セラミックスの強度と破壊の統計的様相と確率モデル

豊田工業大学 ○上野　明
明石工業高等専門学校 境田彰芳
京都大学大学院エネルギー科学研究科 星出敏彦
愛媛大学工学部 岡部永年
石川島播磨重工業（株） 鈴木章彦

1．緒　言

セラミックス材料の破壊は，材料の製造時に導入される各種欠陥（空孔・介在物・異常成長粒子　等）ないしは，機械加工による成形時に導入される欠陥（加工傷　等）を起点として起こる．これらの欠陥の寸法は大きくばらつくため，破壊強度も通常の金属材料と比較して非常に大きなばらつきを有する．また，セラミックスは典型的な脆性材料であり，室温では塑性変形しない．破壊靭性値は，高靭性化の多くの試みが行われている現在でも依然として低いため，欠陥に大きな外力が作用すると，損傷許容性がないために，ほとんど瞬時に崩壊的に破壊する．このため，高強度・軽量・耐熱・耐摩耗等優れた特性を有し構造材料として注目されているが，なかなか実用化されないのが現状である．以上の問題に対処すべく，破壊強度のばらつきを統計的に評価し，セラミックス材料の信頼性を保証する研究が数多く行われている．本稿では，セラミックス材料を構造材料として用いる場合の各種強度の確率分布特性と，強度の信頼性を保証する上で有用となるであろう代表的な確率モデルを紹介する．

2．各種強度の確率分布特性

前述のように，セラミックスは一部の例外（非常に急峻な応力勾配場の場合）を除き，材料中に含まれる欠陥の内最大のものから破壊するため，最弱リンク説[1]が適用でき，極値統計論から最小値の漸近分布（２重指数分布，ワイブル分布等）で整理できることになる[2]．以下に，代表的な強度特性値の確率分布特性を調べた具体例を示す．

2．1　曲げ強度の確率分布特性

単純形状の小さな寸法の試験片で強度を測定できることから，曲げ試験はセラミックスの強度評価に最もよく用いられる．以下では，日本材料学会疲労部門委員会セラミックス強度研究分科会がガス圧焼結窒化ケイ素（日本特殊陶業(株)製EC-141）と常圧焼結アルミナ（(財)ファインセラミックスセンター製リファセラムAL-1）を用いて行ったラウンドロビンテスト（以下RRT）の結果[3),4)]を紹介する．曲げ強度に及ぼす研削仕上加工の影響を調べるために，仕上研削は，#400砥石を用いたもの(Rough Finishing；RF材)と#800砥石を用いたもの(Fine Finishing；FF材)が設定され，最終的に得られた有効なデータ数は，アルミナRF材287点，同FF材291点，窒化ケイ素RF材281点，同FF材277点である．

Fig. 1は，窒化ケイ素RF材の曲げ強度をワイブル確率紙にプロットした例である．累積破壊確率Fは$F=(i-0.5)/n$（iは順序数，nはサンプルサイズ）で算出した．各図中の実線は，次式で与えられる３母数ワイブル分布関数を示し，破線は式(1)の位置母数cを0と置いた２母数ワイブル分布関数を示す．位置母数の推定には相関係数法を用いた．

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

２母数ワイブル分布よりも３母数ワイブル分布を用いた方が，曲げ強度のばらつきをより良く近似できることがわかる．FF材の結果も含めた解析結果をTable Iに示す．FF材の位置母数は0に近いため，２母数ワイブルと３母数ワイブルの結果はほとんど等しいが，位置母数推定の労をいとわなければ，３母数ワイブル分布の方が優れていることがわかる．なお，セラミックスの強度のばらつきの指標としてよく用いられるワイブル係数mは，２母数ワイブル分布関数における形状母数aと同じである．２母数ワイブル分布の場合，この値が大きいほど強度のばらつきは小さいことを意味するが，表の値のように，形状母数aの値は10より小さい場合もあり，セラミックスの強度のばらつきは非常に大きいことがわかる．なお，その他の負荷形式（引張，ねじり，圧縮）および高温における破壊強度にも２母数ないしは３母数のワイブル分布がよく用いられる．

