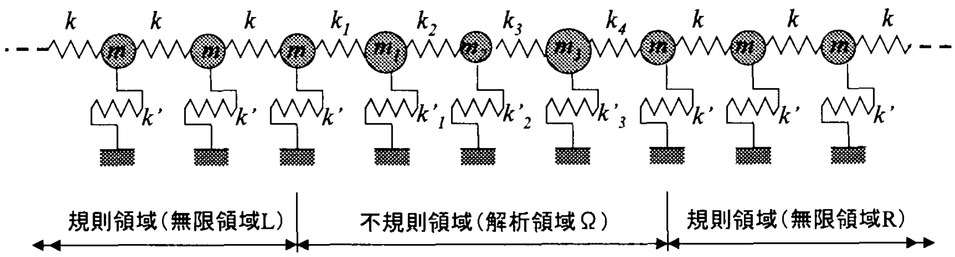

図-2 不規則領域を有するマス-バネ系モデル

デルの部材特性をそれぞれ m=25ton, k=2200000 kN/m, k'=19000kN/m とすると，調和地動加速度が振幅 10.0m/s^2 の正弦波である $\ddot{x}_0 = 10\sin\omega t$ の場合，ω=20, 100 に対する定常応答振幅は 1 質点の場合それぞれ 0.0278m と 0.0057m である．この応答は当然質点の数に関係なく不変である．即ち，無限に続くマス-バネ系モデルの地動による応答は 1 質点系のそれと等しい．しかし，**図-2** のように内部に不規則な部分が存在する場合，その応答は全く異なるはずであり，その真の解を求める研究は著者らが知る限り行われていない．ここでは規則的な無限領域に地動を考慮した場合のエネルギー伝達境界を定式化する考え方について論ずる．まず，1 質点系の応答と比較するために上記のモデルについて両側に伝達境界を設け，無限領域の地動を考慮しない場合の定常応答を，解析領域Ωの質点数が 1, 50, 150 それぞれに対して求めると**図-3**，**図-4** のようになる（以下，本論文の解析手法の詳細は**参考文献 1**）を参照）．この場合の解析領域Ωの地動による応答は質点の数に強く影響を受ける．ω=20 の応答と ω=50 の応答の形が異なるのは波動の伝播の有無によるものである．その伝播条件を**図-5** に示す．ここで，無限のマス-バネ系モデルの一般解[1] は次式で表せる．

