# 論文 チモシェンコ梁要素を用いた曲げとせん断を受ける RC 梁の材料非 線形解析

越川 武晃<sup>\*1</sup>・上田 正生<sup>\*2</sup>・菊地 優<sup>\*3</sup>

要旨:ファイバーモデルを用いて曲げとせん断を受ける RC 梁に発生する斜めせん断亀裂 を表現する一手法として、チモシェンコ梁要素を用いた RC 梁の材料非線形解析法を提案 した。まず有限要素法への定式化の概要と、垂直応力と横せん断応力による2軸応力状態 を想定したコンクリートの構成則の取扱いについて記述した。更に、既往の実験結果を対 象とした数値計算例を示し、コンクリートに1軸の構成則を用いた従来の解析法との比較 を通して、本解析法による荷重-変位応答、亀裂の発生・分布性状について検証した。 キーワード: RC チモシェンコ梁要素、横せん断応力、2軸応力状態、材料非線形解析

#### 1. はじめに

RC部材におけるせん断挙動は、多くの要因 が互い影響を及ぼし合いながら、複雑な破壊進 展プロセスを呈する現象である。コンクリート 構造解析の分野では、これまでこのせん断挙動 の解析は専ら2次元有限要素法を用いて行われ てきた。2次元有限要素法は、様々な形状のRC 部材に対して適用でき、部材における詳細な挙 動を追跡し得るところにその特徴がある。

一方,梁理論に基づく有限要素法は主として 曲げ部材の変形挙動を対象としたものであるが, このうち曲げに及ぼす横せん断変形の影響を簡 便に取り扱うことが可能な要素に,チモシェン コ梁要素がある。この要素によれば,2次元有 限要素法に比べて遥かに少ない自由度数で,曲 げとせん断を同時に受ける RC 曲げ部材の全体 的な変形挙動を追跡し得る可能性がある。この ような観点から,近年,チモシェンコ梁要素を 用いた RC 梁の材料非線形解析法がいくつか報 告されている<sup>1),2)</sup>。しかしながら,この要素を 用いて時々刻々と変化する RC 梁の応力状態や せん断剛性を的確に評価し,コンクリートの斜 めせん断亀裂までをも表現可能な解析手法とな ると,現時点においては殆ど見当たらないのが 現状のようである。

本研究は、チモシェンコ梁理論に準拠した著 者等の有限要素弾性解析法<sup>3)</sup>を発展・拡張させ、 ファイバーモデルを用いて RC 梁に発生する斜 めせん断亀裂を表現するための一手法として、 コンクリートに垂直応力と横せん断応力による 2 軸応力状態の構成則を適用した RC チモシェン コ梁要素を提案し、曲げとせん断を受ける RC 梁への適用を試みたものである。本論文では更 に、既往の実験結果を対象とした数値計算例を 示し、従来の RC 梁の解析法との比較を通じて、 本解析結果に対して若干の考察を加えた。

# 2. RC チモシェンコ梁の有限要素法への定式化

ここでは RC チモシェンコ梁の有限要素法へ の定式化の概要について記述する。定式化にあ たって設定した基本仮定は次のとおりである。

- (1) 梁には曲げとせん断が作用するものとし、コンクリート断面にはチモシェンコ梁理論に 基づく微小変形理論が適用される。
- (2) 梁を構成するコンクリートは等方性材料であり、また、曲げによる垂直応力σcと横せん 断応力 τ<sub>xz</sub> との2 軸応力下にあるものする。

(3) 梁に直線配筋されている補強材は軸方向力

\*1 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 助手 博士(工学) (正会員)
\*2 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 教授 博士(工学) (正会員)
\*3 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 助教授 博士(工学)

のみを負担する。

(4) 補強材とコンクリートの間には、コンクリート断面からの相対変位で表示される材軸方向の付着すべりが生じ得る。

#### 2.1 設定変位場

チモシェンコ梁理論は、平面保持の仮定に立 脚した最も単純な梁理論に断面丈方向に渡って 一様な横せん断変形の効果を付加したものであ る。本研究では、図ー1に示すように、チモシェ ンコ梁理論で導入されるせん断による回転変位  $\beta$ を曲げによる回転変位とは独立な変位場とし て設定する。即ち、本解析における変位場は、基 準軸上の軸方向変位u、鉛直方向変位w、断面 の平均せん断回転角 $\beta$ 、および全m層の補強材 のすべり変位 $s_1, ..., s_i, ..., s_m$ である。

