

論文 コンクリート材料の圧縮破壊のイメージベース有限要素解析

永井学志^{*1}・山田貴博^{*2}・和田 章^{*3}

要旨：コンクリート材料を粗骨材とモルタルからなる2相複合材料と仮定し、巨視的な圧縮破壊挙動を局所的な引張破壊から解析することを目的として、デジタル画像に基づく有限要素解析手法について述べる。本手法では粗骨材とモルタルの界面は階段状に近似されるという問題点があるが、界面を滑らかに近似するために勾配が不連続な ramp 関数を、引張りひ割れの不連続性を表現するために Heaviside 関数を、非適合変位モードとして附加した有限要素を用いることにより改良できることを示す。本論文では二次元の場合を述べるが、本手法は三次元への拡張を念頭に置いた手法である。

キーワード：粗骨材-モルタル, 有限要素解析, デジタル画像, 非適合要素, 圧縮破壊

1. はじめに

本研究の目的は、コンクリート材料の巨視的な圧縮破壊挙動を、本質的な破壊挙動の主要因と考えられている引張破壊から、数値解析的手法を用いて詳細に説明することである。コンクリート材料の構成材料の不均一性により局所的に発生する引張破壊を取り扱うためには、複合材料としてのモデル化が必須であり、一般に粗骨材とモルタルの2相複合材料の仮定をすることが多い。しかし、この2相複合材料に対して有限要素法を用いる場合には、その複雑な形状ゆえに要素分割は実際には極めて困難である。

このような視点から、著者等は、Hollister と Kikuchi により提案されているイメージベース有限要素解析手法¹⁾を、コンクリート材料の圧縮破壊の問題へ適用することを検討している²⁾。

モデル作成のために画像を用いるという考え方は古くから存在すると思われるが、計算機の高性能化により初めて可能となったものである。コンクリート材料の分野においては、近年 Schlangen が、コンクリート材料の二次元デジタル画像を格子モデル作成のために用いて、ひび割れ進展解析を行っている³⁾。

図-1に、イメージベース有限要素解析手法の一例²⁾を示す。まず、解析対象となるコンクリート供試体を画像入力装置により計算機に撮り込む。次に、デジタル画像処理により、2相複合材料の仮定に基づいて、得られた画像からある一定値より小さい体積を持つ骨材を細骨材と判定して削除し、残りを粗骨材として抽出する。

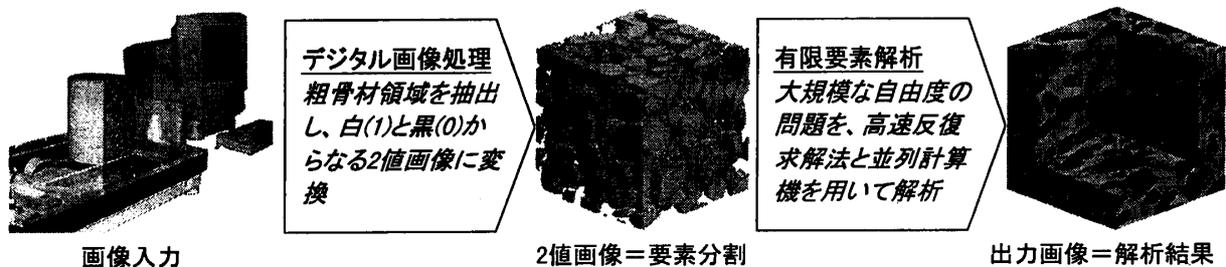


図-1 コンクリート材料のイメージベース有限要素解析²⁾

*1 東京工業大学大学院 総合理工学研究科環境物理工学専攻 工修 (正会員)

*2 東京理科大学助教授 工学部建築学科 学博

*3 東京工業大学教授 建築物理研究センター 工博 (正会員)

最終的に、粗骨材を黒(0)、残りの部分をモルタルとみなして白(1)とした2値画像が作成される。

一般にデジタル画像は、均一な直交格子上的の交点で定義されるデータの集合であり、それぞれの点が支配する小さな領域は画素と呼ばれている。この画素は二次元であれば正方形、三次元であれば立方体であり、すべて同一な形状である。ここで見方を変えて、すべての画素を有限要素であると考えれば、2値画像を作成することは、有限要素分割を行うことと等価となる。

