

# 論文 ひび割れた部材を有する骨組構造系の長期変形解析法に関する提案

廣河 和男\*1・野村貞広\*2・鳥取誠一\*3・佐藤良一\*4

**要旨：** 任意骨組構造系を対象として、ひび割れが発生した後のクリープ・乾燥収縮の影響解析に関して A. Ghali らの解析法に立脚し、その問題点と適用範囲を明確にし、ひび割れ発生および、断面の非ひび割れ域の変化を考慮した解析ができるように改良して解析システムを開発した。解析結果の検証は、2 径間連続はりモデルで実施された載荷実験と照合し、良好に一致することを確認した。

**キーワード：** クリープ, ひび割れ, 引張硬化, 骨組構造解析

## 1. はじめに

鉄筋コンクリート構造や PRC 構造は、ひび割れ発生を容認する構造形式である。特に、建造物の大型化や複雑化が進行している昨今、これらの構造形式では、建造物の強度を確保すると共に、過剰なひび割れの発生を抑制するなど、十分な耐久性を確保することが大きな課題である。ひび割れたコンクリート骨組構造の長期変形解析法（以下「ひび割れクリープ解析」）は、部材の範囲での解析や単純はり・連続はりに限定した解析などの研究<sup>1),2)</sup>があるが、構造系全体を任意系骨組構造として捉えた解析法は極めて少ない。本研究は、現時点で最も進んでいると考えられる Ghali らの解析法<sup>3),4)</sup>に着目し、その問題点と適用範囲を明確にしたうえで載荷履歴の中で断面の非ひび割れ域の変化を考慮した解析ができるように改良・拡張した。さらに、それによる解析結果を実験と比較し、妥当性を検討した。

## 2 既往の解析法

### 2.1 ひび割れが発生した後の長期変形解析

既往のクリープ・乾燥収縮の影響解析（以下「長期解析」）では、クリープひずみと応力とが

線形関係であるとしたものである。また、引張部でのクリープ進行を無視した解析法も提案されているが<sup>5)</sup>、全断面有効とした解析が一般的であり、断面に作用する応力度が圧縮・引張共、同一性状のクリープ進行を仮定している。つまり、断面ひび割れ部に関しても同一性状のクリープ進行があるとしている。一方、引張硬化(tension stiffening)現象の評価法は CEB/FIP<sup>7),8)</sup>を始めコンクリートと鋼材の付着性状から評価する方法、さらに、ひび割れ発生後の M- $\Phi$  曲線に対する割線剛性を与える有効曲げ剛性の定式化など種々の方法<sup>6)</sup>が提案されている。既往のひび割れクリープ解析に関する解析法は、概ね次の 3 種類に分けられる。

① 土木学会では、変形量を算定する際に用いる長期解析も加味した有効曲げ剛性を提示している<sup>9),10)</sup>。これは、ひび割れの影響と長期解析を一括評価した結果が得られる簡便な解析法であるが、対象荷重が同一時点に作用する同一荷重に限られている短所がある。

② 高海<sup>11)</sup>は、コンクリートのクリープ進行に関して任意の時刻  $t$  での応力-ひずみ関係や、ひび割れ発生に伴う引張軟化(tension softening)を評価した平均応力-平均ひずみ関係を材料

\*1 日本電子計算(株) 大阪支店技術営業部課長(正会員)

\*2(株)ピーエス 土木技術部部長(正会員)

\*3(財)鉄道総合技術研究所構造物技術開発事業部 工修(正会員)

\*4 宇都宮大学助教授 工学部建設工学科 工博(正会員)

の力学特性として有限要素解析に導入した解析法を示している。

③ 骨組解析を基本とした解析法としては、全断面有効とした結果とひび割れ断面の結果との按分よった引張硬化の評価法<sup>7)</sup>を用いた Ghali らの解析法<sup>3),4)</sup>や猪股の解析法<sup>12)</sup>がある。さらに、ひび割れ間隔を一定として、ひび割れ間要素に着目した鉄筋とコンクリートとの付着特性として付着応力-すべり曲線や付着クリープなどを考慮した解析法<sup>2)</sup>があるが、ひび割れ解析(以下「短期解析」)、長期解析、各々に関し、変位法による骨組構造解析を用いた断面力再配分計算を行って構造系全体を解析する Ghali らの解析法<sup>3),4)</sup>が適用範囲が広く実用性が高いと評価できる。