$$x_r = u_r e^{i\omega t} = u\eta^r e^{i\omega t} \tag{1a}$$

ただし，
$$\eta = \frac{(-m\omega^2 + 2k + k') \pm \sqrt{\xi}}{2k} \tag{1b}$$

$$\xi = (m\omega^2 - k')(m\omega^2 - k' - 4k) \tag{1c}$$

無限領域の地動の影響を議論するためには，エネルギー伝達境界を考慮したときの運動方程式を吟味する必要がある．伝達境界を考慮した

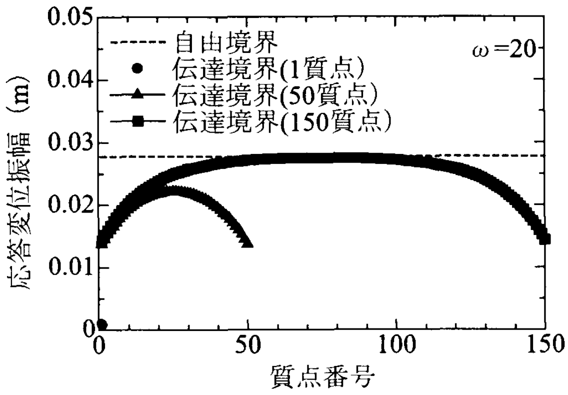

図-3 各質点の応答変位振幅，ω=20

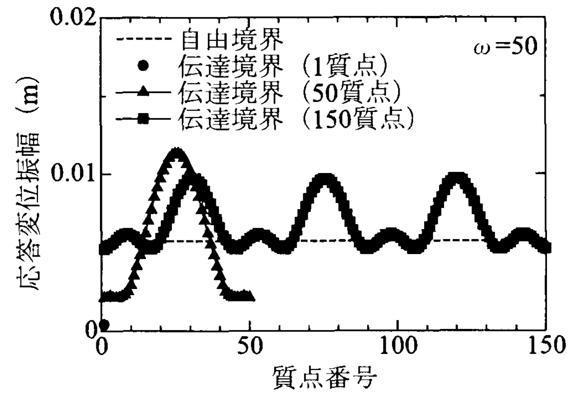

図-4 各質点の応答変位振幅，ω=50

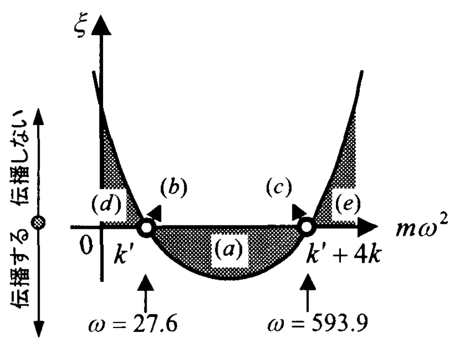

図-5 波動の伝播条件

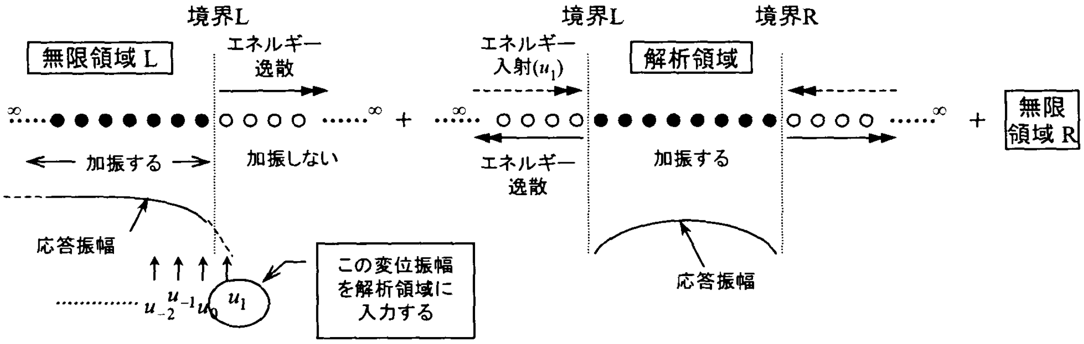

図-6　境界でのエネルギーの逸散と入射

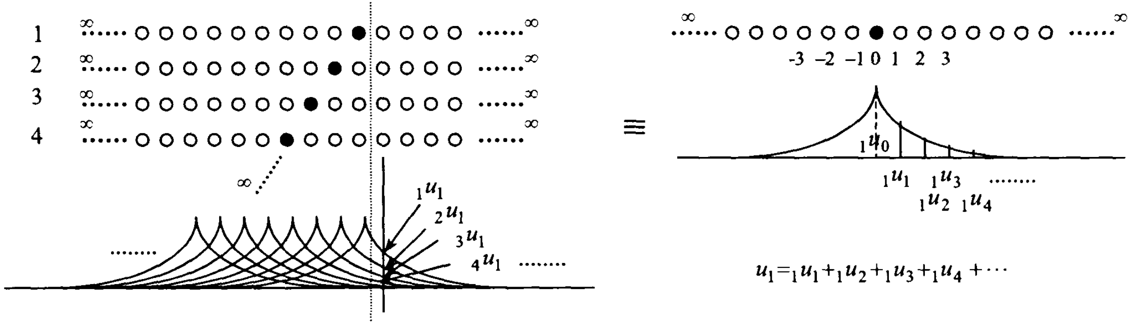

図-7　逸散波の求め方

マス-バネ系モデルの解析領域Ωにおいて地動加速度 a_0 が作用した場合，その運動方程式は次のように書ける．

$$\left([K]_\Omega-\omega^2[M]_\Omega+[R]_R+[L]_L\right)\{U\}_\Omega=-[M]\{a_0\}_\Omega+\left([R]_R-[L]_R\right)\{U\}_R^L+\left([L]_L-[R]_L\right)\{U\}_L^R \qquad (2)$$

