# 211　骨梁格子連続体モデルのパラメータの決定

神戸大学工学部　正 ○ 安達泰治
神戸大学工学部　正　冨田佳宏
大阪大学基礎工学部　正　田中正夫
神戸大学大学院　　松井　修

**1. 緒言**　内部に微視的な骨梁構造を有する海綿骨の力学モデルは，巨視的な材料定数と骨梁密度との関係として表現されることが多い [1, 2]．しかしながら，各種細胞の活動による再構築 [3] と密接に関係するであろう骨梁レベルでの応力やひずみなどの力学因子を連続体的取扱いにより評価するためには，その構造を反映したモデル化が必要となる．前報 [4] において，著者らは，骨梁構造を考慮する海綿骨の連続体モデルとして格子連続体モデルを示し，その基本的な特性について検討を行った．本報では，海綿骨の骨梁構造の特徴量 [5] の計測により，そのモデルに含まれる構造を表すパラメータの決定を試みる．

**2. 海綿骨の格子連続体モデル**　著者らの示した海綿骨の格子連続体モデルの二次元構成式を示し，見かけの材料定数に含まれる骨梁構造パラメータについて述べる．

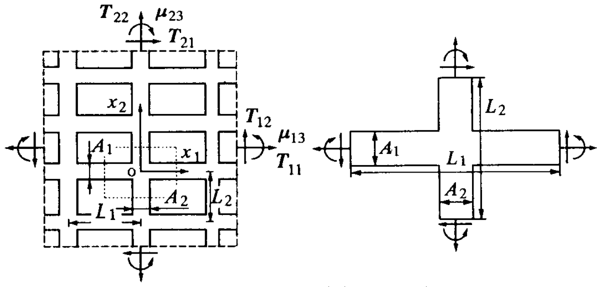
骨梁構造を有する海綿骨と等価な連続体の二次元モデルとして，Fig.1(a) に示す離散的な単位厚さの剛節骨組格子が連続的に分布したものを考える．格子群より Fig.1(b) の単位格子を取り出し，構造の主軸を座標軸 $x_i$ に一致させる．$x_i$ 軸方向の格子間隔を $L_i$，部材 $i$ の断面積を $A_i$，$x_i$ 軸に垂直な断面において部材 $i$ の占める割合，すなわち部材断面積比を $S_i(=A_i/L_j)$ とする．なお本報では，添え字 $i, j(i{\neq}j)$ は総和規約に従わないものとする．

格子連続体の構成式は，偶応力理論 [6] に基づき

$$\sigma_{ii}=\bar{E}_i\gamma_{ii},\quad \sigma_{ij}=2\bar{G}_{ij}\gamma_{ij},\quad m_{i3}=4\bar{G}_{ij}\bar{L}_i^2\kappa_{3i} \qquad (1)$$

$$\bar{E}_i=E_iS_i,\quad \bar{L}_i=(L_i/4)\sqrt{\left\{1+(E_iS_i^3L_j^4)/(E_jS_j^3L_i^4)\right\}/3},$$
$$\bar{G}_{ij}=(E_iE_jS_i^3S_j^3L_i^2L_j^2)/(E_iS_i^3L_j^4+E_jS_j^3L_i^4)$$

と表される [4]．ここで，$\sigma_{ij}$ は応力 $T_{ij}$ の対称部を，$m_{i3}$ は偶応力 $\mu_{i3}$ の偏差部を表している．また，$\gamma_{ij}, \kappa_{3i}$ は，それぞれひずみテンソル，曲率テンソルを表す．見かけの材料定数 $\bar{E}_i, \bar{G}_{ij}, \bar{L}_i$ は，骨材料のヤング率 $E_i$，および微視構造を反映するパラメータである格子間隔 $L_i$，部材断面積比 $S_i$ を用いて表される．これらのうち，$L_i$, $S_i$ および構造の主軸方向 $\theta_i$ が本報において決定するパラメータである．




(a) Lattice continuum.　(b) Basic element cross.
Fig.1 Microstructure model of bone.