## 2.2 Ghali らの解析法<sup>3),4)</sup>の問題点

Ghali らの解析法を用いる際に、次の3つの問題があげられる。

- ① 載荷履歴の中で任意の時点に生じたひび割れ、および断面の非ひび割れ域(図-3 参照)の変化を考慮する問題への対応について明確に示されていない。
- ② コンクリートのクリープ進行は断面圧縮域のみで進行するとしている。
- ③ 部材剛性の算定でひび割れ断面でのコンクリート有効断面を圧縮域のみとしている。

## 3. 解析法

### 3.1 解析の仮定

- i) 平面保持の仮定を用いる。つまりひずみは中立軸からの距離に比例する。
- ii) クリープ進行は、断面の作用応力度が圧縮、引張にかかわらず同一性状であるとし、クリープひずみと応力は、線形関係であるとする。
- iii) 断面ひび割れ域のクリープ進行は無視する。
- iv) 乾燥収縮は断面圧縮域のみで進行するものとする。
- v) 引張硬化の評価は CEB/FIP(MC 78)<sup>7)</sup>および CEB/FIP(MC 90)<sup>8)</sup>による按分する方法を用いる。

### 3.2 解析の考え方と基本式

図-4 のフローチャートに示すように、短期解析を行い、ひび割れ発生に伴う剛性低下による断面力の再配分を算定した後に、長期解析を行ってクリープ・乾燥収縮の進行による二次断面力を算定する。この際、載荷履歴の任意の時点に生じたひび割れ、および、断面の非ひび割れ域(図-3 参照)の変化を評価するために、新たな荷重載荷の有無にかかわらず、長期解析での時間分割ごとの着目時刻、もしくは着目施工段階(以下「解析ステージ」)でのクリープ進行による変化断面力に対応する等価節点力をその時点で作用する荷重によるものと同様、その時点で処女載荷されたと考えた短期解析を行う。このように、その時点での断面非ひび割れ域の高さを計算し直して、次の長期解析を実行する。この手順を解析上対象とする最終段階(着目時刻=∞)まで繰り返し実行して解析を進める。この際、長期解析の着目時間分割内では、断面の圧縮域は変化しないものとしたが、長期解析の解析時間分割数に応じてクリープ進行による断面非ひび割れ域の変化を考慮した解析を行うこととなる。

なお、骨組構造解析は変位法を用いた。

(1) 着目軸での応力度・応力度勾配(図-1 参照)

$$\sigma_0 = \frac{I \cdot N - Q \cdot M}{A \cdot I - Q^2}$$

$$\gamma = \frac{-Q \cdot N + A \cdot M}{A \cdot I - Q^2}$$
(1)

$\sigma_0, \gamma$ : 断面着目軸での応力度・応力度勾配

$N, M$ : 作用軸力, 曲げモーメント

$A, I, Q$ : 断面積および、着目軸に関する断面二次モーメント, 断面係数(全断面有効としての応力度・応力度勾配を求める際には全断面有効の断面諸量, ひび割れ断面として算定する際はひび割れ断面としての値を各々使い分けて用いる)

