

論文

[2106] 軸力、曲げを受ける鉄筋コンクリート断面に対する断面力表示構成則の開発

山中崇雅*¹ 中村光*² 檜貝勇*³

1. はじめに

一般にRC構造のように強い非線形性を示す構造物の有限要素解析を行う場合、変形の進行と共に生じる各段階での断面力を正確に評価することが重要になる。そのため、通常RC曲げ部材を対象とした有限要素解析では、部材の断面を有限個の要素に分割し、各要素について非線形な材料特性を組み入れた方法が用いられている。しかしこの場合、各分割要素に対して、応力の記憶や降伏判定を行う必要が生じるため、計算処理は非常に複雑なものとなる。したがって、もし断面の要素分割を行わずに、直接、断面力を求められる構成式を用いることができれば、計算処理を簡易にすることができ、有限要素解析がより一層実用的なものになると考えられる。

そこで本論文では、軸力・曲げを受けるRC矩形断面に対する降伏関数を算定し、塑性理論を適用することで、断面に対して唯一求められる軸ひずみおよび曲率の直接関数として断面力を求めることのできる断面力表示構成則[1]の開発を行った。

2. 矩形コンクリート断面の降伏関数

RC断面に対し、断面力で記述された降伏関数を求めることは、コンクリート、鉄筋に対する幾何学的条件および、材料特性など非常に多くのパラメーターを考慮する必要が生じるため、簡便で実用的なものとならない。そこで本論文では、降伏関数をコンクリート断面に対してのみ定式化することとし、鉄筋に対しては任意位置での鉄筋要素の断面力を各要素ごと個別に計算して加えることにした。

2.1 コンクリートの応力-ひずみ関係

コンクリートは図-1に示すように、圧縮応力下においては圧縮強度 f_c' まで2次放物線で増加し、その後一定の応力となるモデルを、また引張応力下では、引張力を持たないモデルを仮定した。繰返し応力下の挙動は、除荷応力は初期剛性 E_c で $\sigma=0$ まで変化してその後の応力は0となるように仮定した。このようなモデルを用いたのは、実用的な使用範囲において定式化を簡潔に行うためである。

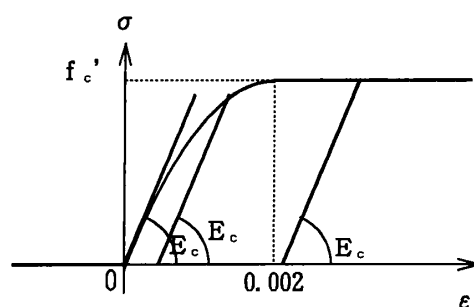


図-1 コンクリートの応力-ひずみ関係

2.2 コンクリート断面の塑性エネルギー W_p の算定方法

軸力 N 、曲げモーメント M に対するコンクリート矩形断面の塑性エネルギー W_p の算定は、コンクリート断面を有限要素に分割したモデルにおいて、所定の断面力に対する載荷・除荷のサイクルを行うことにより求めた。すなわち載荷・除荷の1サイクルにおいて描かれる、各分割要素の応力

*¹ 山梨大学大学院 土木環境工学専攻 (正会員)*² 山梨大学講師 工学部土木環境工学科 工博 (正会員)*³ 山梨大学教授 工学部土木環境工学科 工博 (正会員)

—ひずみ曲線を経路積分することで各要素に対する塑性エネルギーを算定し（図-2の斜線部分）、全分割要素の和をとることで所定の断面力に対するコンクリート断面の塑性エネルギーを算定した。

2.3 全塑性状態に対する降伏関数

全塑性状態は曲率が無限大に対応し、この時の断面の応力分布は、圧縮強度が矩形分布するものとして表す事が出来る。したがって、高さ h 、幅 B のコンクリート矩形断面に対し、全塑性状態の降伏関数は、式(1)に示す2次式で表すことができる。

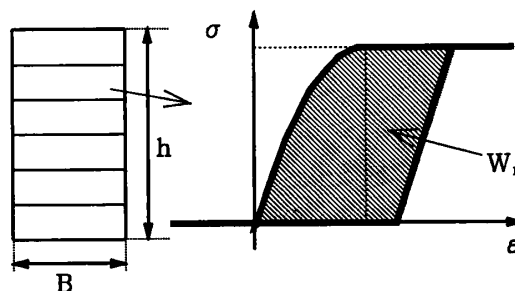


図-2 塑性エネルギー

$$M = -\frac{M_{MAX}}{N_{MAX}^2} (N - N_{MAX})^2 + M_{MAX} \quad (1)$$

ここで、 $M_{MAX} = \frac{1}{2} B f_c' (h/2)^2$ 、 N_{MAX} は M_{MAX} に対応する軸力であり、 $N_{MAX} = B f_c' (h/2)$ となる。