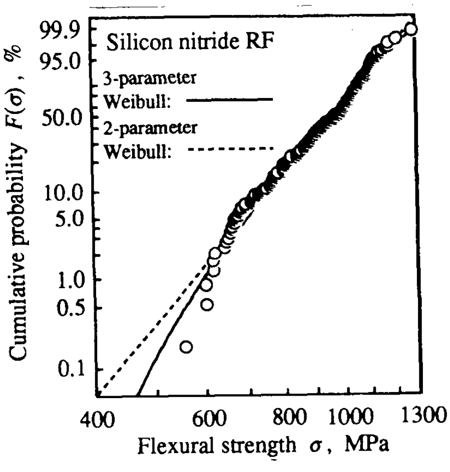

Fig. 1. Examples of Weibull plots of RRT data.

Table I. Results of statistical analysis of RRT data.

Classification	Sample size n	Shape parameter a	Scale parameter b (MPa)	Location parameter c (MPa)
Alumina RF	287	6.02 23.27	114.09 383.91	269.21 –
Alumina FF	291	21.08 21.10	381.98 382.23	0.25 –
Silicon nitride RF	281	5.52 8.28	713.74 997.55	282.07 –
Silicon nitride FF	277	9.06 9.07	1035.11 1035.66	0.55 –

2．2　破壊靱性値の確率分布特性

一軸応力場におけるセラミックスの破壊は，線形破壊力学を適用すると，破壊の起点となる欠陥の応力拡大係数がその材料の破壊靭性値K_{IC}に達した時に起こると考えられている．K_{IC}は材料定数的に扱われるが，実際には製造ロットの違い等に起因する素材特性の違いによりばらつく．K_{IC}の確率分布特性を調べた研究はあまり多くないが，以下では田中らの解析例を紹介する．田中ら[5]は，BI法で予き裂を導入したJIS曲げ試験片を用いてSEPB法により，室温および高温で常圧焼結窒化ケイ素のK_{IC}を測定した．Fig. 2は実験結果を正規確率紙にプロットした例である．ワイブル確率紙上でもプロットはほぼ直線にのることから，破壊靭性値は，正規分布ないしは２母数ワイブル分布でよく近似され，特に３母数ワイブル分布を用いる優位性はないと述べている．２母数ワイブル分布で近似した場合の形状母数a（ワイブル係数m）は，室温で40.11，1000℃と1200℃ではそれぞれ37.45と21.09であり，温度上昇とともにばらつきは増えるものの，Table I, IIの結果と比較すると，K_{IC}のばらつきは非常に少なく，強度のばらつきに与える影響は少ないと考えられる．なお，他の例では，３母数ワイブル分布の適合性が良いという報告[6]もある．

2．3　疲労寿命の確率分布特性

前項の破壊強度と同様，セラミックスの場合，疲労寿命のばらつきは非常に大きいことが知られており，疲労寿命の確率分布特性を調べた研究は多い．以下では，酒井ら[7]が常圧焼結アルミナ製の試験片を用いて片持ち式の回転曲げ疲労試験を行って繰返し疲労寿命分布を調べた例を示す．Fig. 3は，５応力レベルで得られた破断寿命をワイブル確率紙にプロットした例である．図中の曲線はそれぞれ，式(1)の３母数ワイブル分布関数を示す．負荷応力の大小にかかわらず，３母数ワイブル分布でよく近似できることがわかる．なお，Table IIに２母数ワイブル分布を適用した場合を含めた解析パラメータを示す．この場合も形状母数は寿命のばらつきの度合いの指標となるが，先のTable Iの値よりも形状母数はさらに小さく，Fig. 3からもわかるように，寿命は５桁以上にもおよぶ極めて大きなばらつきを伴うことがわかる．なお，静疲労寿命，その他の負荷形式および高温における結果もおおむね同じ傾向を示す．