本手法の場合、大規模な連立一次方程式を解く必要が生じるが、要素分割は直交格子上で行われているために、各種の高速な反復系の求解法を適用することが可能である。またこのとき、解析領域をある次元に沿った領域に分割することにより、それぞれの領域内でほとんど独立に計算を行うことが出来るので、並列計算機を用いて計算することも容易である。更に、解析結果に対しても、デジタル画像として扱うことの出来る場合が多い。

このように、デジタル画像に基づく本手法には、従来の有限要素解析手法にはない多くの長所を持っているが、粗骨材とモルタルの界面が階段状に近似されるという問題点がある。そこで本論文では、Oliverの定式化⁴⁾に基づき、デジタル画像と組み合わせることを前提に開発した非適合要素⁵⁾を用いることにより、この問題点を大きく改良できることを示すものである。すなわち、界面を滑らかに近似するために勾配が不連続な ramp 関数を、引張ひび割れによる不連続性を表現するために Heaviside 関数を、非適合変位モードとして付加した有限要素を用いる。更に、この非適合要素を用いて、界面ひび割れの構成則を損傷力学モデル⁴⁾により評価することにより非線形解析を行う。なお、本論文では、二次元平面ひずみ問題の場合を述べるが、三次元問題への拡張は基本的に同じである。

2. 階層型画像と非適合要素による改良

2.1 界面における階段状近似の問題

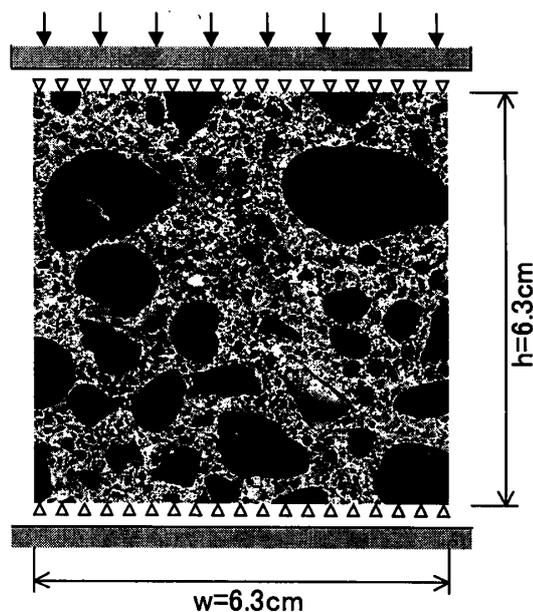
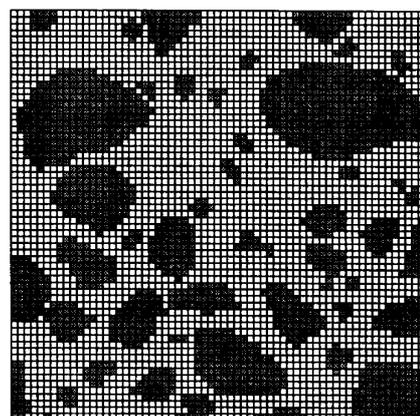