2.4 後続する降伏関数

後続する降伏関数が、2.2節の方法に従い算出した軸力、モーメント、塑性エネルギー関係より得られる等塑性エネルギー曲線と一致すると仮定して、コンクリート矩形断面に対する後続する降伏関数の定式化を試みた。その結果、次式で示す3次式で近似すれば、概ね解析結果を補間できることが分かった。

$$f(N, M, W_p) = \alpha (N - N_T)^2 + \beta \{ N_T (N - N_T)^2 + (N - N_T)^3 \} + M_T - M \quad (2)$$

式中で、 M_T は後続する降伏関数のモーメントの最大値であり、塑性エネルギーの関数として次式で表せるとした。

$$M_T = \left[1 - \exp \left\{ b \left(\frac{W_p}{h B f_c'} \right)^a \right\} \right] \quad (3)$$

式(3)において a 、 b は定数であり、非線形最小自乗法により、 $a = 4.2$ 、 $b = 83.5$ とした。また、 N_T はモーメント M_T に対応する軸力であり、次式で表せる。

$$N_T = \frac{(-2K_1 + \sqrt{4K_1^2 + 6M_T K_2})}{K_2} \quad (4)$$

ここで、 $\alpha = \frac{-M_T}{N_T^2}$ 、 $\beta = \frac{K_1 + \alpha N_T}{N_T}$ 、 $K_1 = 2 \frac{M_{MAX}}{N_{MAX}}$ 、 $K_2 = -2 \frac{M_{MAX}}{N_{MAX}^2}$ である。

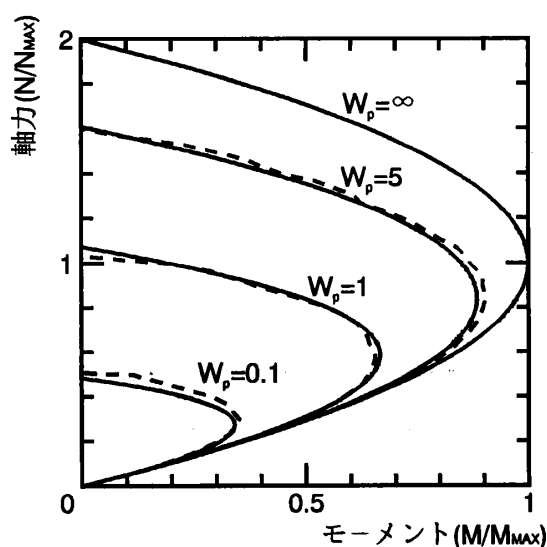


図-3 降伏関数

ただし上式を求める際の前提条件として①各降伏関数が交わらない。②凸性の条件を常に満足する。③全塑性状態 ($W_p = \infty$) で前述の全塑性状態の降伏関数に一致する。これらの条件を満足させるために、 $(N, M) = (0, 0)$ における後続する降伏関数の傾きおよび曲率が、常に一致すると仮定している。すなわち、以下の式が $(N, M) = (0, 0)$ の点において成り立つものとしている。

$$\frac{\partial f}{\partial N} = 2 \frac{M_{MAX}}{N_{MAX}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial N^2} = -2 \frac{M_{MAX}}{N_{MAX}^2} \quad (5)$$

図-3 に2-2節の解析で得られた結果および今回定式化した後続の降伏関数を示す。図中の点線は2-2節の解析より得られた結果であり、実線が提案式である。塑性エネルギーのレベル、また軸力とモーメントの大きさによらず両者はよく一致しており、提案式の妥当性が示されていると考えられる。また初期降伏関数に関してはコンクリートは初期応力状態より非線形な挙動を示すため、初期降伏は無載荷状態と仮定した。

3. 断面力表示構成則の定式化

3. 1 弾性時の増分形の断面力表示構成則

今、図-4 の点線で示すような中心での軸ひずみ ε_0 と曲率 ϕ_0 で釣合状態にある断面を考える。この時、軸ひずみ、曲率がそれぞれ $\varepsilon_0 + d\varepsilon_0$, $\phi_0 + d\phi_0$ (図-4 の実線) に変化したとすれば、圧縮側の断面内のひずみ分布は、以下ようになる。