この式の左辺の $\left([R]_R+[L]_L\right)\{U\}_\Omega$ は右と左の境界でのエネルギー逸散を表している．また，右辺の $\left([R]_R-[L]_R\right)\{U\}_R^L$ は右領域からの，$\left([L]_L-[R]_L\right)\{U\}_L^R$ は左領域からのエネルギーの入射を表している．即ち，$\{U\}_R^L$ と $\{U\}_L^R$ はそれぞれ右側と左側の境界において，解析領域Ωへ入射する波の複素変位振幅を表す．**図-6** に示すように，この入射波は無限領域の地動によって発生した逸散波にほかならない．結局，無限領域の地動を考慮する方法とは**図-1** のようなモデルに対し片方に地動を考慮してない伝達境界を設け，その境界上の逸散波を求めて解析領域Ωに入射波として与えることである．次にこの逸散波の求め方を示す．その際，波の特性が異なるので伝播する波（**ケース 1**：**図-5** の a 部分）と伝播しない波（**ケース 2**：**図-5** の d, e 部分）に分けて議論する．

3. 収斂する入射波（ケース 1）

無限領域において，片方は加振し片方は加振しない場合，加振する方から加振しない方にエネルギーの逸散が生じる．この場合，逸散波の応答変位振幅を求めるには，波動伝播の形が収斂する場合，**図-7** に示すように 1 質点を加振したときの応答を片方の∞方向に対して積分して求めれば良い．即ち，

$$u_1={}_1u_1+{}_1u_2+{}_1u_3+{}_1u_4+\cdots \qquad (3)$$

式(3)は式(1)の一般解を参照して，次のように書き直せる．

$$u_1={}_1u_0\left(\eta^1+\eta^2+\eta^3+\eta^4+\cdots\right) \qquad (4)$$

右方向に伝播する場合，$\eta<1$ であるから，この無限級数は収斂する．従って，

$$u_1=\frac{{}_1u_0\cdot\eta}{1-\eta} \qquad (5)$$

ここで，${}_1u_0$ は両側に伝達境界を考慮したとき，1 質点のみを加振した場合の複素応答変位振幅である．その値を求めるため，両側に伝達境界を持つ 1 質点モデルにおいて地動加速度 a_0 が作用する場合を考える．この場合，全体の運動方程式は式(2)から次のように書ける．

$$\left\{k'-\omega^2 m+k(1-\eta_1)+k(1-1/\eta_2)\right\}(u_R+i\cdot u_I)=-m(a_{0R}+i\cdot a_{0I}) \qquad (6)$$

整理すると

$$\sqrt{(m\omega^2-2k-k')^2-4k^2}\,(u_R+i\cdot u_I)=-m(a_{0R}+i\cdot a_{0I})$$

従って，根号の中が正（伝播しない波）であれば，

$$u_R=\frac{-ma_{0R}}{\sqrt{(m\omega^2-2k-k')^2-4k^2}} \tag{7}$$

$$u_I=\frac{-ma_{0I}}{\sqrt{(m\omega^2-2k-k')^2-4k^2}} \tag{8}$$

根号の中が負（伝播する波）であれば，

$$u_R=\frac{-ma_{0I}}{\sqrt{4k^2-(m\omega^2-2k-k')^2}} \tag{9}$$

$$u_I=\frac{ma_{0R}}{\sqrt{4k^2-(m\omega^2-2k-k')^2}} \tag{10}$$

ここで，u_R と u_I はそれぞれ質点の複素応答変位振幅 ${}_1u_0$ の実部と虚部である．また，a_{0R} と a_{0I} はそれぞれ複素入力加速度振幅 a_0 の実部と虚部である．結局のところ，伝播しない条件に対する無限領域の地動による逸散波は，式(5)と式(7), (8)から求めることができる．