## 2.2 歪 (変位) 増分と応力増分

図-1に、解析のために設定した RC チモシェ ンコ梁の断面の概要を示す。梁の断面は、任意 の幅 $b_i$ と丈 $t_i$ を有する全n層のコンクリート層 と直線配筋された全m層の補強材層で構成され, コンクリートと補強材の間には付着境界が存在 する。本研究では、各コンクリート層の歪・応力 状態を垂直成分のみならず横せん断成分をも用 いて判定するが、梁理論においてはこの横せん 断成分は先に設定した変位場で表示されるもの ではない。横せん断成分については、まず横せ ん断応力が計算の結果得られた垂直応力から材 軸方向の応力の釣合いを用いて算定され、次に 横せん断歪がせん断剛性を介して表示されるこ とになる<sup>3)</sup>。従って、先に設定した変位場を用 いて直接表示できる歪(変位)増分は、曲げに よる垂直成分と付着すべりに関するものである。

まず垂直成分については、チモシェンコ梁理 論に準拠し、更に補強材には付着すべりの影響 を考慮すると、任意のコンクリート層iの垂直歪 増分  $\Delta \epsilon_{c_i}$ 、および補強材層iの垂直歪増分  $\Delta \epsilon_{s_i}$ はそれぞれ次のように表される。

$$\Delta \varepsilon_{c_i} = \frac{d\Delta u}{dx} - z_i \left( \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} - \frac{d\Delta \beta}{dx} \right) \tag{1}$$

$$\Delta \varepsilon_{s_i} = \frac{d\Delta u}{dx} - z_{s_i} \left( \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} - \frac{d\Delta \beta}{dx} \right) + \frac{d\Delta s_i}{dx} \quad (2)$$



但し、*z<sub>i</sub>*: コンクリート層 *i*の *x* 軸からの
 鉛直距離、*z<sub>si</sub>*: 補強材層 *i*の *x* 軸からの鉛
 直距離

従って、コンクリート層iの応力増分 $\Delta \sigma_{c_i}$ 、および補強材層iの応力増分 $\Delta \sigma_{s_i}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$\Delta \sigma_{c_i} = E_{c_i} \Delta \varepsilon_{c_i} \tag{3}$$

$$\Delta \sigma_{s_i} = E_{s_i} \Delta \varepsilon_{s_i} \tag{4}$$

但し、 $E_{c_i}$ : コンクリート層 iの接線剛性,

*E*<sub>si</sub>:補強材層 *i*の接線剛性

また、補強材層 i の付着界面に生じる付着応 力増分  $\Delta \tau_{b_i}$  とすべり変位増分  $\Delta s_i$  の関係は、次 式で表示される。

$$\Delta \tau_{b_i} = K_{b_i} \Delta s_i \tag{5}$$

但し, K<sub>bi</sub>:補強材層 i の接線付着係数

# 2.3 全ポテンシャルエネルギー汎関数

変位法による有限要素法への定式化を行うに あたって、本研究では、全ポテンシャルエネル ギーの原理を用いる。材料非線形領域にある RC チモシェンコ梁の全ポテンシャルエネルギー汎 関数 ΔΠ は増分型で表示され、次のようになる。

 $\Delta \Pi = (\Delta U_{cn} + \Delta U_{st} + \Delta U_{bs} + \Delta_s U) - \Delta V$  (6) ここに、右辺の括弧内は内部エネルギー増分、  $\Delta V$ は外力による負荷ポテンシャルエネルギー 増分である。

RC チモシェンコ梁の剛性に寄与する内部エ ネルギー増分のうち, ΔU<sub>cn</sub>, ΔU<sub>st</sub>, および ΔU<sub>bs</sub> は, それぞれ曲げによるコンクリートと補強材 の歪エネルギー増分,および付着すべりのポテ ンシャルエネルギー増分である。前節の歪(変 位)増分と応力増分の関係から,これらは次の ように表示される。

$$\Delta U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{c_i} \Delta \varepsilon_{c_i}^2 dx$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{s_i} E_{c_i} \Delta \varepsilon_{c_i}^2 dx \tag{7}$$

$$\Delta U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{s_i} E_{s_i} \Delta \varepsilon_{s_i}^2 dx \tag{8}$$

$$\Delta U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{b_i} K_{b_i} \Delta s_i^2 dx \tag{9}$$

