コンクリート工学年次論文報告集，Vol.21，No.2，1999

論文　遷移材齢時におけるコンクリートの構成則に関する研究

下田勝彦*1．石川靖晃*2．田邊忠顕*3

要旨：コンクリートは打設直後から硬化にいたる間，いわゆる遷移材齢時においては，その性質は粘性流動体から弾性体へと変化する．この期間では温度応力や自己収縮といった初期応力問題が発生し，硬化後の耐久性に大きく影響を及ぼす．本研究では遷移コンクリートの変形時のひずみ成分を弾塑性成分に粘弾性成分と粘塑性成分を加えた4つの成分を用いて表した．また従来の研究では一定とした内部摩擦角を塑性ひずみの関数として捉え，実験により粘塑性パラメータを同定し多次元における構成則の検討を行った．

キーワード：遷移コンクリート，ひずみ成分の分離，内部摩擦角

1. はじめに

従来の研究において，田邊らは遷移コンクリートを弾性と粘塑性成分としてモデル化しようとした．しかしながら，低い応力の領域においてクリープ挙動は，十分に表現できなかった．また石川らが提案した弾性構成式は，応力レベルが高くなるような場合に対しては，弾性域を越えたときの非回復成分が表現できない．一方，粘弾性と塑性モデルが適用されるならば，時間依存の残留ひずみが表現されない．これらの結果を伴って，塑性成分に粘弾性と粘塑性ひずみ成分が同時に存在することは当然であり，そしてこれらの存在は実験的にも確かめられている．そして簡単な Drucker-Prager 則を使うことで，それぞれのひずみ成分に関係する材料パラメータの同定は為されている．

本研究では，軸方向と横方向の残留ひずみの比を実験値より得ることにより Drucker-Prager 則の内部摩擦角が一定でないことを示し，これを考慮に入れた構成則の検討を行った．

2. 粘弾性，粘塑性成分を考慮した塑性モデルの構築

4つのひずみ成分からなる構成則モデルは，次式のようにひずみ成分で書くことができる

$$d\varepsilon_t = d\varepsilon_e + d\varepsilon_{ve} + d\varepsilon_p + d\varepsilon_{vp} \tag{1}$$

ここで $d\varepsilon_t$，$d\varepsilon_e$，$d\varepsilon_{ve}$，$d\varepsilon_p$，$d\varepsilon_{vp}$，はそれぞれ全ひずみ，弾性ひずみ，粘弾性ひずみ，塑性ひずみ，粘塑性ひずみを示す．応力増分 $d\sigma$ は，時間増分の近傍における Taylar 展開を使うことによって式(2)のように表す．

$$d\sigma = (D + \Delta D)(d\varepsilon_t - d\varepsilon_{ve} - d\varepsilon_p - d\varepsilon_{vp}) \tag{2}$$

そして，粘弾性増分は式(3)のように表す，

$$d\varepsilon_{ve} = (L_1(\sigma) + \Delta L(\sigma))d\sigma + L_2(\sigma) + \Delta L_2(\sigma) \tag{3}$$

この式の誘導の詳しい説明は，後の章で述べる．塑性ひずみは，関連流れ則に従うとし式(4)のように表す．

$$d\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{4}$$

またコンシステンシー方程式により

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\partial\sigma + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}d\varepsilon_p + \frac{\partial f}{\partial \kappa}d\kappa + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \tag{5}$$

ここで f は降伏関数，k，t はそれぞれ降伏曲面と時間を定義するパラメータである．また粘塑性ひずみ成分の最も一般的な形は式(6)のように表す，

＊1　名古屋大学大学院　工学研究科土木工学専攻（正会員）
＊2　名城大学助手　理工学部土木工学科　工修（正会員）
＊3　名古屋大学大学院教授　工学研究科土木工学専攻　工博（正会員）

$$d\varepsilon_{vp}=\gamma\cdot\left\langle\frac{f}{f_0}\right\rangle^{n}\frac{\partial f}{\partial\sigma}dt \tag{6}$$

$$\left\langle\frac{f}{f_0}\right\rangle=\begin{cases}\dfrac{f}{f_0} & for \quad f\geq 0\\ 0 & for \quad f\leq 0\end{cases}$$

式(6)を Taylar 展開して，第２項以降を無視すると

$$d\varepsilon_{vp}=(\gamma+\Delta\gamma)\cdot\left\langle\frac{f}{f_0}\right\rangle^{n}\frac{\partial f}{\partial\sigma}dt+\gamma\cdot n\left\langle\frac{f}{f_0}\right\rangle^{n-1}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^{T}d\sigma\cdot dt \tag{7}$$