4. 振動する入射波（ケース 2）

無限領域において波動の振動数が**図-5** の(a)の場合，この波動は伝播するが，この場合も **3 章**と同様な考え方で逸散波の変位振幅を求めることができる．ここで，右方向に伝播する場合，式(5)から η を指数関数で表すと，

$$u_1={}_1u_0\left(ae^{-i\phi}+ae^{-i2\phi}+ae^{-i3\phi}+\cdots\right)$$
$$={}_1u_0a\{(\cos\phi+\cos2\phi+\cdots)-i(\sin\phi+\sin2\phi+\cdots)\} \tag{11}$$

この無限級数は振動する．右辺の第 1 項は

$$\cos\phi+\cos2\phi+\cos3\phi+\cdots$$
$$=\sin\frac{n}{2}\phi\cos\frac{n+1}{2}\phi\Big/\sin\frac{\phi}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sin\phi/2}\left\{\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right)\phi-\sin\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}\right)\phi\right\}$$
$$=\frac{1}{2\sin\phi/2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\phi-\frac{1}{2\sin\phi/2}\sin\frac{\phi}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sin\phi/2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\phi-\frac{1}{2} \tag{12}$$

右辺の第 2 項は

$$\sin\phi+\sin2\phi+\sin3\phi+\cdots$$
$$=\sin\frac{n}{2}\phi\sin\frac{n+1}{2}\phi\Big/\sin\frac{\phi}{2}$$
$$=\left\{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)\phi+\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right\}\Big/\sin\frac{\phi}{2}$$
$$=-\frac{1}{2\sin\phi/2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)\phi+\frac{1}{2}\cot\frac{\phi}{2} \tag{13}$$

ここで，式(12)と(13)において調和曲線の軸の値，即ち，第 2 項をとると式(11)は次のよう書ける．

$$u_1={}_1u_0a\left(-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right) \tag{14}$$

ここで，${}_1u_0$ は式(9)と(10)で表される複素変位振幅である．従って，伝播する条件に対する無限領域の地動による逸散波は，式(14)と式(9), (10)から求めることができる．

5. 検証

5.1 伝播しない波の場合

ここでは，伝播しない波の条件に当てはまる，地動の振動数が $\omega=20$ の場合，式(5)と式(7), (8)から求められる u_1 に対する検証を行う．**2 章**の例と同じ部材特性を持つ 21 質点のマス-バネ系モデルに両側に伝達境界を設け，真中の質点（質点番号 0）のみを地動加速度 $10\sin20t$ で加振する．そのときの数値解析から求めた各質点の応答振幅を**表-1** に示す．質点番号 0 の応答変位(${}_1u_0$)の実部と虚部を，式(7), (8)から直接求めると，

$$u_R=0.0,\ u_I=-25\times10.0\Big/\sqrt{7.928\times10^{10}}=-0.0008879$$

また，$\eta=\dfrac{4409000-\sqrt{7.928\times10^{10}}}{2\times2200000}=0.938$

表-1 各質点の複素応答変位振幅（数値計算結果）

質点番号		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}_1u_i$	実部	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	虚部	-0.00089	-0.00083	-0.00078	-0.00073	-0.00069	-0.00064	-0.00060	-0.00057	-0.00053	-0.00050	-0.00047

であるから，質点番号 10 の変位振幅は

$$ {}_1u_{10} = -0.0008879 \times 0.938^{10} = -0.0004682 $$

他の質点の振幅も波動解から求めることができる．以上，数値解析との比較から式(7), (8)が妥当であることを確認した．次に，式(5)を用いて逸散波の複素振幅を求めると

$$ u_1 = \frac{-0.0008879i \times 0.938}{1-0.938} = -0.01343i \qquad (15) $$

この複素振幅が正しければ，この値を入射波として**図-3** の 3 つのケース，即ち，1 質点，50 質点，150 質点系モデルの両境界に入力するとその応答は当然等しくなるはずである．実際に 1 質点モデルで計算してみると，

$$ u_\Omega = -(0.01343 + 0.00089 + 0.01343)i = 0.02775i $$

この値は単一質点系モデルの定常応答振幅と等しい．また，式(15)の逸散波の複素振幅を**図-3** の 150 質点系モデルに入力して行った数値計算から求めた応答変位を**図-8** に示す．全質点の応答が一様に単一質点系モデルの定常応答振幅と等しいことが分かる．