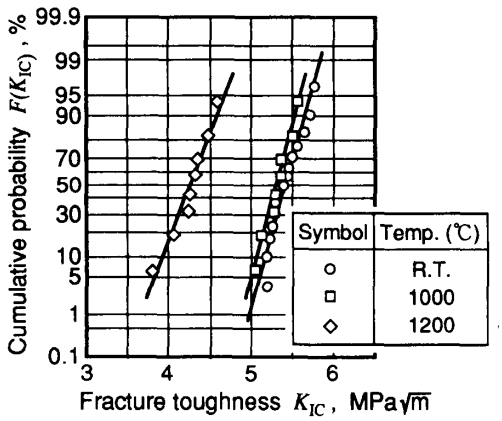

Fig. 2. Distributions of fracture toughness at room and elavated temperature.

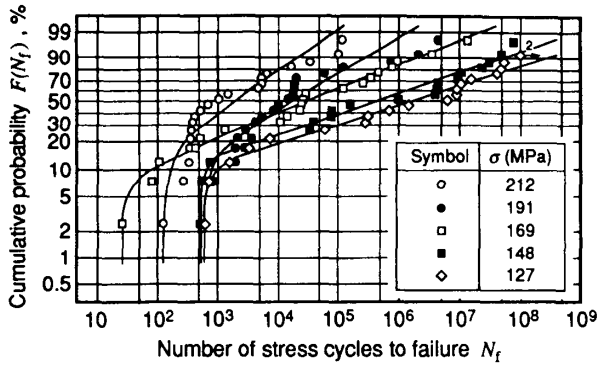

Fig. 3. Example of fatigue life distribution in alumina.

Table II. Results of statistical analysis of *P-S-N* data.

Applied stress σ (MPa)	Shape parameter a	Scale parameter b (cycles)	Location parameter c (cycles)
127	0.228 0.300	7.52×10^6 5.78×10^6	5.95×10^2 –
148	0.239 0.320	1.83×10^6 1.87×10^6	5.41×10^2 –
169	0.292 0.342	1.21×10^6 1.18×10^6	2.66×10^1 –
191	0.405 0.566	4.44×10^6 4.57×10^6	5.91×10^2 –
212	0.481 0.686	4.02×10^6 4.38×10^6	1.24×10^2 –

3．破壊強度の確率モデル

セラミックスの破壊強度を推定するには，(1)材料に含まれる各種欠陥部でき裂が発生し，(2)き裂が安定成長を経て，(3)臨界き裂長さに達した後不安定破壊するという過程を考えればよい．疲労寿命推定を例にとると，一般的に以下のように表式化する手法が用いられている[8]．すなわち，セラミックスが破断する過程のほとんどがき裂進展寿命で占められると仮定することで，材料中の最も大きな（危険な）１つのき裂が成長する時の成長速度da/dt（ないしはda/dN）と応力拡大係数K_Iの関係を時間tで積分することで近似的に，

$$t_f = \frac{2}{AY^n (n-2)\,\sigma^n} a_i^{(2-n)/2} \quad \cdots \quad (2)$$

が得られる．式(2)の両辺の対数をとると，

$$\log t_f = \text{const.} - n \log \sigma \quad \cdots \quad (3)$$

となるため，応力－寿命(S-t, S-N)線図は右下がりになり，その傾きはき裂進展指数の逆数$1/n$と等しいとされている。さて，前項で述べたようにセラミックスの寿命は大きくばらつくが，以上の議論では寿命のばらつきを表現できない．これは，以上の議論が全て決定論的に論じられているからである．寿命のばらつきを定式化するためには，確率論的な議論を導入する必要があるが，確率論を導入できるのは主として，(i) *初期欠陥（き裂）寸法*，(ii) *き裂が発生するまでの過程ないしはき裂進展過程（速度）*である．寿命のばらつきを確率・統計的手法を用いて整理した研究は多いが，本稿の主題の一つである「確率モデル」を議論している研究は必ずしも多くないが，以下では代表的な研究例を紹介する．