図-2 コンクリート材料のデジタル画像



粗骨材:
 $E = 70\text{GPa}$
モルタル:
 $E = 25\text{GPa}$
共通:
 $\nu = 0.20$

図-3 適合要素のみによる63x63要素分割

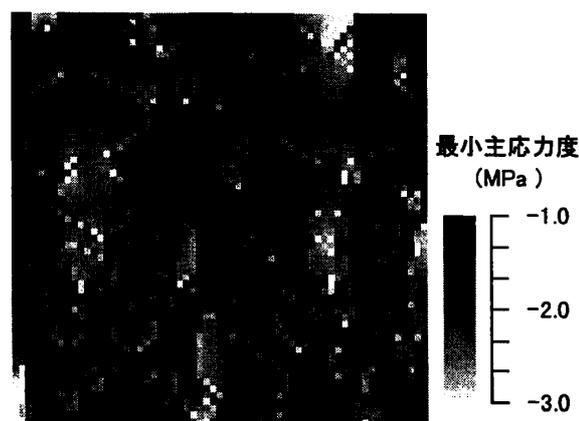


図-4 適合要素のみによる最小主応力

図-2に示すように、一辺6.3cmの正方形で定義されるコンクリート材料のデジタル画像を解析領域とする。境界条件は、解析領域の上下面

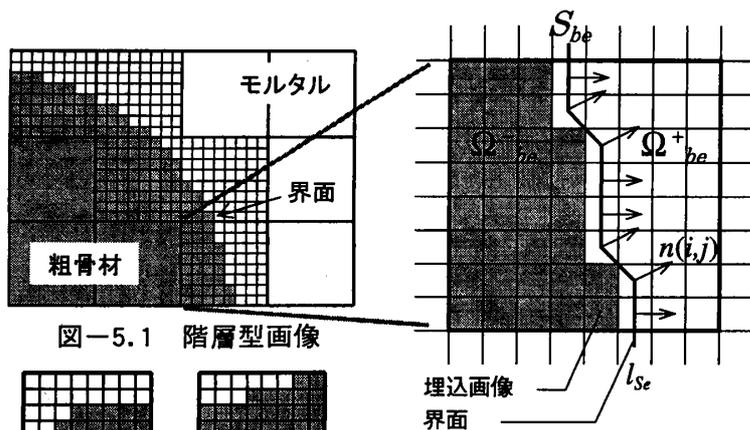


図-5.1 階層型画像

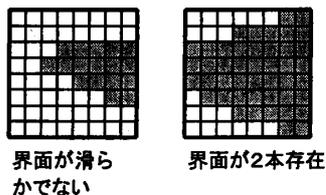


図-5.2 不良界面要素の例

$$k_e = |S_{be}| / l_{Se}$$

$$n_e = \text{average}(n(i, j))$$

図-5.3 幾何学情報の抽出

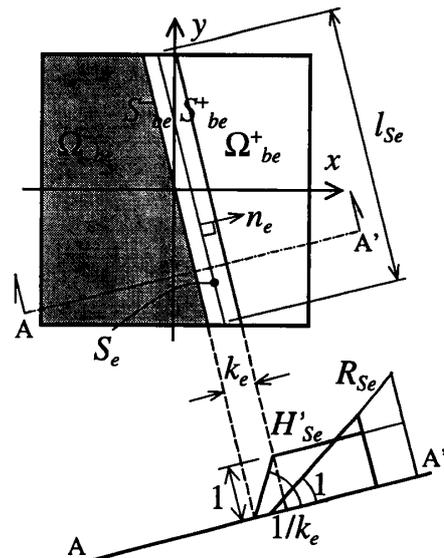


図-5.4 定式化上の界面要素

を横方向拘束無しとして、上面に一律な強制圧縮変位を与える。ここに、引張を正とする。

図-2から、通常の4節点四辺形要素を用いた図-3のような63x63の要素分割モデルを作成した。このモデルの最小主応力分布を図-4に示す。ここで、応力は要素中央点にて評価している。このようなイメージベース有限要素モデルでは、有限要素法の任意形状な要素が使用可能であるという特徴を用いていないために、極めて容易に要素分割が出来るのであるが、そのために粗骨材-モルタル界面は階段状に要素分割近似されることになる。その結果、界面近傍には数値的な応力振動が生じることになる。コンクリート材料においては、界面のひび割れを無視することは出来ないと考えられるため、これを回避する必要がある。そこで次節において、これを改良するための手法を述べる。

2.2 階層型画像と非適合要素⁵⁾

デジタル画像を直接に有限要素分割に用いることを前提として、有限要素法のもうひとつの特徴である要素改良を考える。つまり、ある有限要素中の任意の位置に界面を配置することが出来れば、界面は要素分割に依存しなくなる。ここでは、Oliver が提案している非適合要素⁴⁾をデジタル画像と組み合わせることを考える。