(2) 短期解析

部材断面の応力度, ひずみ量, 曲率などの計算結果をコンクリートの引

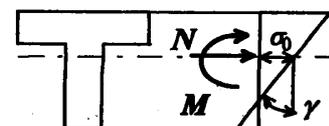


図-1 応力度分布

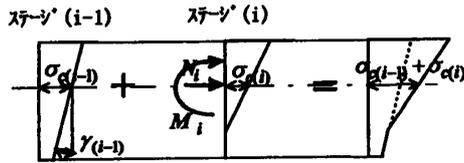


図-2a 単純な応力度の重ね合わせ

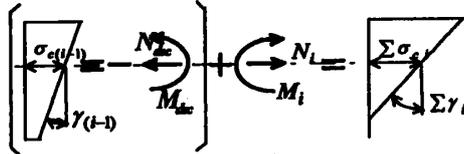


図-2b ディコンプレッション力を用いた応力度

図-2 累計応力度

張強度と比較して、ひび割れ発生の有無を判定する。新たなひび割れが発生する場合や同一断面でひび割れ域(図-3参照)が変化する場合には、新たな圧縮域(式(3)参照)や断面剛性を算定し直し、ひび割れ発生に伴う部材剛性の低下を評価した断面力再配分を骨組構造解析で不釣り合い力の考え方をういた収束計算によって行う。この際、ある荷重が作用する直前では全断面有効の結果で、その荷重作用のみでひび割れが発生する場合には、各々の応力度を単純に合成すると応力分布が折れ線となり、応力の直線性が崩れる(図-2a参照)。そこで、対象荷重が作用する直前の累計応力度を零にするような仮定の断面力(ディコンプレッション力)を求め、対象荷重作用による断面力と重ね合わせた累計断面力を用いて着目時点の累計応力度を算定する(式(2)、図-2b参照)。長期解析での時間分割ごとに生じるクリープ進行に伴う変化断面力に対してもこの操作を行う。通常、この重ね合わせた断面力は、対象段階での断面力の単純累計値と一致するのでこの手順は不要のように考えられるが、長期解析の際に鋼材拘束の影響などによる内的応力度を考慮するためには、この手続きが必要となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum N_i &= N_i - N_{dec} \\ \sum M_i &= M_i - M_{dec} \\ N_{dec} &= A \cdot \sigma_{c(i-1)} + Q \cdot \gamma(i-1) \\ M_{dec} &= Q \cdot \sigma_{c(i-1)} + I \cdot \gamma(i-1) \end{aligned} \right\} (2)$$

$M_i, N_i$  : 対象荷重作用のみによる断面力

$M_{dec}, N_{dec}$  : ディコンプレッション力

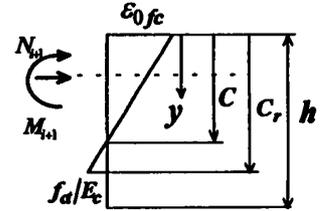
$A, I, Q$  : 対象荷重が作用する直前の状態での部材断面定数

$\sigma_{c(i-1)}, \gamma(i-1)$  : 対象荷重が作用する直前に生じている累計応力度, 累計応力度勾配

断面の圧縮域と非ひび割れ域の高さ

図-3を参照して、

断面非ひび割れ域の高さ( $C_r$ )は、軸力と曲げモーメントの釣り合いから得られる式



(3)の方程式を解いて 図-3 ひずみと圧縮域と得られる。なお、断面非ひび割れ域の圧縮域のみを有効として解析する場合には同式で得られる圧縮深さ(C)を用いればよい。

( $N = 0$  の場合)

$$\int_0^{C_r} \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y \right) dA + \sum [n_p \cdot A_p \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_p \right)] \sum [n_s \cdot A_s \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_s \right)] = 0$$

( $N \neq 0$  の場合)

$$\frac{\int_0^{C_r} y \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y \right) dA + \sum [n_p \cdot A_p \cdot y_p \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_p \right)] + \sum [n_s \cdot A_s \cdot y_s \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_s \right)]}{\int_0^{C_r} \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y \right) dA + \sum [n_p \cdot A_p \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_p \right)] + \sum [n_s \cdot A_s \left( \frac{C_r}{1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} E_c} - y_s \right)]} - \frac{M}{N} = 0$$

$C_r$  : 断面の非ひび割れ域(上縁からの高さ)

$C$  : 断面の圧縮域(上縁からの深さ)

$$C = C_r / \left( 1 - \frac{f_d}{\epsilon_0 f_c} \cdot E_c \right)$$

$f_{ct}$  : コンクリートの引張強度

$E_c$  : コンクリートのヤング係数

$\epsilon_{0fc}$  : ひび割れ断面としての上縁のひずみ量

$y$  : 上縁からの距離

$A_s, A_p$  : 鉄筋, PC鋼材の断面積

$y_s, y_p$  : 鉄筋, PC鋼材各々の上縁からの距離

$n_s, n_p$  : 鉄筋, PC鋼材とコンクリートとのヤング係数比

$N, M$  : 作用断面力(ディコンプレッション力と対象荷重による断面力を重ね合わせた断面力)