但し,*L*:要素長,*A<sub>si</sub>*:補強材層*i*の断面 積,*A<sub>bi</sub>*:補強材層*i*の単位長さ当りの付着 面積

また,残りの Δ<sub>s</sub>U は梁の横せん断歪エネル ギー増分である。先に記述したように,横せん 断歪は変位場で表示できるものではないために, チモシェンコ梁理論ではこれは平均せん断回転 角βと関係付けられる。本研究では材料の非線 形性によって時々刻々と変化する梁のせん弾剛 性を的確に算定し解析に取り入れるために,著 者等が既往の弾性解析法<sup>3)</sup>において提示した横 せん断歪エネルギーを以下のように増分表示し て用いることにする。

$$\Delta_{s}U = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \xi \Delta \beta^{2} dx$$
(10)  
ここに、 *ξ* は次のような定数である。

$$\xi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i} t_{i} \Delta \tau_{xz_{i}}\right)^{2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i} t_{i}}{G_{c_{i}}} \Delta \tau_{xz_{i}}^{2} + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{A_{s_{i}}}{G_{s_{i}}} - \frac{A_{s_{i}}}{G_{c_{i}}}\right) \Delta \tau_{xz_{i}}^{2}} \quad (11)$$

但し、 $G_{c_i}$ : コンクリート層 iの接線せん断

剛性,  $G_{s_i}$ :補強材層 iの接線せん断剛性 上式を用いる場合には、当該解析ステップにお ける各層の横せん断応力増分  $\Delta \tau_{xz_i}$ の値が必要 であるが、定数  $\xi$  の値は応力の計算結果を左右 するものではない。このため実際の計算では、 各解析ステップにおいてまず  $\xi$  を適当な値に設 定して一連の計算を行い、 $\Delta \tau_{xz_i}$  を評価した後 に改めて本計算を実行することになる。

#### 2.4 有限要素方程式

RC チモシェンコ粱の有限要素方程式は,標準的な変分手法に従うと,前節に示した増分型 の全ポテンシャルエネルギー汎関数 ΔΠ から誘 導することができる。この手続を行うにあたっ て、本研究では、両端および中央に節点を設けた RC チモシェンコ梁要素を設定し、要素内での各変位増分  $\Delta u$ 、 $\Delta w$ 、 $\Delta \beta$ 、 $\Delta s_i$ (但し、 $i = 1 \sim m$ )の分布を、それぞれ 3 次、5 次、3 次、3 次の関数で表現した。

#### 3. RC チモシェンコ梁の材料モデル

本 RC チモシェンコ梁要素に設定した非線形 材料モデルはコンクリートと補強材の材料特性, および付着応力-すべり関係である。

コンクリートについては、斜めせん断亀裂を 表現し得るように、垂直応力 $\sigma_c$ と横せん断応力  $\tau_{xz}$ による2軸応力状態の構成則を設定し、破壊 の判定を行うことにする。先にも記述したよう に、判定のために必要なコンクリート層iの横 せん断応力 $\tau_{xz_i}$ は材軸方向の応力の釣合い関係 を用いて次式で算定される。

$$\tau_{xz_i} = \frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ b_j t_j \frac{d\sigma_{c_j}}{dx} + A_{s_j} \left( \frac{d\sigma_{s_j}}{dx} - \frac{d\sigma_{c_j}}{dx} \right) \right\} + \frac{1}{2} t_i \frac{d\sigma_{c_i}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{A_{s_i}}{b_i} \left( \frac{d\sigma_{s_i}}{dx} - \frac{d\sigma_{c_i}}{dx} \right)$$
(12)

コンクリートを等方性材料として取り扱った 本研究では、構成則として各コンクリート層ご とに唯一の応力-歪関係を設定した。まず、破 壊に至るまでのコンクリートには、図-2に示 すように、以下に掲げる Kupfer 等<sup>4)</sup>の提案式 を用いた。

$$\gamma_{co} = \frac{\tau_{co}}{2G_{co}} \frac{1}{1 - a \left(\tau_{co} / \sigma_{cc}\right)^m}$$
(13)

但し、 $\gamma_{co}$ :八面体せん断歪、 $\tau_{co}$ :八面体せん断応力、 $G_{co}$ :初期せん断剛性、 $\sigma_{cc}$ :1軸 圧縮強度、a, m:定数

ここに、八面体せん断応力 $\tau_{co}$ は、梁の場合、次 式を用いて算定される。

$$\tau_{co} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_{xz}} \tag{14}$$

