

○九州大学 正 汪 文学、North Carolina State University F.G. Yuan、
九州大学 正 高雄 善裕

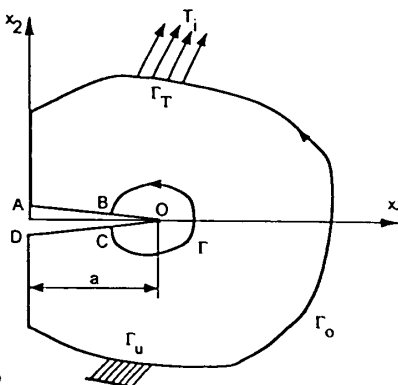
1. はじめに

材料あるいは構造物の時間依存性破壊は高温機器の金属部品、高分子材料、高分子系複合材料などによく見られる破壊現象である。原子炉や航空機ジェットエンジンなどの高温環境に使用される金属部品が使用時間の増加と共にクリープ状態下のクラック進展によって破壊していく現象はその代表的な例として挙げられる。また、高分子材料や高分子系複合材料の粘弾性・粘塑性破壊も時間依存性の特徴を持っている。従来のエネルギー解放率 G 、応力拡大係数 K 、経路に依存しない J 積分をベースにした破壊力学は、基本的に材料の性質が時間に依存しない材料の破壊を研究対象とした学問であるので、材料の性質が使用時間に伴って変化する材料の破壊においては適用し難い。そこで、時間依存性破壊力学の研究が理論的にも実用的にも必要である。70年代後半から今日まで、多くの研究¹⁻⁶⁾が発表されているが、これらはいずれもある特定の条件における研究で、一般的に適用可能、明瞭な物理の意味を持ち、計算かつ実験で求められる統一的な時間依存性破壊はまだ見つけられていない。そこで、本研究では、エネルギー法と従来の研究についての考査に基づいて、一般的な時間依存性材料に適用できる、経路に依存しない新しい積分 $J_r(t)$ を導出した。現存の各特定の条件下の破壊力学はいずれも $J_r(t)$ の特殊なケースとして考えられることから、これをベースに統一的な時間依存性破壊力学パラメータを提案する。

2. 経路に依存しない積分 $J_r(t)$ の導出

図1に示す長さ a の亀裂を有する解析モデルを考える。モデルの材料を一般的な時間依存性材料とする。 Γ_o と Γ はそれぞれ亀裂表面を除いたモデルの境界とモデル内で亀裂先端を時計方向と逆に一周する任意の積分経路を表す。 Γ_r と Γ_u はそれぞれ外力と変位が与えられた境界面上の局部領域を表す。負荷条件として与えられた外力 T_i は定常外力とし、境界条件として与えられた変位は亀裂によらないとする。

本研究が静的な、Fig.1 A two-dimensional cracked body



2 次元および微小変形の問題に限られる。任意時刻 t における応力 σ_y 、ひずみ ϵ_y 、変位 u_i を

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_y(x_i, t; a), \quad \epsilon_y = \epsilon_y(x_i, t; a), \\ u_i &= u_i(x_i, t; a), \quad i, j = 1, 2\end{aligned}\quad (1)$$

とすれば、時間増分 Δt に伴う物体のトータルポテンシャルエネルギーの増分は次のような式で表せる。

$$\Delta \Pi = \int_{A_o} \sigma_y \Delta \epsilon_y dA - \int_{\Gamma_r} T_i \Delta u_i ds \quad (2)$$

ここで、右辺の第1と第2項はそれぞれ応力仕事の増分と外力仕事の増分と呼ぶ。また、重複下添字は Einstein 和、 A_o は Γ_o と亀裂表面で囲まれた積分領域を示す。

式(2)を時間増分 Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を求めると、

$$\dot{\Pi} = \int_{A_o} \sigma_y \dot{\epsilon}_y dA - \int_{\Gamma_r} T_i \dot{u}_i ds \quad (3)$$

を得る。式(3)を、亀裂長さがそれぞれ a と $a + \delta a$ である違いを除けばまったく同じの両物体に適用し、 δa による $\dot{\Pi}$ の変化率を考えると

$$\delta(\dot{\Pi}) / \delta a = \delta(\int_{A_o} \dot{W} dA) / \delta a - \delta(\int_{\Gamma_r} T_i \dot{u}_i ds) / \delta a \quad (4)$$

が得られる。ここで、

$$\dot{W} = \sigma_y \dot{\epsilon}_y \quad (5)$$

は応力仕事率密度である。積分領域 A_o 、 A_r 及び Γ_i と境界 Γ_r は両物体において同じ、 $A_o - A_r$ がき裂先端の特異点を含まないの、式(4)は次のように書き換える。

$$\begin{aligned}\delta(\dot{\Pi}) / \delta a &= \int_{A_o - A_r} \delta \dot{W} / \delta a dA + \delta(\int_{A_r} \dot{W} dA) / \delta a \\ &\quad - \int_{\Gamma_r} T_i \delta \dot{u}_i / \delta a ds\end{aligned}\quad (6)$$