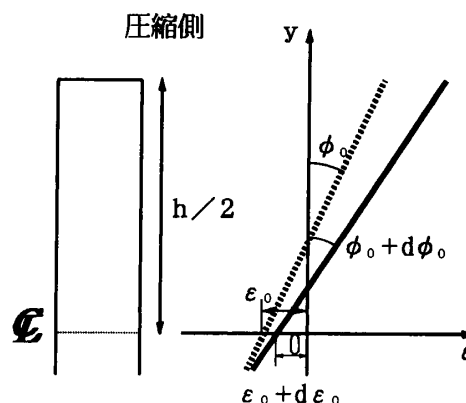


図-4 断面のひずみ状態

$$\frac{h}{2} > y > \frac{\varepsilon_0}{\phi_0} \quad \text{のとき}$$

$$d\varepsilon = y d\phi_0 + d\varepsilon_0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\phi_0} > y > \frac{\varepsilon_0 + d\varepsilon_0}{\phi_0 + d\phi_0} \quad \text{のとき}$$

$$d\varepsilon = (\varepsilon_0 + d\varepsilon_0) + y (\phi_0 + d\phi_0) \quad (6.2)$$

このとき $\varepsilon_0 \gg d\varepsilon_0$, $\phi_0 \gg d\phi_0$ とすれば、 $\frac{\varepsilon_0 + d\varepsilon_0}{\phi_0 + d\phi_0} \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\phi_0}$ となり、結局、弾性時の断面力表示構成則は式 (6.1) の軸ひずみ増分を積分することで次式のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA & EG \\ EG & EI \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_0 \\ d\phi_0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $EA = BE_c \left(\frac{h}{2} - K \right)$, $EG = \frac{1}{2} BE_c \left(\frac{h^2}{2^2} - K^2 \right)$, $EI = \frac{1}{3} BE_c \left(\frac{h^3}{2^3} - K^3 \right)$ であり、

また、 K は中立軸を示すもので $K = \frac{\varepsilon_0}{\phi_0}$ ($-\frac{h}{2} \leq K \leq \frac{h}{2}$) と定義される。

3. 2 弾塑性時の断面力表示構成則

ここまで求めた降伏関数および弾性時の断面力表示構成則を用いて、弾塑性状態の断面力表

示構成則を定式化する。

軸ひずみ増分 $d\varepsilon_o$ と曲率増分 $d\phi_o$ が、弾性成分と塑性成分に分割できると仮定する。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_o &= d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \\ d\phi_o &= d\phi_e + d\phi_p \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、eは弾性成分、pは塑性成分を示す。

軸力増分 dN および曲げモーメント増分 dM は、弾性成分に前節で求めた弾性時の断面力表示構成則を適応させることにより、式(9)のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA & EG \\ EG & EI \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_o - d\varepsilon_p \\ d\phi_o - d\phi_p \end{Bmatrix} \quad (9)$$

降伏関数 f は、 N 、 M 、 W_p の関数であり、適合条件により、式(10)が得られる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial N} dN + \frac{\partial f}{\partial M} dM + \frac{\partial f}{\partial W_p} dW_p = 0 \quad (10)$$

ここで、 dW_p および W_p は次式で定義する。

$$\begin{aligned} dW_p &= N d\varepsilon_p + M d\phi_p \\ W_p &= \int dW_p \end{aligned} \quad (11)$$

関連流れ則を仮定すれば、塑性軸ひずみ増分 $d\varepsilon_p$ 、塑性曲率増分 $d\phi_p$ は次式で与えられる。

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial N}, \quad d\phi_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial M} \quad (12)$$

ここで $d\lambda$ はスカラー量である。以上を用いることで最終的に、弾塑性時の断面力表示構成則は、次式のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{21} \\ D_{12} & D_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_o \\ d\phi_o \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$D_{11} = EA - \frac{\left(EA \frac{\partial f}{\partial N} + EG \frac{\partial f}{\partial M} \right) \left(EA \frac{\partial f}{\partial N} + EG \frac{\partial f}{\partial M} \right)}{\lambda'}$$

$$D_{12} = D_{21} = EG - \frac{\left(EA \frac{\partial f}{\partial N} + EG \frac{\partial f}{\partial M} \right) \left(EG \frac{\partial f}{\partial N} + EI \frac{\partial f}{\partial M} \right)}{\lambda'}$$

$$D_{22} = EI - \frac{\left(EG \frac{\partial f}{\partial N} + EI \frac{\partial f}{\partial M} \right) \left(EG \frac{\partial f}{\partial N} + EI \frac{\partial f}{\partial M} \right)}{\lambda'}$$