3．1　平田の研究[9),10)]

平田はガラスのき裂発生寿命を調べる実験を通して，き裂発生寿命がばらつくことを見出した．このばらつきは，個々の試験片の同一性が完全に実現し得ないということだけからは説明し難く，個体の破壊に関しても化学反応論的考察が必要であると考え，以下に示す検討を行った．

まず，実験開始後t時間までにき裂が発生しない確率$p(t)$が，

$$p(t) = \exp(-mt) \qquad \cdots \qquad (4)$$

で表されることを見出した．mは実験結果から，Fig. 4に示すように応力σの関数として，

$$m = A \cdot \exp(\alpha \cdot \sigma) \qquad \cdots \qquad (5)$$

と表される．

一方，ガラスのき裂発生過程を化学反応論的に考察すると，ガラスの分子構造を断ち切るために必要な活性化エネルギーをE_0，外部応力σによってガラス分子に加えられるエネルギーをE，エネルギーEは近似的に応力σに比例($E = \beta\sigma$)すると仮定すると，前出の実験式(5)と同じ形の次式を得る．

$$m = A \cdot \exp(\alpha \cdot \sigma) \qquad \cdots \qquad (6)$$
$$A = a \cdot \exp(-E_0/kT)$$
$$\alpha = \beta/kT$$

以上の考えを用いて一定荷重速度試験で得られる破壊強度の確率分布を導出できる．すなわち，$\sigma=Kt$と表し$p(t)$を求めると

$$p(t) = \exp\left[A/\alpha K\left\{1 - \exp(\alpha \cdot Kt)\right\}\right] \qquad \cdots \qquad (7)$$

を得る．時刻$t \sim t + \mathrm{d}t$間のき裂発生確率$q(t)$は，

$$q(t) = -\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = m \cdot p(t) \qquad \cdots \qquad (8)$$

で与えられるので，式(6),(7)および$Kt=\sigma$の関係を用いることにより，一定荷重速度試験による破断応力の確率密度が応力σの関数として，

$$\varphi(\sigma) = A\exp(\alpha\sigma)\exp\left[\frac{A}{\alpha K}\left\{1 - \exp(\alpha\sigma)\right\}\right] \qquad \cdots \qquad (9)$$

して与えられる．なお，式(9)は2重指数分布の密度関数と同形である．

3．2　青木と坂田の研究[11),12)]

青木と坂田は，セラミックス等の脆性材料の静疲労を論じるためにガラスを用いた静疲労試験を行い，その結果をき裂成長を確率過程としたモデルを用いて評価している。時間tとともに変化しない一様な一軸引張応力σを受ける単位要素ΔVを考える．ΔV内に含まれるき裂は互いに干渉せず，単位要素中のき裂の数の平均値をaとする．静疲労試験中に新たなき裂が発生しないと仮定すると，安定き裂成長過程はマルコフ過程でモデル化でき，Kolmogorov方程式を解くことにより解が得られる[13)]．$P_j(\sigma, t)$を応力σの下で時刻tにおけるき裂長さLが長さl_j (j=1, 2, ・・・∞)に等しくなる確率とおくと，

$$\mathrm{d}P_1(\sigma, t)/\mathrm{d}t = -\lambda_1 \cdot P_1(\sigma, t)$$
$$\mathrm{d}P_2(\sigma, t)/\mathrm{d}t = -\lambda_2 \cdot P_2(\sigma, t) + \lambda_1 \cdot P_1(\sigma, t)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathrm{d}P_j(\sigma, t)/\mathrm{d}t = -\lambda_j \cdot P_j(\sigma, t) + \lambda_{j-1} \cdot P_{j-1}(\sigma, t) \qquad \cdots \qquad (10)$$
$$\cdots\cdots$$