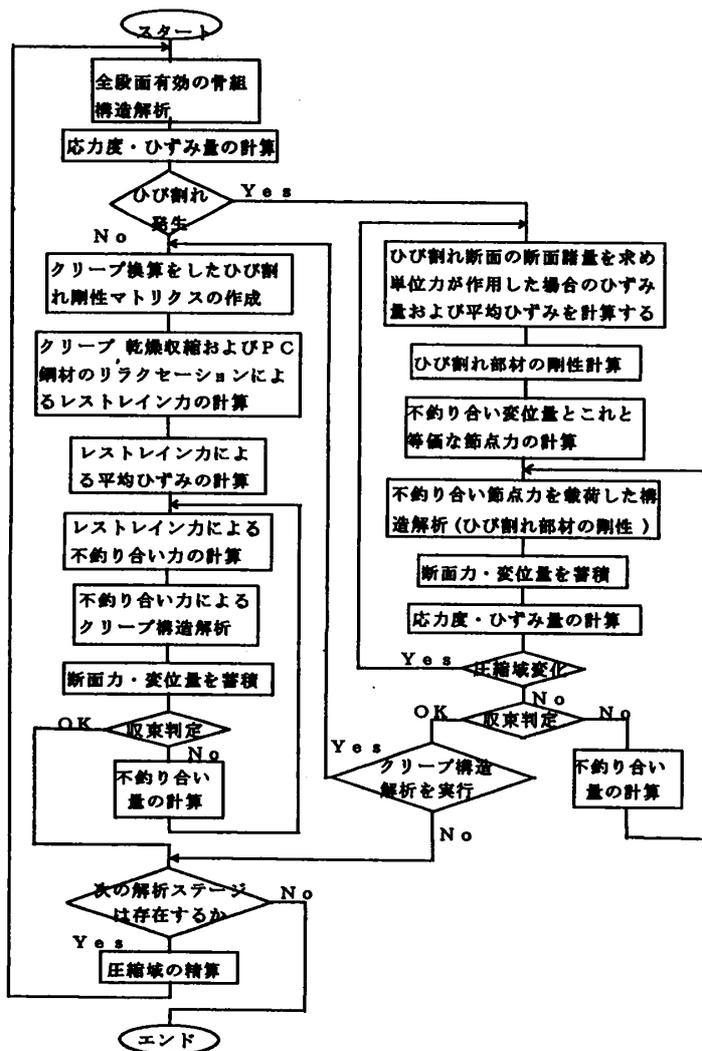


図-4 計算フローチャート

ひび割れ発生に伴う部材剛性の評価

部材剛性マトリックスとたわみ性マトリックスは式(4)に示す関係がある。全断面有効のたわみ性マトリックスは、式(6)で得られる。まず、ひび割れが発生した断面に軸力・曲げ・せん断力、各々、単位力を載荷した場合の平均ひずみと平均曲率を CEB/FIP(MC 78, MC 90)<sup>7),8)</sup>により求め、これを部材軸方向に積分して(式(7)参照)得られた変位量からひび割れ部材としてのたわみ性マトリックスを式(7)により求める。次に、これを式(4)に代入し

てひび割れ部材の部材剛性マトリックスを算定する。

$$\Delta \epsilon_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{fr} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta \sigma_0(j) + \Delta \sigma_{\phi 0}(t_{j+1}, t_j)}{E_c} \{ \phi(t_{i+1}, t_j) - \phi(t_i, t_j) \} + \frac{\Delta \sigma_0(i)}{E_c} \phi(t_{i+1}, t_i) \quad (9)$$

$$K = H^T \cdot f^{-1} \cdot H \quad (4) \quad \Delta \psi_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{fr} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta \gamma(j) + \Delta \gamma_{\phi}(t_{j+1}, t_j)}{E_c} \{ \psi(t_{i+1}, t_j) - \psi(t_i, t_j) \} + \frac{\Delta \gamma(i)}{E_c} \psi(t_{i+1}, t_i)$$