なお、呉⁶⁾らの指摘にもあるように、この非適合要素は、ひび割れの不連続性を、微小な幅を考慮することにより便宜的に連続問題として取り扱うものである。

要素内部の任意の位置にある界面は、デジタル的に扱う。すなわち、粗骨材とモルタルの高解像度な2値画像に対して8-近傍^{註1)}による境界線追跡を行ない、これを界面とみなす。その後、低解像度な2値画像に変換し、これを要素分割とする。このときに、図-5.1に示すように、界面を含む要素にだけ部分的に高解像度な画像を埋め込み、階層型画像とする。以後、この高解像度画像を埋め込んだ非適合要素を界面要素と呼ぶ。この界面要素に含まれる高解像度画像に対して画像解析を行い、図-5.3に示す界面の面積 $|S_{be}|$ 、長さ l_{Se} 、幅 k_e 、法線 n_e 、各節点からの距離などの幾何学情報を抽出する。

なお、界面の幾何学情報は、すべてデジタル幾何学などを用いた何らかの画像解析手法による推定であるために、定式化上の界面位置との整合性を欠くことがある。すなわち、図-5.2に示すように、界面要素に含まれる高解像度画像の界面が滑らかでなかったり、あるいは界面が2本以上存在するといったことである。このため、数値解析のための画像修正が必要となる可能性があることを付記しておく。

一方、有限要素法の定式化上の界面要素には、図-5.4に示すような幅 k_e が $k_e \ll 1$ であるような薄い層の直線で近似された界面を含む。この要素に対して不連続性が表現できるひずみ補正型の混合法を適用する。付加される非適合変形モード関数は、異種材料を表現するために勾配が不連続な ramp関数 R_{se} と、界面ひび割れを表現するために近似的な不連続性を持つ Heaviside関数 H'_{se} の2つを含む関数である。したがって、これらの関数の微分である非適合ひずみには、Heaviside関数と近似的な Dirac のデルタ関数が含まれることになる。具体的な界面要素の変位関数は、

$$u_e = \underbrace{\hat{u}_e}_{\text{適合変位}} + \underbrace{(R_{se} - \varphi_{Re})u_{Re} + (H'_{se} - \varphi_{He})u_{He}}_{\text{非適合モード}} \quad (1)$$

となる。ここに、 \hat{u}_e は適合変位関数であり、本研究では4節点四辺形要素に対する補間関数と同じ双一次関数を用いている。 φ_{Re} は要素節点において R_{se} に一致する値を持つ双一次関数、同様に φ_{He} は要素節点において H'_{se} に一致する値を持つ双一次関数である。また、 u_{Re} と u_{He} は非適合変位の値であり合計4個である。これらは、要素剛性作成後に静的縮約により消去される。制約条件としては、界面における表面力の領域平均的な連続条件が課せられる。なお、この要素には界面の方向に対する偽の依存性はないことを確認しているが、その要素剛性は非対称マトリクスとなる。また、要素剛性の積分には、埋め込まれた画像を区分積分領域として用いて評価する。

3. 界面要素を用いた数値解析による検証

3.1 界面ひび割れの非線形構成則⁴⁾

界面の材料構成則は連続損傷力学に基づく。便宜上、界面内部の応力を評価するが、界面幅 $k_e \rightarrow 0$ の極限において不連続変位と表面力の関係に還元されることが、Oliverにより示されている⁴⁾。

本研究では、図-6に示すような応力条件により損傷破壊を開始する等方損傷型の引張軟化モ

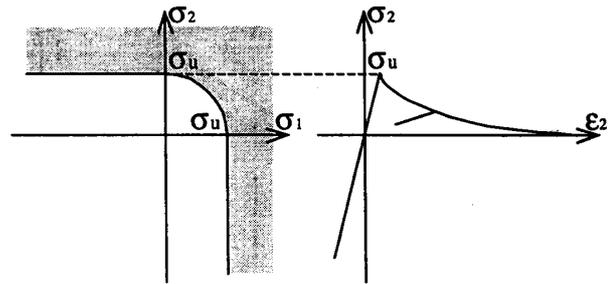


図-6 損傷の発生条件と構成則

デルを用いて、主応力座標系の第3象限では初期剛性を回復するものとする。軟化は、式(2)~式(7)で表される破壊エネルギーを考慮した指数関数型のものであり、除荷は原点への弾性回復として扱う。