ここで降伏関数は，初期降伏時の降伏値により正規化されている式(3)(4)(7)を式(2)に代入し，コンシステンシー方程式（応力が降伏曲面に止まるための条件式）から最終的な構成則を表す．

$$d\sigma=\Omega^{-1}(D+\Delta D)\left\{(I-\Phi_1)\left[d\varepsilon_1-(L_2+\partial L_2)-(\gamma+\Delta\gamma)\frac{\partial f}{\partial\sigma}dt\right]-\Phi_2\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \tag{8}$$

ここで

$$\Omega=I+(D+\Delta D)(I-\Phi_1)\left(L_1+\partial L_1+\gamma\cdot n\cdot f^{n-1}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^{T}\cdot dt\right) \tag{9}$$

$$\Phi_1=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^{T}(D+\Delta D)}{-h+\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^{T}(D+\Delta D)\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)} \tag{10}$$

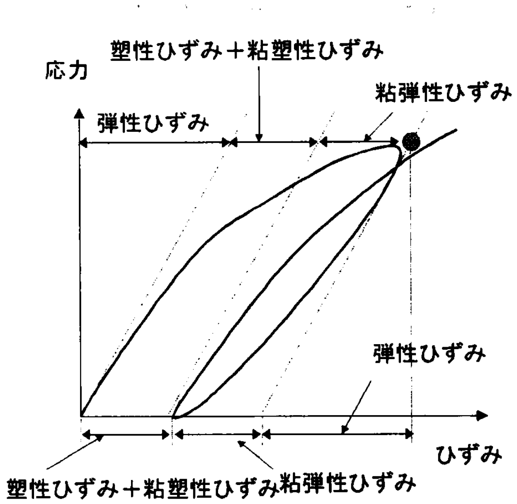
$$\Phi_2=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}}{-h+\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^{T}(D+\Delta D)\left(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)} \tag{11}$$

ここでｈは，硬化パラメータである．

もし粘弾性，粘塑性成分が存在しないならば，

$$\Omega=I,\Omega^{-1}(D+\Delta D)(I-\Phi_1)=D_{ep}$$

とする．そうすれば従来の塑性方程式となる．式(8)より，この式自体が初期ひずみからなる粘弾性項，粘塑性項，初期ひずみ問題を表現している．コンシステンシー方程式は，粘弾性ひずみの存在と共に塑性降伏曲面上のある応力にとって必要不可欠である．また，この構成則は，粘弾性のみのモデルとは時間依存流れが全く弾性ひずみのそれとは異なるという点で違うことを示しておく．