K : 部材剛性マトリックス  
f : たわみ性マトリックス

$\Delta \sigma_0(j), \Delta \gamma(j)$  : 解析ステージ j での載荷荷重による変化応力度, 変化応力度勾配

H : 変換マトリックス

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$f^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EQ}{L} \\ 0 & \frac{12E \cdot (AI - Q^2)}{L^3 \cdot A} & \frac{6E \cdot (AI - Q^2)}{L^2 \cdot A} \\ -\frac{EQ}{L} & \frac{6E \cdot (AI - Q^2)}{L^2 \cdot A} & \frac{E \cdot (4AI - 3Q^2)}{L^2 \cdot A} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$f^{-1} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$f_{1,j} = \int_0^l \epsilon_{0mean,j}(x) dx$$

$$f_{2,j} = \int_0^l \psi_{mean,j}(x) \cdot x dx$$

$$f_{3,j} = \int_0^l \psi_{mean,j}(x) dx$$

j : ひび割れ発生断面に載荷する単位荷重のインデックス(1~3)

1 : 軸力 2 : 曲げ 3 : せん断

$\epsilon_{0mean}, \psi_{mean}$  : ひび割れ発生断面に単位荷重を載荷したときの平均ひずみ, 平均曲率

l : 部材長

(3) 長期解析

持続荷重載荷によるクリープ進行の影響解析は, Trost-Bazant の材令係数 ( $\rho$ ) を用いたクリープ換算ヤング係数 ( $E_{\phi}$ )

<sup>13)</sup>を用いた有効弾性係数法を用いる。

$$E_{\phi} = \frac{E_c}{1 + \rho \phi} \quad (8)$$

$E_{\phi}$  : クリープ換算ヤング係数

$E_c$  : コンクリートのヤング係数

$\phi$  : クリープ係数

$\rho$  : 材令係数

時刻  $t_i$  から  $t_{i+1}$  のクリープ進行による自由ひずみ, および自由ひずみと等価な力(レストレイン力)は, 各々, 次式で求められる。

$\Delta\sigma_{\phi 0}(t_{j+1}, t_j), \Delta\gamma_{\phi}(t_{j+1}, t_j)$  : 解析ステージ j ( $t_j \sim t_{j+1}$ )でのクリープ・乾燥収縮の進行による変化応力度, 変化応力度勾配  
 $\Delta\sigma_0(t), \Delta\gamma(t)$  : 解析ステージ i での載荷荷重による変化応力度, 変化応力度勾配  
 $E_c$  : 着目部材のコンクリートのヤング係数  
 $\phi(t_i, t_j)$  : 時刻  $t_i$  から  $t_j$  の間のクリープ進行を表すクリープ係数

式(9)で各解析ステージごとの変化応力度,  $\Delta\sigma_0(j), \Delta\gamma(j), \Delta\sigma_0(i), \Delta\gamma(i), \Delta\sigma_{\phi 0}(t_{j+1}, t_j), \Delta\gamma_{\phi}(t_{j+1}, t_j)$  は, 各々の段階で断面のひび割れ発生の有無に従って算定した値を用いる。

$$\begin{aligned} N_{\phi, res} &= -E_{\phi} \cdot [A_{c2} \cdot \Delta\varepsilon_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi} + Q_{c2} \cdot \Delta\psi_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi}] \\ M_{\phi, res} &= -E_{\phi} \cdot [Q_{c2} \cdot \Delta\varepsilon_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi} + I_{c2} \cdot \Delta\psi_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi}] \end{aligned} \quad (10)$$

$N_{\phi, res}, M_{\phi, res}$  : 時刻  $t_i$  から  $t_{i+1}$  の間のクリープ進行に伴う自由ひずみと等価な力(レストレン力)

$E_{\phi}$  : コンクリートのクリープ換算ヤング係数

$A_{c2}, I_{c2}, Q_{c2}$  : ひび割れ断面の断面性能

$\Delta\varepsilon_{\phi 0}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi}, \Delta\psi_{\phi}(t_{i+1}, t_i)_{f\phi}$  : クリープ進行に伴う自由ひずみ, 自由曲率(式(9)参照)