が得られる．上式におけるλ_jは遷移確率であり，l_jの関数$A(l_j)$，長さl_jのき裂の応力拡大係数をK_j，δを定数として，

$$\lambda_j \begin{cases} = 0 & (0 \le j \le s) \\ = A(l_j) K_j^{\delta} & (s+1 \le j \le n) \\ = 0 & (j = n+1) \end{cases} \qquad \cdots \qquad (11)$$

で与えられ，式(10)を解くことにより，時刻tにおけるき裂長さの確率$P_j(\sigma, t)$は，次式で与えられる．

$$P_j(\sigma, t) = P_1(\sigma, 0)\cdot(\lambda_1 \lambda_2, \cdots, \lambda_{j-1}) \cdot \sum_{k=1}^{j} \frac{\exp(-\lambda_k t)}{\prod_{j'=1, j' \neq k}^{j} (\lambda_{j'} - \lambda_k)}$$
$$+ P_2(\sigma, 0)\cdot(\lambda_2 \lambda_3, \cdots, \lambda_{j-1}) \cdot \sum_{k=2}^{j} \frac{\exp(-\lambda_k t)}{\prod_{j'=2, j' \neq k}^{j} (\lambda_{j'} - \lambda_k)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ P_j(\sigma, 0)\cdot\exp(-\lambda_j t) \qquad \cdots \qquad (12)$$

次に微小き裂は時間の経過とともに成長し，その中の一つがGriffithの破壊条件を満足した時に要素が壊れると仮定する．$\alpha\Delta V$本のき裂を含む要素が壊れない確率は，時刻tにおけるき裂長さの分布$P_j(\sigma, t)$を用いて乗法定理[1)]により，

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} P_j(\sigma, t)\right\}^{\alpha\Delta V} \qquad \cdots \qquad (13)$$

が得られる．ここでnは整数であり，Griffithの条件を満足する最大(臨界)き裂長さに満たない最大のき裂長さに割り当てられる順序数である．したがって，任意の要素の破壊強度の時間依存型確率分布関数$F_{\Sigma}(\sigma, t)$は，次式で与えることができる．

$$F_{\Sigma}(\sigma, t) = 1 - \exp\left\{-\sum_{j=n+1}^{\infty} P_j(\sigma, t)\cdot\alpha\Delta V\right\} \qquad \cdots \qquad (14)$$

式(14)をさらに簡略化すると最終的な式が得られる．例えば，試験片幅w，内側スパン間距離lの4点曲げによる破壊確率は，

$$F_{\Sigma}(\sigma, t) = 1 - \exp\left\{-w\, l\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{2\varepsilon}\left(a + b\,e^{-\alpha_1 t} + c\,e^{-\alpha_2 t}\right)\right\} \qquad \cdots \qquad (15)$$

$$a = \left(\frac{K_{\mathrm{ISCC}}}{K_{\mathrm{C}}}\right)^{-2\varepsilon},\ b = \varepsilon B\, l_1 K_{\mathrm{C}}^{\delta},\ c = 1 - \left(\frac{K_{\mathrm{ISCC}}}{K_{\mathrm{C}}}\right)^{-2\varepsilon} - \varepsilon B\, l_1 K_{\mathrm{C}}^{\delta}$$

となる．

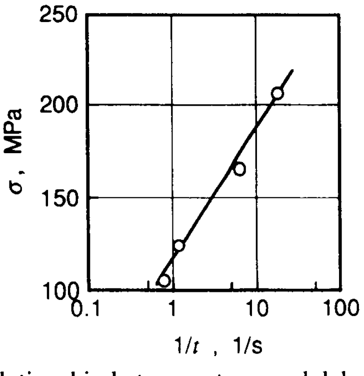

Fig. 4. Relationship between stress and delay time for crack initiation.