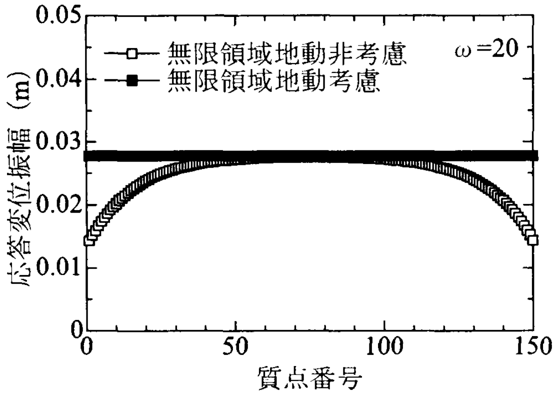

図-8 各質点の応答変位振幅，ω=20

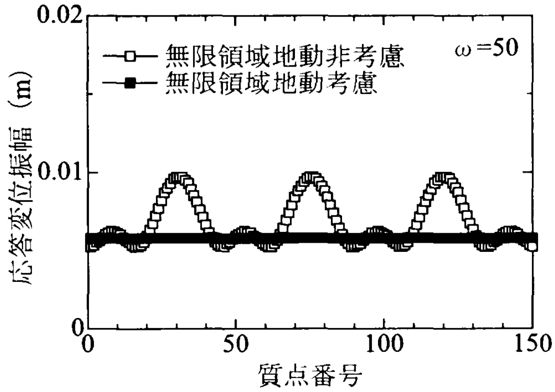

図-9 各質点の応答変位振幅，ω=50

5.2 伝播する波の場合

ここでは，地動の振動数 ω=50 の場合について検討を行う．検討条件は，振動数以外は **5.1 節**と同様である．真中の質点のみを加振する条件での数値解析から求められた各質点の応答振幅を**表-2** に示す．質点番号 0 の応答変位($_1u_0$)の実部と虚部を式(9), (10)から求めると，

$$ u_R = -25 \times 10.0 \big/ \sqrt{3.809 \times 10^{11}} = -0.000405, u_I = 0.0 $$

質点番号 10 の変位振幅を求めてみると，右方向に伝播する場合の固有値および位相角は，

$$ \eta = \frac{4356500 - \sqrt{3.809 \times 10^{11}} \cdot i}{2 \times 2200000} = 0.9901 - 0.1403i $$

$\phi = \cos^{-1}(0.9901/1) = 0.1408$ であり，

$$ \therefore {}_1u_{10} = u_0 \times e^{-i(10\phi)} = -0.00007 + 0.00040i $$

逸散波の複素振幅は式(14)から

$$ u_1 = (-0.000405) \times \{-0.5 + i \cdot 0.5 \times \cot(0.1408/2)\} $$
$$ = 0.000205 - 0.00287i $$

この逸散波の振幅を入力すると 1 質点モデルの応答振幅は

$$ u_\Omega = (0.0002 - 0.00287i) - 0.0004 + (0.0002 - 0.00287i) $$
$$ = 0.0 - 0.00574i $$

であり，**5.1 節**と同様に単一質点系モデルの定常応答振幅と等しいことが分かる．また，同じ逸散波を 150 質点モデルに入力しても**図-9** に示すように単一質点系モデルの定常応答振幅と等しいことが分かる．

表-2 各質点の複素応答変位振幅（数値計算結果）

質点番号		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$_1u_i$	実部	-0.00041	-0.00040	-0.00039	-0.00037	-0.0034	-0.00031	-0.00027	-0.00022	-0.00017	-0.00012	-0.00007
	虚部	0.0	0.00006	0.00011	0.00017	0.00022	0.00026	0.00030	0.00034	0.00037	0.00039	0.00040
	振幅	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041