ここで, 断面にひび割れが発生している場合, クリープがコンクリートの圧縮域で進行すると考える場合には, 式(9)での  $\Delta\sigma_0(i), \Delta\gamma(i), \Delta\sigma_0(j), \Delta\gamma(j)$  を求める際に用いる断面性能 ( $A_{c2}, I_{c2}, Q_{c2}$ ), および, 式(10)で用いる断面性能の値をコンクリートの圧縮域を有効としたひび割れ断面の断面性能を用い, 断面の非ひび割れ域で進行すると考える場合には, 断面非ひび割れ域のコンクリート断面を有効としたひび割れ断面の断面性能を用いる。

#### 4. 計算例と検証

##### 4.1 実験の概要

PRCはりで実施された実験との比較検討を行う目的でクリープが断面圧縮域のみで進行すると考えた解析計算を行った。この実験モデルの構造諸元と解析モデルを図-5に示す。

##### 4.2 解析結果と実験結果

実験結果と解析結果とをプロットしたグラ

フを図-6, 7に示す。図-6は, 短期解析(クリープなど時間依存する変形の影響を加味しない単なるひび割れ解析)のたわみの結果であり,

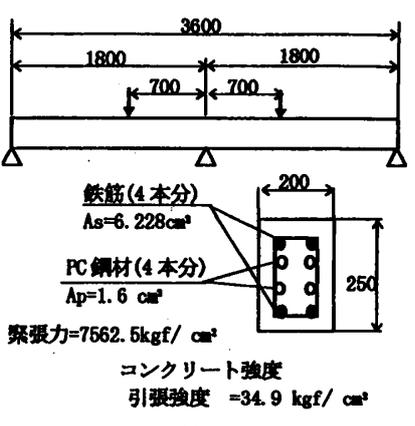


図-7は, ひび割れ発生後のクリープなどの影響を考慮したたわみの結果である。なお, グラフ中に文献(1)の解析結果も参考のため表示した。

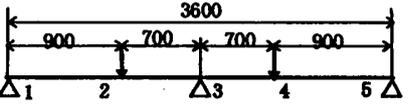


図-5 実験モデル<sup>1)</sup>及び解析モデル

#### 4.3 結果に関する考察

##### (1) 短期ひび割れの解析結果

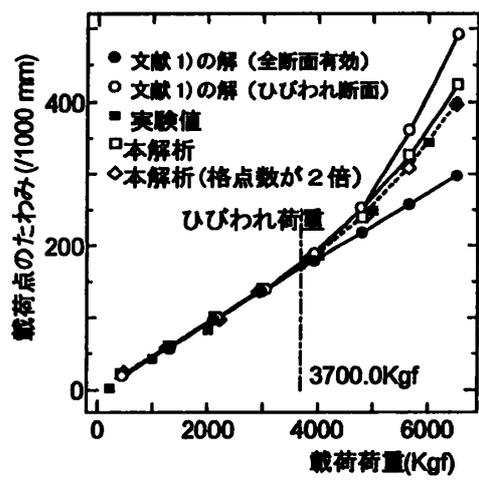


図-6 静的載荷実験と解析結果

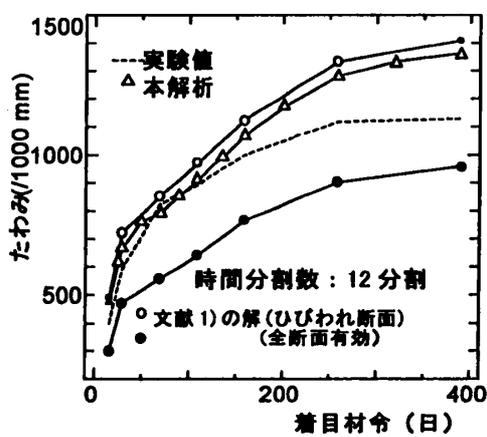


図-7 長期載荷実験と解析結果

図-6 に載荷点位置での載荷荷重強度とたわみ量の関係を示す。このグラフから本解析結果は実験値とよく一致しているといえる。なお、図-5 に示す構造系の各部材の中間に格点を設けて格点数を倍にした解析結果は、実験値にさらに近い値を示している。これは、ひび割れ部材の剛性を断面照査結果の積分により求めており、格点数を倍にした方が論理上は精度がよいといえ、実験値との整合もこれに関連したものと推測できる。なお、本モデルの解析では、引張硬化の評価法で CEB/FIP(MC 90)<sup>6)</sup>に従った結果が(MC 78)<sup>7)</sup>に従ったものに比べてわずかにひび割れ部材の剛性が小さくたわみ値は大きかった。この際、曲げ成分が支配的であった。