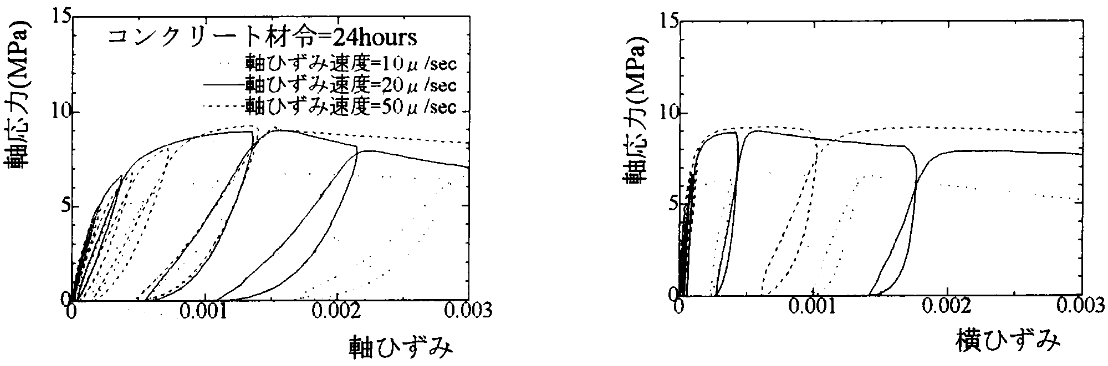


図－１　４つのひずみ成分の定義

3.　各ひずみ成分の実験的定義と同定

3.１ 実験的定義

遷移材齢時のコンクリートに４つのひずみ成分が存在すると仮定し，それぞれを弾性，粘弾性，塑性，そして粘塑性とする．これらのひずみ成分を時間依存性か非時間依存性か，また回復性か非回復性かという基準に基づき定義する．まず，弾性ひずみ成分と粘弾性ひずみ成分は回復性であり，また塑性成分と粘塑性ひずみ成分は非回復性成分である．他方では，粘弾性，粘塑性成分は時間依存性であり，また弾性，塑性成分は非時間依存性である．さらに図－１に示すように，この定義を１サイクルの圧縮載荷過程に適用する．言い換えれば，載荷を始める応力が０からある圧縮応力レベルまでと，除荷過程において応力が０になるまでの過程にこの定義を適用するということである．弾性ひずみは，初期の応力―ひずみ関係において接線を引くことにより得ることができる．強度の 1/3 から 1/4 の点を越えると応力経路が初期接線から逸脱するので，結果として粘弾性，塑性，粘塑性ひずみが生じる．塑性，粘塑性ひずみの初期値は，降伏関数の位置により定義されている．一方で粘弾性ひずみには，そのような基準は存在しない．それについては後で述べる方法で区別することができる．１サイクル圧縮載荷の終わりの状態，つまり除荷後の応力が０の状態において



図－2　遷移コンクリートの応力―ひずみ関係

は残留ひずみが存在する．残留ひずみは，非回復性成分であり，塑性ひずみと粘塑性ひずみの和で表される．これらの残留ひずみは，各々の繰り返し載荷における最大応力時に対応する値となる．数回繰り返しを行い，その繰り返しにおいての最大応力，残留ひずみ，そして最大応力に達するまでの時間を記録することによって実験的に塑性ひずみと粘塑性ひずみの和を継続して算出する事が可能である．粘弾性ひずみ成分は，全ひずみから弾性ひずみと残留ひずみを引くことにより求められる．後の載荷においては，実験において応力とひずみが除荷時で回復する点から応力が最大応力に達するまで弾性ひずみと粘弾性ひずみが発生すると仮定した．そして，その後再び塑性ひずみと粘塑性ひずみ部分が現れる．今までのことは，ピーク荷重前の各々のひずみ要素を得る方法を仮定したものである．ピーク応力の後は，軟化時の応力―ひずみ関係を考慮すべきである．この領域において実験的に局所化の部分を考慮せねばならず，また実験において局所化の部分を見つけなければならない．本研究は，実験で局所化の計測幅を含むことができていないという理由で，この領域において全く考慮されていない．最も必要なことは，残留ひずみとそれに含まれる異なる2つの要因，つまり塑性ひずみと粘塑性ひずみの分離を見つけることである．

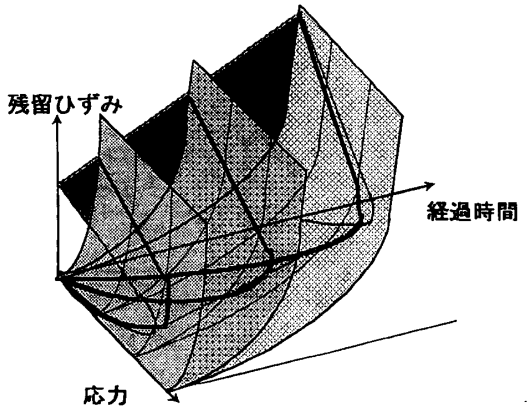
3.2 残留ひずみにおける塑性ひずみと粘塑性ひずみの分離と粘塑性パラメータの同定

分離を論証するために，本研究では最も単純な塑性モデルである Drucker-Prager モデルを採用した．式(12)に示す Drucker-Prager 則は硬化と軟化のモデルであり，従来の研究ではその内部摩擦角を２７°に一定とした．しかし本研究ではこのαを応力の関数として検討した．その結果，破壊曲面は，円錐の角度を変化させながら I_1 軸に沿って前方や後方へ移動する．

$$\alpha_1 + \sqrt{J_2} - k\left(\varepsilon_{ep}\right) = 0 \qquad (12)$$

ここで I_1 と J_2 は，それぞれ応力の第一不変量，偏差応力の第二不変量である．実験では遷移コンクリートを異なるひずみ速度，すなわち 10，20，50μ/sec のひずみ速度で一軸に載荷する．またコンクリートの材齢は，24 時間とした．