6. 解析領域が不規則な場合への適用

前述のように，マス-バネ系モデルにおいては一様な構造であれば質点数に関係なく地動による応答は一定になる．従って，一様の全質量が同じ地動によって励振される場合は，エネルギー伝達境界は全くその意味がない．本章では解析領域が不規則である場合，無限境界の影響に関して検討する．その対象として，両側に地動を考慮した伝達境界を設けた 150 質点モデルを考える．無限領域を含んだ全ての質量が 25ton であり，中の 10 質点の質量が 40ton の場合(Case 1)と中の 100 質点の質量が 40ton の場合(Case 2)の 2 ケースに対して数値解析を行った．それ以外の条件は前述の例と同様である．ω=20 の場合と ω=50 の場合の解析結果をそれぞれ**図-10** と**図-11** に示す．実線は 40ton の単一質点系モデルの応答を，破線は 25ton の応答を表している．ω=20 の場合（伝播しない条件）では Case 1, Case 2 ともにその応答は実線と破線の中に存在する．また，その応答は質点数に大きく依存している．即ち，質量 40ton の質点数が 10 個の場合は自由境界で解析すると非常に過大評価されることになる．一方，境界近くの 25ton の部分は過小評価されることになる．ω=50 の場合（伝播する条件）では，Case 1, Case 2 ともに中の質量 40ton の部分が過小評価になり，25ton の部分も過小評価されることになる．

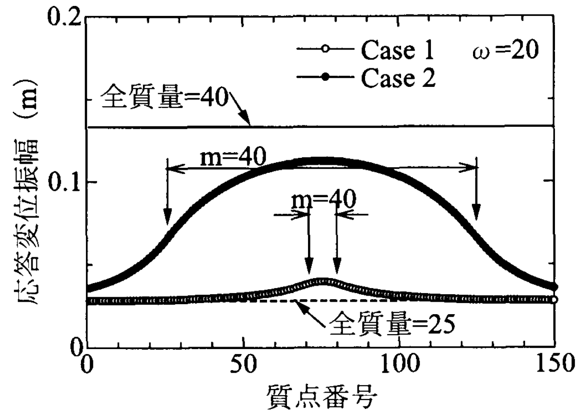

図-10 各質点の応答変位振幅，ω=20

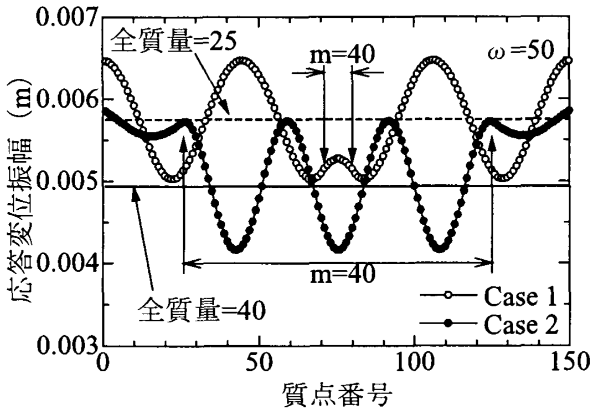

図-11 各質点の応答変位振幅，ω=50

7. 結論

本研究では，無限に続く一様なマス-バネ系モデルに対し地動による逸散波を求め，不規則領域に入射波として入力することによって，無限領域の地動を考慮できることが示された．これは，不規則領域を含んでいる無限構造物の地動による振動解析が可能であることを意味する．また，本研究の定式化に基づく伝達境界を用いて行った例題の解析から，地動の振動数が伝播しない条件の場合は，境界付近の規則領域の応答が過小評価される可能性が，また，不規則領域は質点数が少ないほど過大評価される可能性があることが分かった．地動の振動数が伝播する条件の下では，規則領域の応答のみならず不規則領域の応答も過小評価される可能性があることが分かった．このことは，新幹線高架橋などのコンクリート連続高架橋を耐震設計するときに，解析対象の構造物のみを取り出し，その両側を自由境界として仮定する既存の設計方法が，常に安全側とは限らないことを示している．

参考文献

1) 李相勲，田邉忠顕：連続したマス-バネ系モデルを用いた連続高架橋構造物の伝達境界の定式化，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.24，No.2，pp.1165-1170，2002

2) Lysmer, J. and Wass, G. : Shear Wave In Plane Infinite Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division.ASCE, Vol.98,No.EM1,Proc. Paper 8716, February, 1972, pp.85-105