上式の第1項と第3項の亀裂長さ a についての微分は物理的な意味の微分で、亀裂先端の座標系 $X_i = x_i - a \delta_{ii}$ を用いれば次のような偏微分

$$\delta / \delta a = \partial / \partial a + (\partial / \partial X_i)(\partial X_i / \partial a) = \partial / \partial a - \partial / \partial x_i \quad (7)$$

で置き換えられる。ここで、 δ_{ij} は Kronecker Delta 関数であり、亀裂が自己相似的に進展すると仮定している。又、式(6)の第2項の幾何学的解析⁷⁾により、

$$\delta(\int_{A_r} \dot{W} dA) / \delta a = \int_{A_r} \delta \dot{W} / \delta a dA - \int_{\Gamma_r} \dot{W} n_i ds \quad (8)$$

が得られる。ここで、 n_i は x_i と積分経路の外向き法線方向余弦である。式(7)、(8)を式(6)に代入し、更に、次の Gauss の定理及び仮想仕事原理

$$\int_{A_o - A_r} \delta \dot{W} / \partial x_i dA = \int_{\Gamma_r} \dot{W} n_i ds - \int_{\Gamma_u} \dot{W} n_i ds \quad (9)$$

$$\int_{A_o} \sigma_y \partial \dot{\epsilon}_y / \partial a dA = \int_{\Gamma_r} T_i \dot{u}_i / \partial a ds \quad (10)$$

を適用すれば、

$$-\delta \dot{\Pi} / \delta a = \int_{\Gamma_r} (\dot{W} n_i - T_i \dot{u}_i / \partial x_i) ds - \int_{A_o} \dot{\epsilon}_y \partial \sigma_y / \partial a dA \quad (11)$$

が得られる。上式から経路に依存しない積分を導くため、積分経路を次の環状経路とした線積分

$$I = \int_{\Gamma_r} (\dot{W} n_i - T_i \dot{u}_i / \partial x_i) ds, \quad \Gamma_r = \Gamma_o + AB - \Gamma + CD \quad (12)$$

を考査する。ここで、 AB と CD は図1に示す部分亀裂表面で、亀裂先端が Γ_r に含まれていない。よって、

Gauss の定理及び

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \partial \sigma_{ij} / \partial x_i = 0 \quad (13)$$

を式(12)に適用すれば、

$$I = \int_{A_0} \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i dA \quad (14)$$

を得る。一方、式(12)の積分は AB と CD でゼロとなるので、式(14)と合わせれば、

$$\int_{\Gamma} (W n_i - \sigma_{ij} n_j \partial u_i / \partial x_i) ds - \int_{\Gamma} (W n_i - \sigma_{ij} n_j \partial u_i / \partial x_i) ds \\ = \int_{A_0} \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i dA \quad (15)$$

が得られる。上式の右の項の積分関数がき裂先端において一般的に積分できない特異性を持つため、右の面積分を簡単に A_0 と A_1 における積分に置き換えることができない。このため、き裂先端を囲む小さい領域 A_0 を考える。 A_0 が十分に小さいとすれば、き裂先端の応力集中により、クリープ変形が A_0 で支配的になり、ひずみ率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ が応力 σ_{ij} だけに依存し、両者の関係が非線形弾性的な関係と仮定できる。そうすると、 A_0 において、弾性力学のひずみと余ひずみエネルギー密度関数のように、次のような数学的なポテンシャル関数

$$\dot{W}_c = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \beta \dot{W}, \quad \sigma_{ij} = \partial \dot{W}_c / \partial \dot{\epsilon}_{ij} \quad (16)$$

$$\dot{W}_c = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} d\sigma_{ij} = \dot{W} - \dot{W}_c, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \partial \dot{W}_c / \partial \sigma_{ij} \quad (17)$$

が得られる。ここで、 β は $\dot{\epsilon}_{ij}$ の特異性を表す定数である。つまり、 $r \rightarrow 0$ のとき、 $\dot{\epsilon}_{ij} \rightarrow r^{-\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^*(\theta, t, a)$ 。

よって、式(15)~(17)により、

$$\int_{\Gamma} (\beta \dot{W} n_i - \sigma_{ij} n_j \partial u_i / \partial x_i) ds \\ = \int_{A_0-A_1} [\beta \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\beta) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i] dA \quad (18)$$

$$\beta \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\beta) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i \\ = \partial \dot{W}_c / \partial x_i - (1-\beta) \dot{W}_c = 0, \quad \text{in } A_0 \quad (19)$$

を得る。ゆえに、式(18)、(19)より、次のような経路に依存しない積分 $J_r(t)$

$$J_r(t) = \int_{\Gamma} (\beta \dot{W} n_i - \sigma_{ij} n_j \partial u_i / \partial x_i) ds \\ - \int_{A_0-A_1} [\beta \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\beta) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i] dA \quad (20)$$

を得る。更に、式(7)、(9)、(11)、(20)より、

$$J_r(t) = -\delta \Gamma / \delta a - \{ \delta \int_{A_0} (\beta - 1) \dot{W} dA / \delta a \\ - \int_{A_0} [\beta \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\beta) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i] dA \} \quad (21)$$