得られた実験結果を図－２に示す．また実験によって得られた結果は，垂直軸に残留ひずみ，水平軸に時間と応力をもつ三次元空間として図－３に示す．この図－３で時間は最大荷重までに要した時間，応力は最大応力を表している．即ち，降伏した後の残留ひずみを発生させるに要した時間は，ひずみ速度を一定にして載荷しているので測定する事が可能である．そして応力がひずみ速度 20μ/sec における一軸圧縮強度の 1/3 点である最初の降伏曲面に達したときの時間を計測し始める時間とした．ひずみ速度の変化により異なる実験曲面が同じ空間にいく



図－3　特性粘性曲面

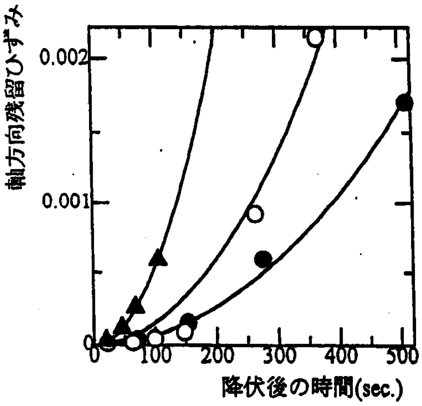
つか示されているが，この曲面内の存在する実験曲線を繋ぎ合わせることにより応力と残留ひずみと時間の関係を表す実験的表面を構築することが可能である．本研究ではこの表面を特性粘性表面と名付けることにする．次の段階として，図－3に示すように応力一定の平面によって表面を切断する．応力が一定に保たれた時の切断面の側面図は，残留ひずみと時間の関係を示す．論理的なモデルと一致させると，式(13)に示すような積分式が与えられる．

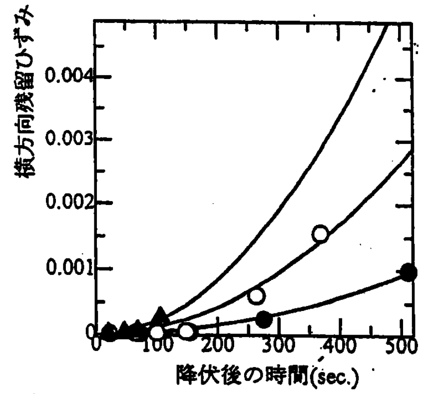
$$\int d\varepsilon_1^{\,p} + \int d\varepsilon_1^{\,vp} = \int d\varepsilon_1^{\,p} + \int \gamma \cdot \left\langle \frac{f}{f_0} \right\rangle^n \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} dt$$
$$= \varepsilon_1^{\,p} + \int \gamma \left(\alpha(\varepsilon_p) + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left\langle \frac{f}{f_0} \right\rangle^n \cdot dt \qquad (13)$$

上式より，$\int \gamma \left(\alpha(\varepsilon_p) + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left\langle \frac{f}{f_0} \right\rangle dt^n$ は $\varepsilon_1{}^p$ が側面図の傾きである．また，ε_p は切片を表している．さらに詳細な論理的な表現にまで追う．応力―ひずみ関係は，式(14)のように Saenz の式により表される．

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{\varsigma_1 \varepsilon_{res}}{1 + \left(\frac{\varsigma_1}{\varsigma_2} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{res}}{\varepsilon_{res,\max}} + \left(\frac{\varepsilon_{res}}{\varepsilon_{res,\max}} \right)^2} \qquad (14)$$

もし，ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_t = \dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon}_{ve} = \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_{vp}$ と一定と仮定するならば，その時 ε_{res} は，$\varepsilon_{res} = \nu(\varepsilon) \cdot t$ となる．ただし $\nu(\varepsilon)$ は一定のひずみ速度である．また実験では，図－4に示すように残留ひずみは，経過時間の2乗と近似関係になっている．この関係を適用し式(14)に代入すると，特性粘性ひずみ表面を得ることができる．任意の応力について式(14)はプレピーク領域とポストピーク領域における残留ひずみが発生するのに必要な2つの経過時間を与える．$\gamma \cdot f^n$ がプレピークとポストピークの領域の両方で一定であることを示す直線の存在を確認できるならば問題の鍵となるのはこの直線が得られるかどうかである．そしてそのとき式(6)による粘塑性ひずみのモデル化は，適切と考えることができる．ポストピーク領域についての直線については後で説明するとして，ここではプレピーク領域での直線に注目した．様々な応力一定の平面により表面を切断することによって得る線の大部分は，最大応力領域を除いて直線で近似すると，応力に対応する0時間における傾きと切片を定義できる．