## (2) ひび割れクリープ解析の結果

図-7 に載荷点位置でのたわみ量の経時変化を示す。図-7 は解析上の時間分割数を 12 としたもので時間経過と共に実験値との差が拡大する傾向である。着目材令が 400 日ではその差が 20%強となっており、結果は短期解析ほど一致していない。この結果から本解析では断面剛性を小さく評価しているかクリープの影響を大きく見ているかの傾向があるといえるが短期解析の結果を勘案するとクリープを過大評価している可能性がある。しかし、たわみの絶対値で見ると本解析結果と実験値との差は小さな値であり、たわみの進行曲線の形状などを考え合わせると合理的なものと判断できる。

## 5. まとめ

本研究は、Ghali らの解析法<sup>3),4)</sup>に立脚して、その適用範囲を拡張したもので研究成果として次のことがあげられる。

- i) 構造物の載荷履歴の中で任意の時点に生じたひび割れや断面の非ひび割れ域(図-3 参照)の変化を考慮した解析が可能となった。
- ii) 断面の非ひび割れ域(図-3 参照)での引張部コンクリートのクリープ進行を考慮した解析ができる。また、構造解析に用いる断面剛性にも断面の非ひび割れ域のコンクリート断面

を有効とした断面剛性を用いた解析が可能となった。

iii) 解析値は、実験値と概ね一致している。今後、反力、応力度などについての検証を行い、その信頼性を確認したい。

## 6. 謝辞

本研究を進めるに際し、貴重なご指導およびご協力を頂いた(財)鉄道技術総合研究所 涌井一氏、日本構研情報(株) 富田耕司氏、日本電子計算(株)岩本匡弘氏を初めとする関係各位、また、カルガリー大学 A. Ghali 教授、秋田大学 川上教授には質疑に快く答えて頂いた。ここに記して謝意を表するものである。

## 参考文献

- 1) 津田守・佐藤良一・鳥取誠一・手塚正道：持続荷重を受ける PRC 連続はりの挙動について コンクリート工学年次論文報告集 Vol. 17 No2 1995
- 2) 佐藤良一・氏家勲・鈴木雅博・渡英一：応力履歴を考慮した RC 曲げ部材の変形解析法 コンクリート工学年次論文報告集 Vol 12 No2 1990 年
- 3) A. Ghali・M. M. Elbadry: Serviceability Design of Continuous Prestressed Concrete Structures PCI Journal Vol 34 No3 1989
- 4) A. Ghali A Unified Approach for Serviceability Design of Prestressed and Nonprestressed Reinforced Concrete Structures PCI Journal Vol 31 No2 1986
- 5) 例えば小宮正久・酒井一・前田晴人：コンクリートのクリープ・乾燥収縮を考慮した断面曲げ解析 プレストレストコンクリート Vol. 34 No6
- 6) 角田与史雄：曲げを受けるコンクリート部材のひび割れとたわみに関する研究の現状 土木学会論文報告集 第 38 4号/V7 1987年
- 7) CEB Manual Cracking and Deformations 1985
- 8) CEB-FIP Model Cord 1990, 1993
- 9) コンクリート標準示方書(設計編) 平成8年制定 土木学会 1996年
- 10) 平成8年制定 コンクリート標準示方書改訂資料 コンクリートライブラリー85 土木学会 1996
- 11) 高海克彦：PPC はりのクリープ有限要素解析法 コンクリート工学論文集 第6巻第1号 1995年
- 12) 猪股俊司 構造コンクリート曲げ部材使用限界状態の統一設計計算法 コンクリート工学 Vol 26 No12 1988
- 13) F. レオンハルト著、横道 英雄監訳：プレストレストコンクリート 鹿島出版会 1983