$$\sigma = (1-d)C\varepsilon \quad (2)$$

$$d = \begin{cases} 0 & r < r_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp(H(r/r_0 - 1)) & r_0 < r \end{cases} \quad (3)$$

$$r = \max_{\varepsilon \in (-\infty, t)} \{r_0, \tau_s^e\} \quad (4)$$

$$\tau_s^e = \sqrt{\sum_{i=1}^{dim} \langle \bar{\sigma}_i \rangle \varepsilon_i} \quad \bar{\sigma} = C\varepsilon \quad (5)$$

$$\bar{H} = -r_0^2 / G_f \quad (6)$$

$$H = \bar{H}k \quad (7)$$

ここに、すべての定数と変数は界面において定義されるものである。式(2)は行列・ベクトル表記による界面の構成則であり、損傷量 d はスカラー量である。 σ_u は一軸引張強度、 E はヤング係数、 G_f は破壊エネルギー、 $\bar{\sigma}$ は有効応力、 k は界面幅である。また、 $\langle \cdot \rangle$ は主応力座標系において引張成分のみを取ることを表す。損傷量 d は、式(4)から分かるように過去の最大履歴により決定され、それを越えた場合にのみ増加する単調増加な関数である。界面要素内部の応力については、粗骨材、モルタル、界面の各領域でそれぞれ平均化して評価する。

3.2 数値解析結果

2章と同様に、図-2の画像から図-7に示すような界面要素を用いた63x63の有限要素分割モデルを作成した。界面要素以外は通常の4節点四辺形要素であり、境界条件も同様である。ただ

し、この解析では図-5.2に示したような不良な界面要素に関して何ら処理を施していない。界面要素は全要素の約25%であり、界面要素には8x8画素からなる高解像度画像が埋め込まれている。界面の最大幅は $k_p=1.25 \times 10^{-2} \text{cm} \ll 1 \text{cm}$ である。界面のヤング係数 E は、数値的な安定のためにモルタルの99%とした。また、一般に界面の破壊は混合破壊であるため、界面に対する表面力の法線方向成分と接線方向成分との関係によって破壊エネルギー G_f は変化するが、文献7)を参考として本例では一定とした。なお、摩擦により塑性が生じることは考慮していない。非線形方程式の求解法は、軟化を取り扱うものの応力勾配があることから一意な解が得られる可能性が高いと考え、割線剛性法を用いた。

図-8に鉛直方向の平均軸ひずみ-平均軸応力の関係を示す。線形弾性範囲内であるA点の最小主応力を図-9に示す。これは、2章に示した図-4と同じ平均軸応力時のものである。要素分割数の同じ図-4と比べると、界面が滑らかに近似されたことにより、界面近傍での数値的な応力振動はほとんど見られない。界面要素内部の主応力は、粗骨材、モルタル、界面の各領域でそれぞれ平均化して評価しているため、界面を境として不連続となっている。これは界面では表面力は連続となるが、応力は一般に不連続であることから妥当な結果であると考えられる。

非線形領域のB点における要素変形、損傷量分布、最小主応力分布を図-10から図-12に示す。図-11の損傷量分布は、荷重軸方向に多くの界面ひび割れが発生していることが分かる。

ところで、図-12の主応力図において、界面近傍の所々の要素に不合理な応力振動が発生している。この主な理由は、前述の不良な界面要素を修正していないことと、高解像度画像の界面を8-近傍で境界線追跡していることにある。つまり、定式化上の界面要素の非適合変位は、隣り合う界面要素間において連続でなければならないことから、界面要素は4連結^{注1)}でなければならない。しかし、界面は8連結であるために、