**3. 骨梁構造の形態特徴量の計測**　骨梁構造の形態の特徴量として，ファブリックテンソルと面積率をとりあげ，牛尾椎海綿骨に対してそれらの計測を行う．

**3·1　試料と測定方法**　試料として，成牛尾椎より切り出した厚さ約 5mm の海綿骨切片を用いる．骨髄の除去後，切断面表面を黒インクで着色し，CCD カメラで正方画像 (300×300 画素) を取り込み，画像処理装置 (TVIP-2000, NACL 製) を用いて二値化する．このデータをもとに，コンピュータを用いてファブリックテンソル，面積率を計測する．

**3·2　配向性と特徴長さ**　ファブリックテンソル $\boldsymbol{H}$ は，骨梁構造の配向性を表現する正定二階の対称テンソルであり [7]，任意の $\theta$ 方向の直線が，骨梁と骨髄の界面を横切る平均的な長さ $L(\theta)$ (Mean Intercept Length; MIL) の形成する楕円体を表す．二次元の場合は，

$$\frac{1}{L(\theta)^2}=M_{11}\cos^2\theta+M_{22}\sin^2\theta+2M_{12}\sin\theta\cos\theta \qquad (2)$$

と表される．$M_{ij}$ を成分とするテンソル $\boldsymbol{M}$ は，ファブリックテンソル $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M}^{-1/2}$ の関係にある．ファブリックテンソル $\boldsymbol{H}$ の主方向は，構造の主軸を表し，その主値は，主軸方向の骨梁構造の特徴的な長さを表す．さらに，$L(\theta)$ を骨梁部分 $L_b(\theta)$ と骨髄部分 $L_m(\theta)$ に分けると，

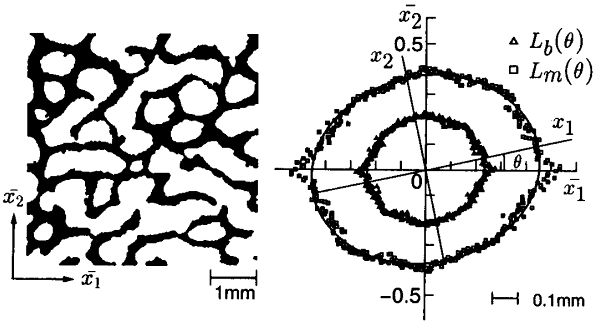
$$L(\theta)=\frac{L_b(\theta)+L_m(\theta)}{2} \qquad (3)$$

が成り立つ．これら $L_b(\theta)$, $L_m(\theta)$ は，式 (2) と同様の形式で楕円に近似され，それぞれ，$\boldsymbol{H}_b$, $\boldsymbol{H}_m$ で表すと，明らかに $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}_b$ および $\boldsymbol{H}_m$ の主軸は一致し，それらの主値 $H_i$, $H_{bi}$ および $H_{mi}$ の間に，

$$H_i=\frac{H_{bi}+H_{mi}}{2} \qquad (4)$$

の関係が成立する．

Fig.2(a) に示す切断面画像に対して計測を行うと，Fig.2(b) に三角で示す $L_b(\theta)$ と，四角で示す $L_m(\theta)$ の計測値が得られ，同図中実線で示す楕円に近似することができる．この結果より，主方向は，$\bar{x}_1$ 軸より $\theta_1$=11.6° であった．各ファブリックテンソルの主値を Table 1 に示す．




(a) 2D image. (b) Fabric ellipse $\boldsymbol{H}_b$, $\boldsymbol{H}_m$.
Fig.2 MIL measurement of cancellous bone.

**3·3 面積率** 骨梁構造の量的な測度として，二次元断面より得られる面積率 $S_{b3}$ を計測する．面積率 $S_{b3}$ は，Fig.2(a) に黒で示す骨梁面積 $A_b$ と白で示す骨髄面積 $A_m$ とを合わせた全面積に対する骨梁面積 $A_b$ の比であり，

$$S_{b3} = \frac{A_b}{A_b + A_m} \tag{5}$$

と求められる．一方，座標軸 $x_i$ をファブリックテンソルの主軸に一致させたとき，$x_i$ 軸方向に垂直な断面における面積率 $S_{bi}$ は，ファブリックテンソルの主値を用いて，

$$S_{bi} = \frac{H_{bj}}{H_{bj} + H_{mj}} \tag{6}$$

と表される．これらの面積率 $S_{bi}$ は，すべて等しく $S_b$ となり，また，体積率 $V_b$ に一致する [5].

$$S_{b1} = S_{b2} = S_{b3} = S_b = V_b \tag{7}$$

Fig.2(a) の画像に対して，式 (5) より面積率は，$S_{b3} = 0.33$ となり，これは，Table 1 の右列に示す式 (6) より求められた値とほぼ一致している．

**4. 構造パラメータの決定**

前節において計測した骨梁構造の特徴量を用いて，式 (1) に示した格子連続体モデルの構成式に含まれる構造パラメータ $\theta_i$, $L_i$, $S_i$ の決定を試みる．