あるいは、

$$J_r(t) = -\delta \left(\int_{\Gamma} T_i u_i ds \right) / \delta a - \{ \delta \left(\int_{A_0} \beta \dot{W} dA \right) / \delta a \\ - \int_{A_0} [\beta \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\beta) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i] dA \} \quad (22)$$

が得られる。式(21)、(22)は $J_r(t)$ の物理的意味を表しており、 $J_r(t)$ を求める実験方法を検討するときに便利である。

3. $J_r(t)$ と従来のパラメータとの関係

まず、 $J_r(t)$ と J 積分の関係を考察する。通常の J 積分式

$$J = \int_{\Gamma} (W n_i - T_i \partial u_i / \partial x_i) ds \quad (23)$$

$$W = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \partial W / \partial \dot{\epsilon}_{ij} \quad (24)$$

の代わりに、本研究では、次のような式を J 積分と定義する。即ち、

$$J = \int_{\Gamma} (\gamma \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} n_i - T_i \partial u_i / \partial x_i) ds \\ - \int_{A_0} [\gamma \dot{\epsilon}_{ij} \partial \sigma_{ij} / \partial x_i - (1-\gamma) \sigma_{ij} \partial \dot{\epsilon}_{ij} / \partial x_i] dA \quad (25)$$

ここで、 γ は $\dot{\epsilon}_{ij}$ の特異性を表す定数である。つまり、 $r \rightarrow 0$ のとき、 $\dot{\epsilon}_{ij} \rightarrow r^{-\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^*(\theta, t, a)$ 。

積分領域 A_0 において式(24)が成立すれば、式(25)の第2項がゼロとなり、式(25)は式(23)と等しくなる。しかし、式(24)の関係が積分領域 A_0 の全域ではなく、き裂先端を囲む小さい領域しか有効ではない場合でも、式(25)は依然経路に依存しない積分である。よって、式(25)は、式(23)より材料の構成式に対する制限が緩いため、もっと一般的な経路に依存しない積分と考えられる。一方、式(25)と式(20)を比べると、 $J_r(t)$ は式(25)の J 積分と同じ関数形式を持っている。従って、 $J_r(t)$ も一種の J 型の経路に依存しない積分である。

次に、 $J_r(t)$ と $C(t)$ の積分

$$C(t) = \lim(\rho \rightarrow 0) \int_{\Gamma} [(n/(n+1)) \dot{W} n_i - \sigma_{ij} n_j \partial u_i / \partial x_i] ds \quad (26)$$

の関係を調べる。式中の n は次の構成方程式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = [(1+\nu)/E] \dot{\epsilon}_{ij} + [(1-2\nu)/3E] \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + (3/2) B \dot{\sigma}^{n-1} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (27)$$

に示すクリープ指数である。き裂先端近傍においてクリープ変形が支配的になるので(つまり、式(27)の第3項が支配的になる)、弾塑性破壊のHRR特異性との類似性により、き裂先端近傍の応力とひずみ率は近似的に

$$\sigma_{ij} = [C(t)/B I_n r]^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, t, a) \quad (28)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = [C(t)/B I_n r]^{n/(n+1)} \dot{\epsilon}_{ij}(\theta, t, a) \quad (29)$$

で表せる。ここで、 I_n はクリープ指数 n の関数である。式(28)、(29)より、 $C(t)$ は理論的に時間依存性破壊力学の負荷パラメータとして適当であることがわかる。しかし、式(26)の積分は無限小経路に限られるため、実験的に計測できなく、形式的なパラメータとなっている。一方、式(20)の積分経路を式(26)の $C(t)$ と同じ経路とすると、式(20)の第2項の面積分がゼロとなり、 β が $n/(n+1)$ となるので、

$$J_r(t)|_{r=r_0} = C(t) \quad (30)$$

が得られる。上式により、 $C(t)$ は $J_r(t)$ の特殊な1ケースである。従って、 $J_r(t)$ の経路に依存しない性質及び式(22)のような実験的に計測できる形式により、 $J_r(t)$ は時間依存性破壊力学の統一的な負荷パラメータとして適当と考えられる。故に、時間依存性破壊の判定式を

$$J_r(t) = J_{rc} \quad (31)$$

と定義できる。 J_{rc} は実験で求めた $J_r(t)$ の限界値である。

参考文献 1. Landes, J.D. & Begley, ASTM STP, 590, 128-148, (1976). 2. Ohji ら、機論、42, 350-358, (1976). 3. Nokbin, K.M. et al., ASTM STP 601, 47-62, (1976). 4. Bassani, J.L. & McClintock, F.A., Int. J. Solids Struc., 17, 479-492, (1981). 5. Atluri, S.N., Eng. Fract. Mech., 16, 341-364, (1982). 6. Stonesifer, R.B. & Atluri, S.N., Eng. Fract. Mech., 16, 625-643, (1982). 7. Rice, J.R., in Fracture II, (Liebowitz, ed.), 192-308, (1968).