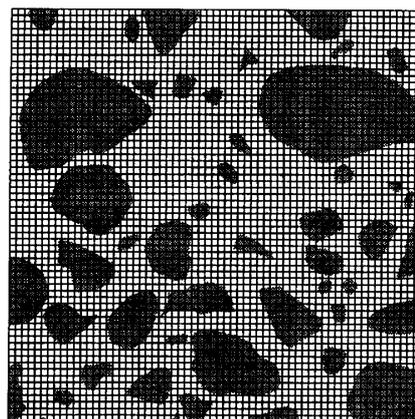


図-7 界面要素を用いた63x63要素分割

粗骨材:
 $E = 70 \text{GPa}$
 モルタル:
 $E = 25 \text{GPa}$
 界面:
 $E = 25 \text{GPa}$
 $G_f = 4.9 \text{N/m}$
 $\sigma_u = 1.2 \text{MPa}$
 共通:
 $\nu = 0.20$

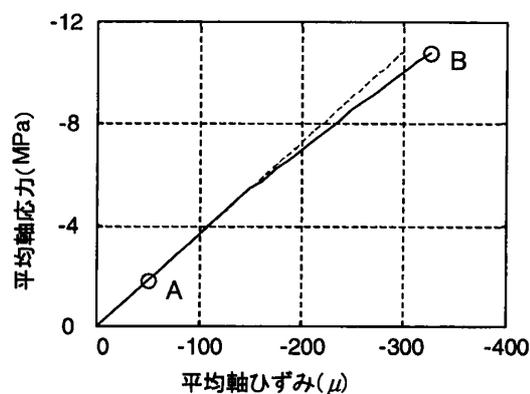


図-8 平均軸ひずみ-平均軸応力の関係

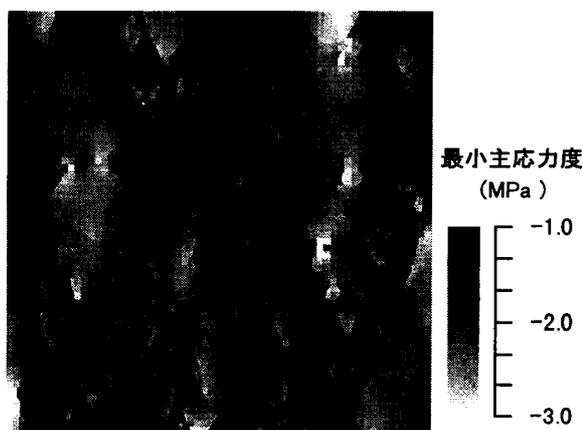


図-9 最小主応力 (A点)

界面要素は所々で8連結となっている。したがって、粗骨材とモルタルを表現する適合要素が、所々で斜め方向に直接に接続されることになり、変形がロックされている。これは、界面要素から界面の幾何学情報を抽出するときに、界面要素が必ず4連結となるように修正し、かつ隣り合

う界面要素を考慮すれば良いと考えられる。

4. まとめ

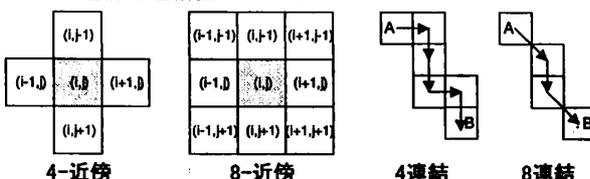
本論文では、コンクリート材料の巨視的な圧縮破壊の数値解析において、非線形挙動のひとつの要因である界面ひび割れを、不連続関数を付加した非適合要素と階層型デジタル画像との組合せで、十分に表現できることを示した。

モルタルあるいは粗骨材中に進展するひび割れや劣化については、今後の検討課題である。このとき、細骨材以下の微細構造に関する非線形挙動は、モルタルの構成則として表現することが妥当であると考えている。

デジタル画像に基づく有限要素解析手法は、精確かつ容易な要素分割モデルの作成が大きな特徴であるため、三次元での詳細な非線形応力解析を行うことが、本研究の目標とするところである。