図－4　実験値による残留ひずみと降伏後の時間の関係

$$\varepsilon_{res} = \alpha(\varepsilon_p) \cdot t + b(\sigma) \qquad (15)$$

式(13)より

$$d\langle\sigma\rangle=\gamma\cdot\left\langle\frac{f}{f_0}\right\rangle^n\frac{\partial f}{\partial\sigma}=\gamma\cdot\left(d(\varepsilon_p)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right)^n \tag{16}$$

$$\sigma_0=\frac{k}{\left(\alpha(\varepsilon_p)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \tag{17}$$

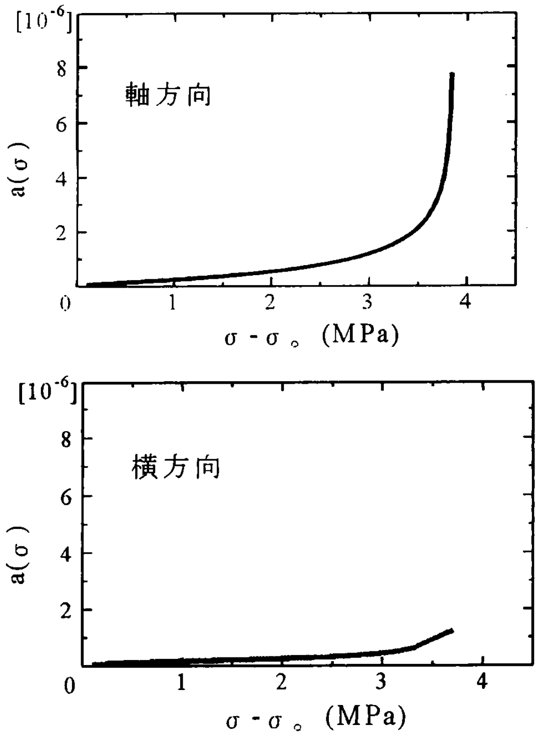
$b(\sigma)$の項は，０時間における切片であり，式(13)に示すように塑性ひずみとなる．最小２乗法を用いることによって傾きと切片が求められる．それを図－５，６に示す．図－５は，応力と$a(\sigma)$との関係を示す．

一方で，局所の幅の長さが供試体の長さlと異なるポストピーク領域において特性粘性表面は変化する．局所体の長さをβ,lと仮定し純塑性，粘塑性ひずみは$(1-\beta)\cdot l$の弾性除荷部分を考慮することによって式(18)を得る．

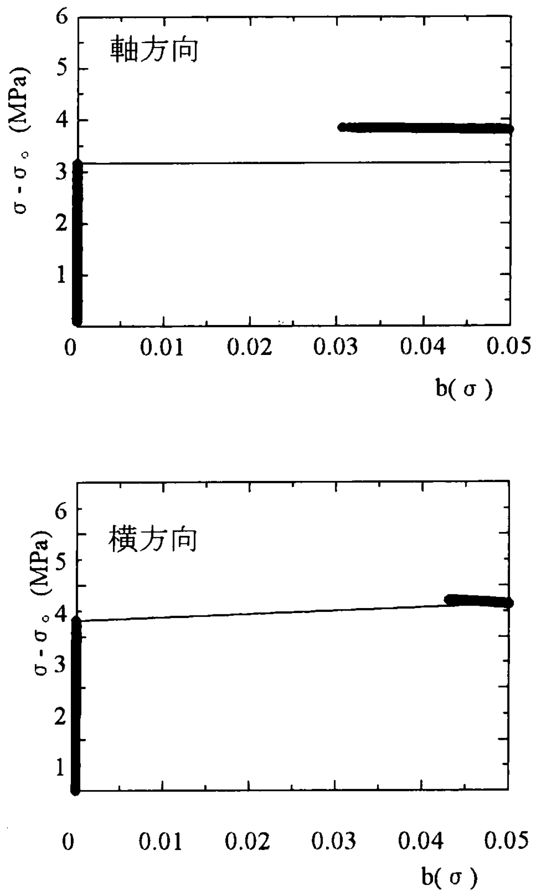
$$d\varepsilon_1{}^p+d\varepsilon_1{}^{vp}=\frac{d\varepsilon_{res}}{\beta\cdot l}+\frac{1-\beta}{\beta}\cdot\frac{d\sigma}{E} \tag{18}$$

特性粘性表面は，式(16)によってポストピーク領域において拡張することができる．これらのことから粘塑性パラメータであるγとnは，ポストピーク領域で得ることができる．しかしながら局所体は，本研究では測定できていないためプレピーク領域での$a(\sigma)$の値を適用する．そしてポストピーク領域での塑性ひずみはその$a(\sigma)$の値を使うとする．これらのように同定した塑性ひずみを図－６に示す．