また,この時のコンクリートの接線剛性  $E_c$ は, 接線せん断剛性  $G_c$ および接線体積弾性係数  $K_c$ との関係から得られ,次のようになる。

$$G_{c} = \frac{G_{co} \left\{1 - a \left(\tau_{co} / \sigma_{cc}\right)^{m}\right\}^{2}}{1 + a(m-1) \left(\tau_{co} / \sigma_{cc}\right)^{m}}$$
(15)

$$K_c = \frac{K_{co}G_c}{G_{co}e^{-(c\gamma_{co})^p}\left\{1 - p(c\gamma_{co})^p\right\}}$$
(16)

$$E_c = \frac{9K_cG_c}{3K_c + G_c} \tag{17}$$

但し、 $K_{co}$ :初期体積弾性係数、c, p:定数 コンクリートの破壊の判定については、主応 力表示された Kupfer 等<sup>4)</sup>の破壊条件を用いた。 梁理論におけるコンクリートの主応力 $\sigma_{c1}, \sigma_{c2}$ は、それぞれ次のように表示される。

$$\sigma_{c1} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_{xz}^2} \right\}$$
(18)

$$\sigma_{c2} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_c - \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_{xz}^2} \right\}$$
(19)

従って、上式から明らかなように、本解析では コンクリートの破壊条件として、以下に示す引 張-圧縮領域のみを取り扱うことになる。

$$\sigma_{c1} = \left(1 - 0.8 \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{cc}}\right) \sigma_{ct}$$
(20)  
但し,  $\sigma_{ct} : 1$ 軸引張強度

破壊後のコンクリートには簡単のため, 亀裂 の方向に応じた異方性は考慮せず, 破壊時の垂 直成分のみに依存した一軸状態の応力-歪関係 を設定した。図-3,図-4にそれぞれ圧縮側 および引張側の応力-歪関係を示す。これらは いづれも破壊エネルギーを導入した歪軟化経路 である。また, 亀裂面におけるせん断伝達特性 は, 破壊後のコンクリートのせん断剛性 *G*<sub>cr</sub> を 簡易的に初期せん断剛性 *G*<sub>co</sub> の定数倍に低減さ せて表現した。

尚,本解析で設定した補強材の材料特性およ び付着応力-すべり関係は,著者等の既報告<sup>5)</sup> と同様である。

## 4. 数値計算例

既往の実験結果に対する本解析法による数値 計算例を掲げ,若干の考察を行うことにする。 対象とした試験体は池田等<sup>6)</sup>の2体のRC単純 支持梁である。図-5に,各RC梁試験体(試 験体名:RC-1,RC-3)の概要と材料特性を示す。 矩形断面を有するこの2体の試験体は,それぞ れスパンが梁丈の5.6倍および3.6倍と,横せん 断変形の影響を無視し得ない比較的短スパンの 部材である。実験時におけるコンクリートの圧 縮強度は25.9 N/mm<sup>2</sup>,引張強度は2.64 N/mm<sup>2</sup>





であり,鉄筋の降伏強度は 347.0  $N/mm^2$ ,弾性 係数は 195.1  $kN/mm^2$  である。解析を行うため に必要なコンクリートの材料特性値  $G_{co}$ ,  $K_{co}$  と 定数 a, m, c, p については, コンクリートの圧 縮強度に合わせて, Kupfer 等によって示された 値を線形補間して設定した。また付着特性には, CEB-FIP MODEL CODE 1990<sup>7)</sup> に準拠した値 を仮定した。

解析は、対称性を考慮して試験体の半スパン までを対象とし、試験体 RC-1は16 要素、試験 体 RC-3は11 要素で表現した。断面はいづれの 試験体においても26 層分割とした。解析で採用 した増分手法は、荷重増分法である。ここでは また、本解析結果との比較・検証を行うことを 目的に、本解析のほか、(1) Case-1:コンクリー トの1軸応力-歪関係<sup>5)</sup>のみを用いた RC チモ シェンコ梁の材料非線形解析、(2) Case-2:横せ ん断変形・横せん断応力の影響を考慮しない通 常の微小変形理論による材料非線形解析(必然 的に1軸応力-歪関係<sup>5)</sup>を採用している)、の2 種の別解析も行った。別解析における要素・断 面分割数は本解析と同様である。

まず, 亀裂が発生したコンクリートに設定され たせん断剛性  $G_{cr}$ の値が本解析結果に及ぼす影 響について見てみることにする。図ー6は,  $G_{cr}$ を初期せん断剛性  $G_{co}$ の 0.1, 0.01, 0.001 倍と 変化させた3種類の本解析値を, 試験体 RC-1の 荷重-変位曲線で示したものである。図から明 らかなように,  $G_{cr}$ の値は初亀裂が発生した後 の RC 梁の剛性評価に深く関係しており, 0.01 倍とした解析値が最も良く実験値と対応してい ることが分かる。図示してはいないが, 試験体 RC-3においても同様の結果が得られた。このこ とから以降の解析結果の検証は,  $G_{cr} = 0.01G_{co}$ とした解析結果について行うことにする。