**4·1 主軸方向 $\theta_i$** 3.2 節で求めた $L_b(\theta)$, $L_m(\theta)$ が近似的に楕円を示すことから，骨梁構造は，$\theta_i$ 方向の主軸 $x_i$ に対して対称性を有する．この骨梁構造と等価な格子連続体を考えた場合，その主軸方向は，ファブリックテンソルの主方向と一致すると考えられる．すなわち，Fig.2(a) の骨梁構造に対して，$\theta_1$=11.6°, $\theta_2$=101.6° が求められる．

**4·2 格子間隔 $L_i$** 格子連続体の単位格子 (Fig.1(b)) に対して，$\boldsymbol{H}_b$, $\boldsymbol{H}_m$ の主値は，それぞれ $A_i$, $L_i$ を用いて，

$$H_{bi} = \frac{L_j - A_i}{L_j} A_j + \frac{A_i}{L_j} L_i = \frac{A_i L_i + A_j L_j - A_i A_j}{L_j} \tag{8}$$

$$H_{mi} = \frac{(L_j - A_i)(L_i - A_j)}{L_j} \tag{9}$$

と表される．単位格子に対する骨梁面積 $A_b$ と骨髄面積 $A_m$

$$A_b = A_1 L_1 + A_2 L_2 - A_1 A_2 \tag{10}$$

Table 1 Eigen values of fabric ellipse.

| $i$ | $H_{bi}$ (mm) | $H_{mi}$ (mm) | $H_i$ (mm) | $H_{bi}/(H_{bi}+H_{mi})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.23 | 0.46 | 0.35 | 0.34 |
| 2 | 0.21 | 0.37 | 0.29 | 0.36 |

$$A_m = (L_1 - A_2)(L_2 - A_1) \tag{11}$$

を用いると，式 (8), (9) より，

$$H_{bi} = \frac{A_b}{L_j}, \qquad H_{mi} = \frac{A_m}{L_j} \tag{12}$$

が得られる．ここで，式 (4), (12) の関係を考慮すると，

$$H_i = \frac{H_{bi} + H_{mi}}{2} = \frac{A_b + A_m}{2L_j} = \frac{L_i L_j}{2L_j} = \frac{L_i}{2} \tag{13}$$

の関係が導かれる．すなわち，格子間隔 $L_i$ は，ファブリックテンソルの主値 $H_i$ の 2 倍となっており，Table 1 より，$L_1$=0.69mm, $L_2$=0.58mm が求められる．

**4·3 部材断面積比 $S_i$** 4.2 節において，格子間隔 $L_i$ が求められたとき，部材断面積比 $S_i$ を決定するためには，$S_i$ の定義より部材断面積 $A_i$ を求めればよい．しかしながら，式 (7) の関係が存在するため，3.3 節の式 (5) および式 (6) で求められる面積率からは構造の方向に依存した量を決定することはできない．これは，格子連続体に対しても同様であり，$A_1$ と $A_2$ の関係が一つ得られるのみである．したがって，$S_i$ を今回の形態計測量のみで決定することはできない．

**5. 結言** 骨梁構造を有する海綿骨の格子連続体モデルに含まれる形態的な特徴を表すパラメータの決定を試みた．まず，牛尾椎海綿骨の切断面に対して，形態特徴量であるファブリックテンソルおよび面積率の測定を行った．これらの値を用いて，格子連続体モデルの主軸方向と格子間隔を決定することができた．しかしながら，格子部材断面積比の決定においては，ファブリックテンソルの主値と骨梁部分のファブリックテンソルの主値の比が，面積率と等しくなることから，部材断面積を決定することができず，それらの間のひとつの関係が得られたのみである．今回の形態計測量のみでは，格子の方向に依存する量的な情報を抽出することができないため，その他の形態特徴量についてさらに検討する必要がある．本研究に対して，文部省科学研究費および神戸大学自然科学研究科共同研究等推進費の援助を受けた．記して謝意を表す．

**参考文献**

[1] Carter, D.R., *et al.*, *J. Bone Jt Surg.*, **59A** (1977) 954.
[2] Hodgskinson, R., *et al.*, *J. Mat. Sci.*, **3** (1992) 377.
[3] Cowin, S.C., *Trans. ASME. J. Bioeng.*, **113** (1991) 191.
[4] Adachi, T., Tomita, Y. & Tanaka, M., Proc. 37th Japan Congress on Material Research, (1994), 掲載可.
[5] Whitehouse, W.J., *J. Microscopy*, **101** (1974) 153.
[6] Koiter, W.T., *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **B-67**(1964)17.
[7] Cowin, S.C., *Trans. ASME. J. Bioeng.*, **108** (1986) 831.