ここで本研究の目的である内部摩擦角を塑性ひずみの関数として捉えることについての理論的説明に入る．まず，式(14)を軸方向ひずみと横方向ひずみを用いることによって軸方向と横方向の残留ひずみのうち塑性ひずみ成分の比を求め，内部摩擦角が塑性ひずみに依存する関数であることを実験的に示す．本研究ではDrucker-Prager 則を採用しているため，軸方向と横方向の残留ひずみは式(19)のように示せる．



図－５　粘塑性ひずみ速度と応力の関係



図－６　塑性ひずみと応力の関係

$$\frac{\varepsilon^{p}_{res,axi}}{\varepsilon^{p}_{res,lat}} = \frac{-\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\alpha + \frac{1}{2\sqrt{3}}} \tag{19}$$

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} \tag{20}$$

従来の研究[1]では式(20)のϕを 27° と一定とした．しかし，図－7に示すように実験から得た値は必ずしも一定ではない．よってϕに式(21)に示すような関数を与え，最小２乗法により近似した．

$$\phi = a\left(\varepsilon_{res,axi}\right)^{b} \tag{21}$$

この結果を図－7に示す．ただし本研究ではポストピーク領域で充分な測定ができていないため，ここではプレピーク領域のみに注目した．求められた値は a が 1.3，b が 0.21 であり，単調増加を示した．

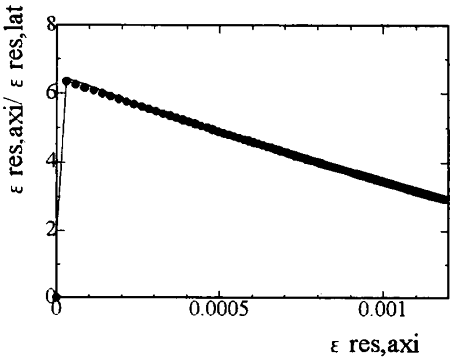
故に図－5と式(16)からγとnを同定する子とが可能である．その結果，軸方向でn＝3.2, γ＝1.68，となり横方向でn＝2.3，γ＝1.10，となった．軸方向および横方向においてγ,nは同じオーダー値となっており，内部摩擦角を変化させた同定手法の妥当性がうかがえる．

3.3 塑性ひずみの硬化パラメータと粘弾性パラメータの同定方法

図－6より応力の増加に伴い塑性ひずみは増加し，その後最大荷重のあと応力は減少していく．これは正確に等価の塑性ひずみと等価応力関係を示している．Drucker-Pruger 材料の硬化軟化特性はαとkが徐々に変化していく降伏関数によって表される．本研究では内部摩擦角が変化することを考慮しているので，kとαが硬化過程による影響を受ける．塑性ひずみ一応力関係は次式で表される．

$$d\sigma_e = H \cdot d\varepsilon_{ep} \tag{22}$$

一方，コンシステンシー方程式（応力が降伏曲面に止まるための条件式）は次式で与える．



図－7 軸方向ひずみと横方向ひずみの比率

$$df = \left(\alpha(\varepsilon_p) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot d\sigma_1 + dk(\varepsilon_{ep}) = 0 \tag{23}$$

式(23)を考慮することで

$$\begin{aligned} k &= \int (-)\left(\alpha(\varepsilon_p) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot d\sigma_1 \\ &= (-)\left(\alpha(\varepsilon_p) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \int H \cdot d\varepsilon_{ep} - \int I_1 \frac{d\alpha}{d\varepsilon_p} \end{aligned} \tag{24}$$

$d\varepsilon_{ep}$は等価塑性ひずみである．それぞれのひずみ増分で硬化パラメータHに値を知ることにより塑性パラメータkもまた求められる．

また粘弾性パラメータはクリープ関数を得ることで rate-type の粘弾性ひずみ構成則が粘弾性ひずみに対して直接適用できる．

4. まとめ

軸方向と横方向でそれぞれ独立して求めた粘塑性パラメータγ,nが妥当な値であった．この結果より，本研究で提案した方法が多軸問題において直ちに適用可能であることが確認された．

参考文献

1) 田辺忠顕・石川靖晃・安藤直樹：Visco-elastic and visco-plastic modeling of transient concrete, Proceedings of the EURO-C 1998 conference on computational modelling of concrete structures, pp.441-453 ,Mar. 1998