# 515　有限要素法による曲がり管の面外曲げ解析

## (管係数，半径比を変えた場合)

北海道工大　大滝　誠一

### 1　緒　論

曲がり管が受ける曲げは、曲がり管の中心線に沿った平面を考え、その面内で受ける曲げ変形を面内曲げ、それ以外で受ける面外曲げに分けられる。また、前者では曲げモーメントのみ、後者では曲げモーメントとねじりモーメントが生じる。しかし、曲がり管の変形に関しては面内曲げに関する研究が多く、面外曲げ又はねじりを組み合わせた研究は少ないようである。そこで本研究では、円環かく要素を用いた有限要素法によって、曲げとねじりを受ける曲がり管の応力解析を行う。

まず、Hermite 補間関数を用いた変位関数を仮定して、Novozhilov のひずみと変位の関係から剛性マトリックスを導く。さらに曲がり管端部に強制変位を与える方法で、面外曲げのみを受ける場合と、曲げとねじりを受ける場合を考える。数値計算例として、開き角 90° の曲がり管が一端を固定し他端に曲げとねじりモーメントが負荷される場合の解析を行い、中央断面の応力係数を求める。

### 2　理　論

円環かくの座標系において、縦横の無次元化座標を $\xi$、$\eta$、そして板厚方向に z をとる。これらの座標軸方向に対応する変位成分を u、v、w とし、変位関数 f を次式のように仮定する。

$$f(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Big[H_{0i}^{(1)}(\xi)H_{0j}^{(1)}(\eta)f_{ij}+AH_{1i}^{(1)}(\xi)H_{0j}^{(1)}(\eta)\frac{\partial f_{ij}}{\partial\xi}$$

$$+BH_{0i}^{(1)}(\xi)H_{ij}^{(1)}(\eta)\frac{\partial f_{ij}}{\partial\eta}+ABH_{1i}^{(1)}(\xi)H_{1j}^{(1)}(\eta)\frac{\partial f_{ij}}{\partial\xi\partial\eta}\Big]$$

… (1)

次に、ひずみと変位の関係式は Novozhilov の理論から次式で表される。

$$\varepsilon_\xi=\frac{1}{AB}\left(1+\frac{z}{R_\xi}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\eta}\left(1+\frac{z}{R_\eta}\right)v+\frac{1}{R_\xi}w$$

$$-\frac{z}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial^2\xi^2}-\frac{z}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\eta}$$

$$\varepsilon_\eta=\frac{1}{B}\left(1+\frac{z}{R_\xi}\right)\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{1}{R_\eta}w-\frac{z}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial^2\eta^2}$$

$$\gamma_{\xi\eta}=\frac{1}{B}\left(1+\frac{2z}{R_\xi}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{2z}{R_\eta}\right)\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\eta}\left(1+\frac{2z}{R_\xi}\right)u$$

$$-\frac{2z}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{2z}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\xi}\qquad\cdots(2)$$

等方性材料の一要素におけるひずみエネルギーU をひずみ成分で表すと、次式で表される。

$$U=\int_0^1\int_0^1\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\varepsilon_\xi^2+\varepsilon_\eta^2+2\nu\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta+\frac{1-\nu}{2}\gamma_{\xi\eta}^2\right]ABdzd\xi d\eta$$

… (3)

ここで、E、$\nu$、h はそれぞれヤング率、ポアソン比及び板厚を表す。式 (1) 、(2) を式 (3) に代入して整理すると、剛性マトリックスが得られる。

### 3　解　析　結　果

例題として、図2に示す様な開き角 90° である曲がり管が、一端を固定され、他端に面外曲げを受ける場合と、さらに曲がり管の一端の 45° 方向にねじりを与える場合について計算する。なお、荷重条件は面外モーメントを端部に強制変位として与える。この値は最内、最外端で変位が 0、冠部上下で±1 と与える。表 1 に例題の物性値及び寸法を示す。$R_1$、$R_2$ はそれぞれ曲がり管の曲率半径、管中央半径、b は半径比で $b=R_1/R_2$、$\lambda$ は管係数で $\lambda=hb/R_2$ である。