図-7および図-8は、それぞれ試験体RC-1 およびRC-3のスパン中央点における荷重-変 位曲線を、実験値と本解析値、および2種の別解 析値で比較したものである。図の結果より、こ れらの解析値は、いづれも初期剛性と最大耐力 については、実験値と比較的良く対応している ことが分かる。しかしながら、初亀裂が発生し た後の、これらの試験体の剛性が低下した領域 に関しては、個々に幾分異なった解析結果が示 されており、特に横せん断変形の影響を考慮し



ていない Case-2の解析値は実験値と全く対応し ていない。一方、チモシェンコ梁要素による本 解析と Case-1の解析では、剛性低下の度合がと もに Case-2のものよりも大きく、実験値により 近づいた荷重-変位曲線が得られている。また、 この両解析曲線を見比べてみると明らかなよう に、本解析値はこれらの試験体の初期剛性から 最大耐力に至るまでの全体的な変形挙動を、こ の3種の解析値の中では最も良好に追跡し得て いるのに対し、Case-1の方は、特によりスパン が短い試験体 RC-3 において実験値との誤差が 顕著に現れており、この種の部材の解析には、2



図 9 所们にのいる电殺の進展状況 ( $\mathbf{R}$ C-1)

軸応力状態のコンクリートの構成則を用いることが必要であることが分かる。

図-9および図-10は、それぞれ本解析にお ける各試験体のコンクリートの亀裂の進展状況 を、Case-1の解析値と対比して示したものであ る。いづれの試験体においても、本解析では、梁 のせん断スパン内において、コンクリートの亀 裂が広範にわたって発生し最大耐力に至ってい るが、Case-1の解析値では、梁に作用する曲げ モーメント曲線の形状に対応した亀裂の分布性 状を示しており、ここに本解析で垂直応力と横 せん断応力との2軸応力下における亀裂の発生 を考慮した効果を明確に読み取ることができる。

#### 5. まとめ

本論文では、コンクリートに垂直応力と横せ ん断応力による2軸応力状態の構成則を適用し た RC チモシェンコ梁要素を提案し、斜めせん 断亀裂の発生を取り扱うことが可能な RC 梁の 材料非線形解析法について論じた。また、既往 の実験結果を対象とした数値計算例を掲げ、次 のような知見を得た。

(1)本解析法では、亀裂発生後のコンクリート のせん断剛性を初期せん断剛性の0.01倍程度に 設定すると、比較的スパン-梁丈比が小さく横 せん断変形の影響を無視し得ない RC 単純支持



図-10 解析における亀裂の進展状況 (RC-3)

梁試験体の荷重-変形応答を,初期剛性から初 亀裂後の剛性低下領域を経て最大耐力に至るま で,比較的良好に表現することが可能である。 (2)垂直応力と横せん断応力の2軸応力状態に おける亀裂の発生を考慮した本解析法では,コ ンクリートの1軸の構成則を用いた解析法と比 較して,RC梁のせん断スパン内において亀裂 が広範にわたって発生する。

## 参考文献

- 1) 稲田祐二,川端康洋,近藤一夫,玉井宏章,角徹 三:ハイブリット型応力法による鉄筋コンクリー ト造骨組の弾塑性崩壊解析,日本建築学会構造系 論文集,No.508, pp.55-62, 1998.6
- 丸尾宗朋,田辺忠顕:マイクロプレーンモデルを用いたRCティモシェンコはりの解析、コンクリート工学年次論文報告集,Vol.21,No.3,pp.421-426,1999.6
- 3) 越川武晃,上田正生,内山武司,和田俊良:補強 材の付着すべりを考慮した任意断面を有する RC チモシェンコ梁の弾性解析,日本建築学会構造系 論文集,No.559, pp.107-112, 2002.9
- 4) Kupfer, H. B. and Gerstle, K. H. : Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ASCE, Vol.99, No.EM4, pp.853-866, Aug. 1973
- 5) 越川武晃, 齊藤隆典, 上田正生, 菊地優: 緊張鋼 材の付着すべりを考慮した圧着型 PCaPC 梁一柱 部材の履歴挙動解析, コンクリート工学年次論文 集, Vol.26, No.2, pp.37-42, 2004.7
- 6)池田尚治,南雲広幸: RC および PC 構造物への 有限要素法の合理的適用方法に関する研究,土木 学会論文集,No.414/V-12, pp.137-143, 1990.2
- Comite Euro-International du Beton : CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, CEB, 1990