ここで、

$$\lambda' = \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)^2 EA + \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right)^2 EI + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right) EG - \left(\frac{\partial f}{\partial W_p} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right) N - \left(\frac{\partial f}{\partial W_p} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right) M$$

4. 断面力表示構成則の適用性の検証

鉄筋の応力-ひずみ曲線は降伏強度までは初期剛性で増加して、降伏強度以後一定の強度を持つと仮定した。繰返しに関しては荷重除荷時より、初期剛性で変化して降伏強度に達するとした。また今回提案した断面力表示構成則の適用性に関してはRC断面を有限個に分割して得られた結果を正解値とし、その値と比較することで検証した。

4. 1 軸力の影響

図-5に有効高さ26cmで幅20cmの複鉄筋矩形コンクリート断面で、D16鉄筋が4本（鉄筋比0.76%）、コンクリートの圧縮強度が300(kgf/cm²)、鉄筋の降伏強度が3000(kgf/cm²)であるモデルを仮定した。このモデルにおいて、圧縮応力度を $\sigma = 0, 40, 80, 120$ (kgf/cm²)の値で変化させた時のM- ϕ 曲線を示したものが図-6である。図中の実線が今回開発した断面力表示構成則で求めた解析結果であり、点線が断面を有限個に分割（分割数50）して解析した時の結果である。図-6から、軸力が大きくなるにつれて両者の結果には若干差異がみられるが、鉄筋の降伏前・降伏後ともに断面力表示構成則から得られた結果は、従来用いられている断面分割法とほぼ同程度の精度をもって、軸力の影響を表すことが可能であることが分かる。

4. 2 鉄筋比の影響

図-5に示す複鉄筋コンクリート断面に対して鉄筋比を0.5%, 1.5%, 3.0%と変化させた解析を行った。材料定数としては4.1節と同様とし、また、軸圧縮応力度は、 $\sigma = 0$ (kgf/cm²)を仮定した。図-7に解析より得られたM- ϕ 関係を示す。図中の実線が断面力表示構成則、点線が断面分割法による結果を示す。この図から、断面力表示構成則が鉄筋量の変化に対しても有効であることが分かる。