本研究では、曲がり管を円周方向に 16 分割、長手方向に 6 分割した要素モデルを用い、その要素番号及び節点番号を示したモデルを図 3 に示す。

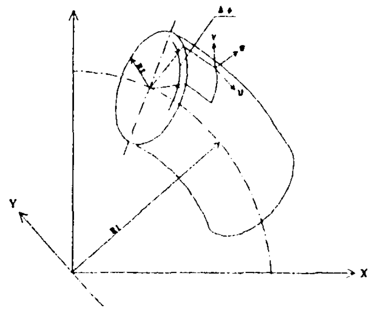


Fig.1　Coordinates of a toroidal element

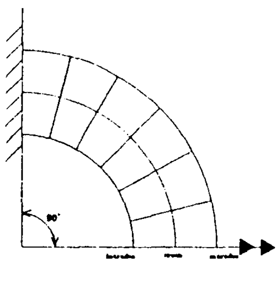

Fig. 2　Configuration of pipe

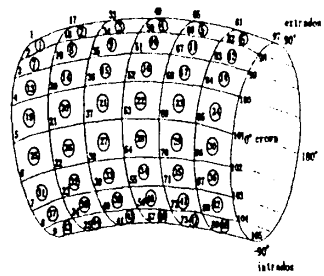

Fig.3　FEM　Model

Tab. 1　Mechanical properties and dimensions

| | | | |
|---|---|---|---|
| Young's modulus | E | (Gpa) | 72.4 |
| Poisson's ratio | $\nu$ | | 0.313 |
| Radius 1 | $R_1$ | (cm) | 14.68 |
| Radius 2 | $R_2$ | (cm) | 2.54 |
| Thickness | h | (cm) | 0.196 |

図4、7に長手方向応力を$\sigma_\xi/\sigma_0$、図5、8に円周方向応力を$\sigma_\eta/\sigma_0$、図6、9に長手・円周方向せん断応力を$\tau_{\xi\eta}/\tau_0$と無次元化した応力係数で示す。なお、図4、5、6に関しては、$\lambda$=0.1でb=2.0とb=3.0の二つの要素モデルに面外曲げを与えた場合の比較であるが、図7、8、9ではb=5.78、$\lambda$=0.447の要素モデルに、曲げとねじりを与えた実験値と大坪氏らの解析値（面外曲げのみ）との比較を行った。

図4において、長手方向応力の最大応力係数は、内・外表面とも曲がり管の冠部付近に引張応力が集中している。図5において、円周方向応力の応力係数は、$\phi$=−22.5°のとき最大値が内表面で−7.30となる。図6において長手・円周方向せん断応力は、内・外表面とも$\phi$=−22.5°のとき応力係数が最大となり、最大値が−2.24の値となる。図7において、最大応力係数は外表面で3.67、中立面では2.81、内表面では2.75となる。また、内表面に近づくに従って最大応力係数は曲がり管の冠部$\phi$=0°付近に集中し、応力係数は小さくなっていく。図8において、最大応力係数は内・外表面とも$\phi$=15.8°のときで、外表面は−3.73、下表面は4.44となる。また、中立面は応力係数が殆ど0であり、内・外表面の引張・圧縮応力はほぼ対称である。図9においては、最大応力係数は外表面で$\phi$=18.3°のとき−1.22、中立面は$\phi$=−11.9°のとき−1.19、下表面は$\phi$=−28.7°のとき−1.57となる。したがって、最大応力係数は$\phi$=−22.5°～22.5°付近に集中しており、$\phi$=0°を境に応力分布が対称である。

## 4 結　論

本研究では、変位関数にHermite補間関数を用いた有限要素法により、面外曲げとねじりを受ける曲がり管の線形応力解析を行い、以下のような結論を得た。

(1) 面外曲げを受けた場合の長手方向、円周方向の応力及びせん断応力は、長手方向では外表面、円周方向では内表面で応力係数が最大となった。また、せん断方向の場合、b=2.0とb=3.0の外表面の最大応力係数が一致した。

(2) 曲げとねじりを受けた場合の最大応力係数は、長手方向、円周方向のいずれもが大坪氏らの解より大きくなった。また、応力係数が0となる角度も異なり、ねじりの影響が出ていると考えられる。

## 参 考 文 献


(1) 大坪、渡辺、リング要素による曲がり管の応力解析機論42巻362号(1976)、pp.3037～3050

(2) 大滝、非線形計画法による平板の大たわみ解析機論56巻526号、A編(1990)、pp.1474～1478

(3) 川股、シェル構造解析、倍風館(1974)