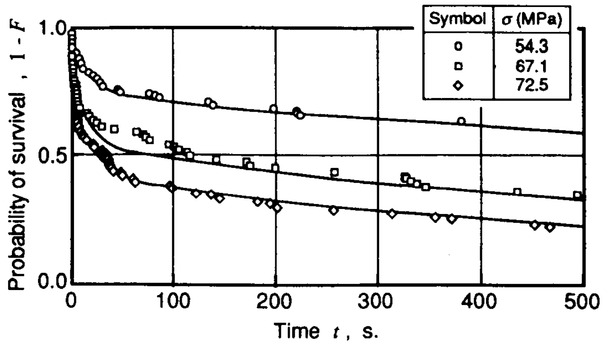

Fig. 5. Probability of survival *vs*. time for 4-point bending static fatigue test.

Fig. 5は4点曲げの静疲労試験結果である．図中の実線は式(15)を示し，実験点とよく一致する．なお，式(15)は2母数ワイブル分布の分布関数と同じ形である．

3．3　岡部らの研究（統一評価法）[15]

岡部らは構造用セラミックスに特有な強度特性を網羅すべく，統一的評価方法を提案した．一定温度下で大きさaの初期欠陥から発生するき裂の成長速度は，次式で表わされる．

$$da/dt = C\cdot K_{\mathrm{Imax}}^n = C\left(\phi\sigma\sqrt{\pi a}\right)^n \quad \cdots \quad (16)$$

(σは負荷応力，ϕは形状補正係数，nはき裂進展指数)

セラミックスを多くの要素に分割し，各要素にかかる応力は均一であると仮定し，本節の最初で述べたのと同じ手法で応力と破断時間の関係を求めると，

$$\sigma_{j\max}^n\, t_{\mathrm{eff}} = B\left(\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right)^{n-2} \quad \cdots \quad (17)$$

となる．ここで，$B=2/\{(n-2)C(\phi\,\pi)\}$，$\sigma_{j\max}$と$a_j$はそれぞれ要素$j$の最大主応力と最大欠陥寸法であり，有効保持時間$t_{\mathrm{eff}}$は次のように定義できる．

$$t_{\mathrm{eff}} = \int_0^{t_f}\left\{\frac{\sigma_j(t)}{\sigma_{j\max}}\right\}^n dt \quad \cdots \quad (18)$$

また，セラミックスの不活性強度がワイブル係数mの2母数ワイブル分布に従うと仮定すると，a_jの分布関数は，

$$F(a_j) = \exp\left\{-\left(\frac{a_j}{a_0}\right)^{-m/2}\right\} \quad \cdots \quad (19)$$

となる．式(18)と式(19)から，$\sigma_{j\max}^n t_{\mathrm{eff}}$がある値より大きくなる確率$R_j$は

$$R_j = \exp\left[-\left\{\frac{1}{a_0}\left(\frac{B}{\sigma_{j\max}^n t_{\mathrm{eff}}}\right)^{\frac{2}{n-2}}\right\}^{\frac{m}{2}}\right]$$
$$= \exp\left\{-b_0\left(\sigma_{j\max}^n t_{\mathrm{eff}}\right)^{\frac{m}{n-2}}\right\} \quad \cdots \quad (20)$$

となる．上式でb_0は材料に依存する定数である．

以上の考えに最弱リンク説[1]を適用し，一軸応力を受ける全要素の非破壊確率Rを計算する．要素に作用する応力の最大値を$\sigma_{j\max}$とすると，t_{eff}は各要素に対して同じ値となるため，

$$R = \exp\left\{-b_0\left(\sigma_{\max}^n t_{\mathrm{eff}}\right)^{\frac{m}{n-2}}\int_V\left(\frac{\sigma_{j\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{\frac{mn}{n-2}}dV\right\} \quad \cdots \quad (21)$$