謝辞：本研究の一部は、平成10年度財団法人竹中育英会の研究助成を受けている。また、本論文の筆頭者は、日本学術振興会の特別研究員である。ここに記して謝意を表す。

注1) 近傍と連結性について



二次元直交格子において、点 (i,j) に着目する。このとき、水平・鉛直方向に隣接する4点 $(i-1,j)$, $(i,j-1)$, $(i+1,j)$, $(i,j+1)$ を4-近傍と呼ぶ。この4点に対角方向に隣接する4点 $(i-1,j-1)$, $(i-1,j+1)$, $(i+1,j-1)$, $(i+1,j+1)$ を加えたものを8-近傍と呼ぶ。隣接要素が4-近傍で定義されているとき、同じ値の2点間に経路（つながっているかどうか）が存在すれば4連結しているといい、8-近傍で定義されている場合には8連結しているという。詳細は、文献8)などを参照のこと。

参考文献

- 1) Hollister S. J. and Kikuchi N. : Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotech. Bioeng.*, Vol. 43, No. 7, pp. 586-596, 1994.
- 2) 永井学志, 山田貴博, 和田 章 : 三次元実画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析手法, *日本建築学会構造系論文集*, Vol. 509, pp. 77-82, 1998.7
- 3) Schlangen E. : Computational aspects of fracture simulations with lattice models, *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Ed. by F. H. Wittmann,

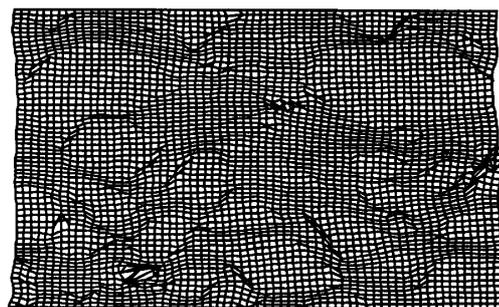


図-10 要素変形 (B点)

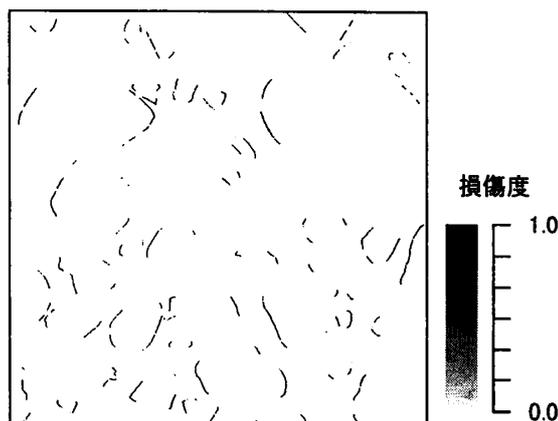


図-11 損傷量分布 (B点)

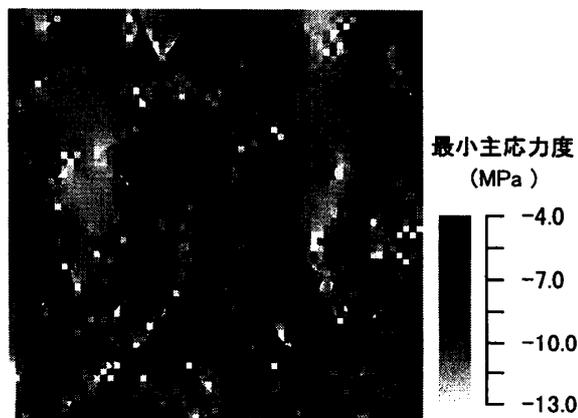


図-12 最小主応力 (B点)

AEDIFICATIO Publishers, pp. 913-928, 1995

- 4) Oliver J. : Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: fundamentals & Part II: numerical simulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3601-3623, 1996
- 5) 永井学志, 山田貴博, 和田 章 : 固定格子のための滑らかな界面を含む混合型有限要素の開発, *計算工学講演会論文集*, Vol. 2, pp. 393-396, 1998.5
- 6) 呉 智深, 町田篤彦, 高 東劭 : 一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, *土木学会論文集*, No. 598/I-44, pp. 149-159, 1998.7
- 7) Lee K. M., Buyukozturk O, Oumera A : Fracture analysis of mortar-aggregate interfaces in concrete, *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 118, No. 10, pp. 2031-2047, 1992.10
- 8) Rosenfeld A., Kak A. C. (長尾 真 監訳) : デジタル画像処理, 近代科学社, 1978