(4) Novozhilov.v.v、Thin Shell Theory、P.Noordhoff LTD.(1964)、23


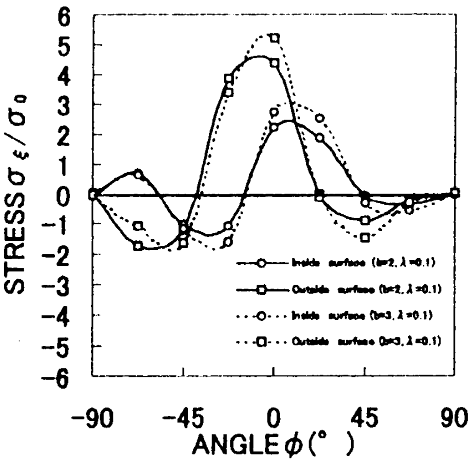


Fig.4 Longitudinal stress

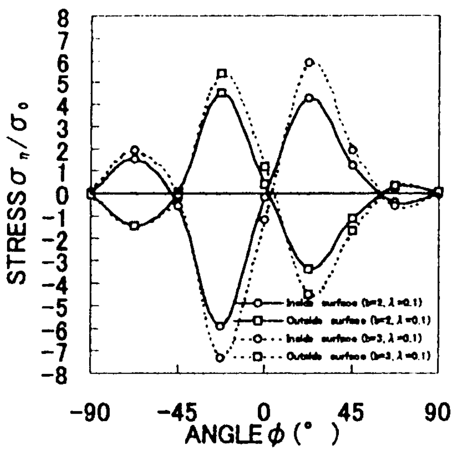


Fig.5 Circumferential stress

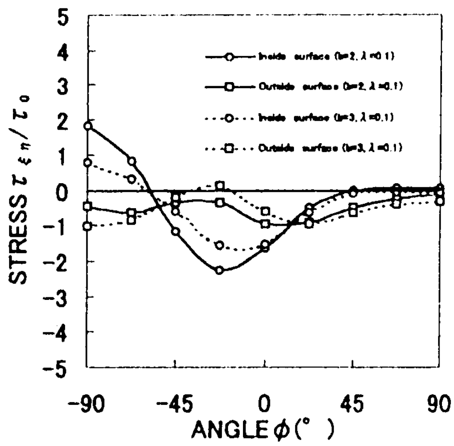


Fig.6 Shearing stress

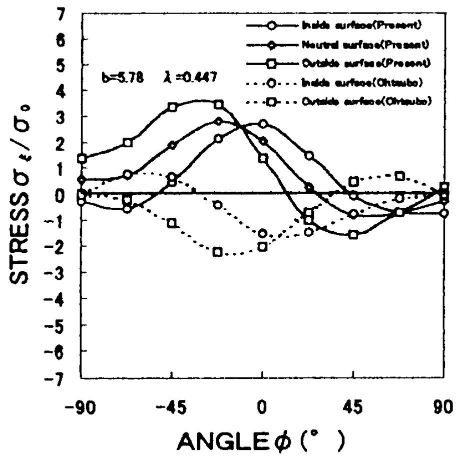


Fig.7 Longitudinal stress

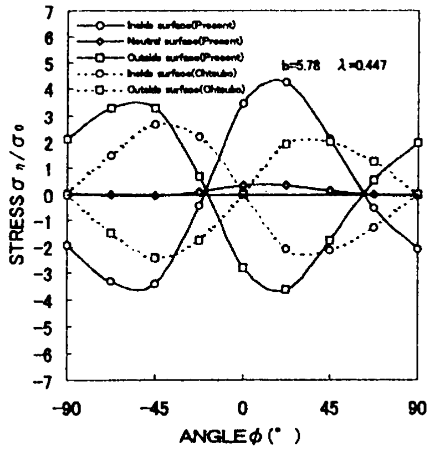


Fig.8 Circumferential stress

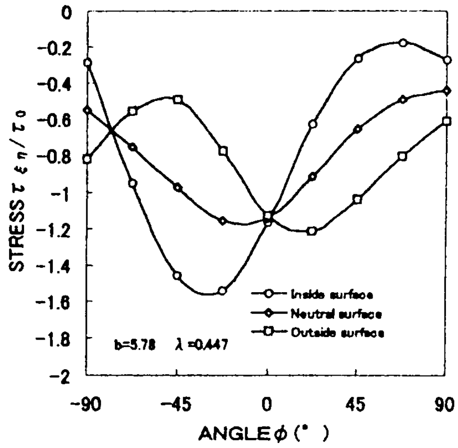


Fig.9 Shearing stress