また、本論文に示していないが、複鉄筋コンクリート断面のみでなく、任意に鉄筋が配置されたコンクリート断面に対しても本方法は適用可能であることを確認している。

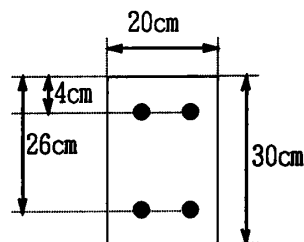


図-5 RCコンクリート断面図

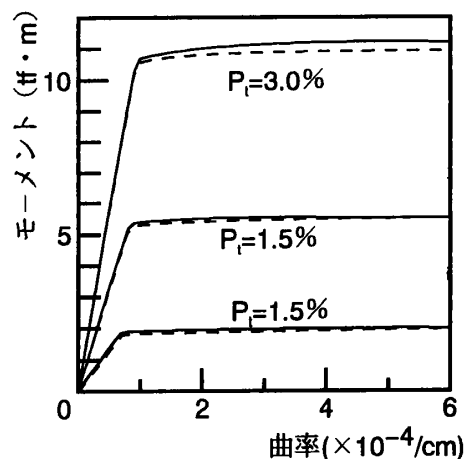


図-7 鉄筋比の影響

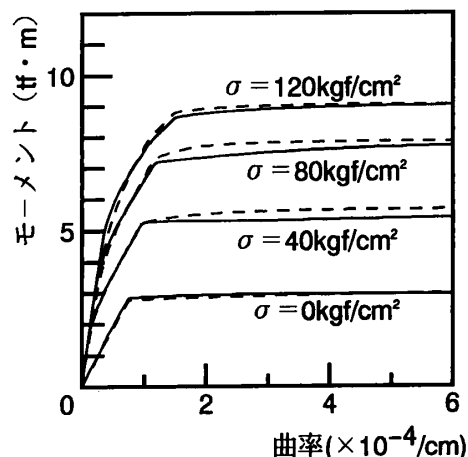


図-6 軸力の影響

4. 3 荷重履歴の影響

図-8は、図-5に示す断面で材料定数は軸力の影響と同様にし、圧縮応力度 $\sigma = 0(\text{kgf/cm}^2)$ および $\sigma = 50(\text{kgf/cm}^2)$ において、一方向繰返し荷重に対する断面力表示構成則と断面分割法から得られる結果を示したものである。図-8の実線が断面力表示構成則、点線が断面分割法による解析結果を示す。軸力、鉄筋比の影響と同様に、繰返し荷重に対しても断面力表示構成則が十分な精度を持っていることがわかる。また、繰返し載荷を行うときには断面力表示構成則では、断面の性状として塑性エネルギー(W_p)のみを記憶しておくだけでよく、非常に簡単に繰返し載荷に対する挙動を再現することができる。

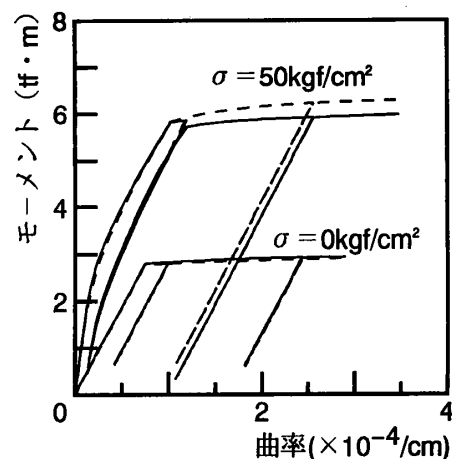


図-8 荷重履歴の影響

4. 4 増分量の大きさの影響

ひずみの増分量が比較的大きい場合は、断面力表示構成則の精度は弾性材料の非線形性によって影響を受けるため、本解析では、降伏曲線への応力の補正を常に行っている[2]。そこで、ひずみの増分量に対して断面力表示構成則の精度が、どの程度影響を受けるかについて検討した。図-9は曲率増分($d\phi_0$)を $1.0 \times 10^{-5}(/cm)$ および $2.0 \times 10^{-6}(/cm)$ にした時の各々のひずみ増分量に対する解析結果($\sigma = 50(\text{kgf/cm}^2)$, 鉄筋比 0.76%)を示したものである。図中の・印は曲率を $1.0 \times 10^{-5}(/cm)$ で増分させたときの結果であり、実線は $2.0 \times 10^{-6}(/cm)$ で増分させたときの結果を示している。

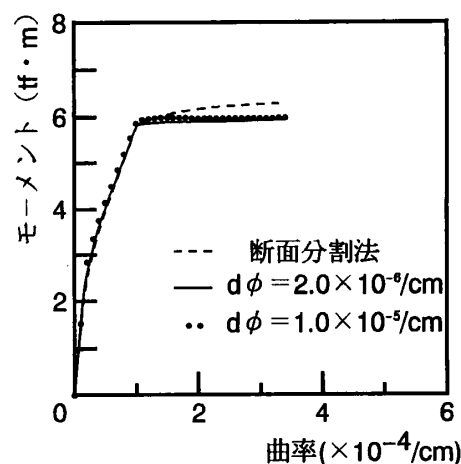


図-9 増分量の大きさによる影響

なお点線は断面分割法で求めた結果である。曲率増分の違い

による解析値の差はほとんどみられず、今回仮定した程度のひずみ増分量に対しては、降伏曲線への応力の補正を行うことで、解析値の精度は保証されと考えられる。

5. 結 論

(1) 軸力・曲げを受けるコンクリート矩形断面において、断面に対して唯一定義できる軸ひずみ増分および曲率増分から、直接、断面力を評価できる断面力表示構成則を開発した。

(2) 開発した断面力表示構成則は、任意の矩形RC断面に対し適用可能である。

(3) 繰返し載荷などの荷重履歴を受ける場合、断面力表示構成則によれば、塑性ひずみエネルギーを記憶するのみでよく、計算処理を簡便にすることができる。

今後の課題としては、正負繰返し載荷および矩形断面以外の任意断面形状でも適用できるように、この断面力表示構成則を拡張していくことを考えている。

参考文献

- [1] 宇佐美 勉 柴田輝明：断面力表示構成則を用いた鋼骨組構造物の弾塑性有限変位解析，土木学会論文集，第416号/I-13，P. P339～348，1990，4
- [2] W.F.Chen：“PLASTICITY IN REINFORCED CONCRETE”，McGraw-Hill Book Company，1982