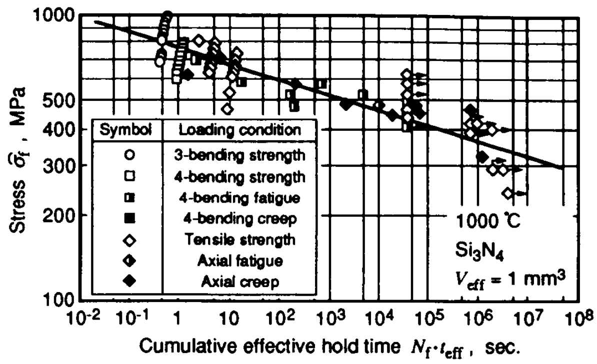

Fig. 6. Example of unified estimation method for strength of Si_3N_4.

となる．したがって，要素全体の破壊確率P_fは，

$$P_f = 1 - R = 1 - \exp\left\{-b_0\left(\sigma_{\max}^n t_{\mathrm{eff}}\right)^{\frac{m}{n-2}}V_{\mathrm{eff}}\right\}$$
$$= 1 - \exp\left[-\left\{\frac{\sigma_{\max} t_{\mathrm{eff}}^{1/n} V_{\mathrm{eff}}^{(n-2)/mn}}{\sigma_0}\right\}^{\frac{mn}{n-2}}\right] \quad \cdots \quad (22)$$

となり，2母数ワイブル分布の分布関数と同じ形の式が得られる．なお，セラミックスのき裂進展指数nが十分大きい(20～100)ことを考慮すると，式(22)は式(23)のように簡単になる．

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left\{\frac{\sigma_{\max} t_{\mathrm{eff}}^{1/n} V_{\mathrm{eff}}^{1/m}}{\sigma_0}\right\}^{m}\right] \quad \cdots \quad (23)$$

よって，通常の破壊応力を用いる代わりに，次式で定義される基準化応力を用いればよい．

$$\tilde{\sigma}_f = \sigma_f\, t_{\mathrm{eff}}^{1/n}\, V_{\mathrm{eff}}^{1/m} \quad \cdots \quad (24)$$

Fig. 6は，統一評価法を適用した例である．2．2節で述べたように，セラミックスの破断寿命は非常にばらつくが，異なる実験条件のデータが本手法を用いることにより，統一的に評価できることがわかる．

4．まとめ

以上，セラミックス等の脆性材料の破壊強度のばらつきを統計的に評価する上での代表的な手法を概説した．紙面の制約で十分に論じられていない点が多々あるが，同種の評価を試みられる方々の参考になれば幸いである．

参考文献

(1) 上野，中島，中易，機械の研究，**48**, p.879 (1996).
(2) 田中，機械の研究，**48**, p.989 (1996).
(3) 委員会報告「セラミックス共通試料の曲げ強度に関するラウンドロビンテスト」，材料，**44**, p.249 (1995).
(4) "Ceramics Strength Database", JSMS (1996).
(5) 酒井，田中，材料，**31**, p.941 (1982).
(6) 田中，岡部，境田，中山，材料，**38**, p.261 (1989).
(7) 田中，今道，中山，材料，**44**, p.755 (1995).
(8) T. Sakai and T. Hoshide, CJMR Vol.14, p.189 (1995).
(9) 例えば，西田俊彦，安田榮一編著，「セラミックスの力学的特性評価」，4章 (1986) 日刊工業新聞社．
(10) 平田，機械の研究，**1**, p.231 (1949).
(11) 平田，統計数理研究，**3**, p.57 (1949).
(12) S. Aoki and M. Sakata, Int. J. Fract., **16**, p.459 (1980).
(13) S. Aoki, I. Ohta, H. Ohnabe and M. Sakata, Int. J. Fract., **21**, p.285 (1983).
(14) 酒井，菅田，機械の研究，**49**, p.67 (1997).
(15) N. Okabe and H. Hirata, CJMR Vol.14, p.245 (1995).