421 異方性角棒の弾性ねじり理論の適用範囲に及ぼす辺長比の影響

名古屋大学［院］　学○山崎真理子　　名古屋大学［院］　正　佐々木康寿

1.　緒　言

材料の力学的特性を把握することは構造・材料設計に必要不可欠である．ところで実際の構造部材が一軸応力状態にあることは少ない．一般的には，二種類以上の垂直応力やせん断応力が組み合わさって生じる多軸応力状態になっていると考えられ，即ちこのような応力状態における力学挙動を把握する必要がある．著者らは重要な構造材の一つである木材を対象に，軸力・ねじり組合せ荷重下における力学挙動を実験的に検討している．

本研究で扱う木材の大きな特徴の一つに直交異方性が挙げられる．応力解析において直交異方性を考慮するには「異方性角棒の弾性ねじり理論」を適用する方法が考えられる．しかし，この類の複合加力試験における試験片形状としては薄肉円筒あるいは中実丸棒が採用されることが多く，角棒を用いた複合加力試験は必ずしも一般的なものではない．また，「異方性角棒の弾性ねじり理論」は単純ねじり状態を対象としており，これが複合応力状態に適用された場合，どのように機能するかを明らかにしておく必要があろう．

そこで，本研究では，複合応力状態における「異方性角棒の弾性ねじり理論」の適用妥当性を考察するために，特に角棒試験片の断面辺長比[注1]に関して検討した．

2.　異方性角棒の弾性ねじり理論

繊維（L）方向を長軸とする木材の角棒にトルク T を作用させたとき，LT・LR 両側面中央部のせん断応力は次式（1）により得られる．

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{LT} &= \frac{T}{ab^2\phi}\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\sqrt{\frac{G_{LR}}{G_{LT}}}\right\}^{-1}\right]\\
\tau_{LR} &= \frac{T}{a^2b\phi'}\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\sqrt{\frac{G_{LT}}{G_{LR}}}\right\}^{-1}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

ここで a と b はそれぞれ試験片断面の接線（T）方向と半径（R）方向の長さ，また k_{LT}，k_{LR} は LT・LR 面それぞれのトルク－せん断ひずみ曲線の初期傾斜である．式（1）に示されるように，この理論において τ は断面辺長比とせん断弾性係数 G の異方度（ここでは LT 面と LR 面の値の比とする）により決定される．ここで，G_{LT} と G_{LR} は次式（2）により得られる．

$$
\left.\begin{aligned}
G_{LT} &= \frac{k_{LT}}{ab^2\phi}\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\sqrt{\frac{G_{LR}}{G_{LT}}}\right\}^{-1}\right]\\
G_{LR} &= \frac{k_{LR}}{a^2b\phi'}\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\sqrt{\frac{G_{LT}}{G_{LR}}}\right\}^{-1}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

式（2）における G の異方度と k の異方度の関係を数値シミュレーションにより調べ，図1に示した．これより，G と k それぞれの異方度の関係は2次関数的な比例関係を示し，その勾配は辺長比により変化することがわかる．

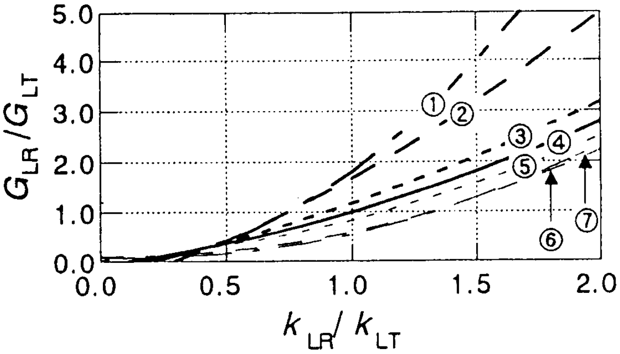

Fig.1. Relationship between G_{LR}/G_{LT} and k_{LR}/k_{LT} calculated by Eq. (2) due to the aspect ratio of rectangular section. ①～⑦ are various aspect ratios explained in Section 3.

そこで，任意の辺長比を考慮に入れた k と G の異方度の関係を次のように誘導した．式（2）において $\frac{a}{b}\cdot\sqrt{\frac{G_{LR}}{G_{LT}}}=y$ とすると次式（3）が導かれる．

$$
\frac{a}{b}\cdot\frac{k_{LR}}{k_{LT}} = y^2\cdot\frac{\phi'}{\phi}\cdot\frac{\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi}{2}\cdot y\right\}^{-1}\right]}{\left[1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left\{\cosh\frac{(2n-1)\pi}{2}\cdot\frac{1}{y}\right\}^{-1}\right]} \quad (3)
$$

式（3）における左辺と y^2 の関係より，任意の辺長比における k と G の異方度の関係が得られが，さらに，断面形状における接線・半径の方向の影響を除くため，次式（4）の $Y=f(X)$ 関係を式（3）より求めた．これを図2に示す．

[注1] 本研究では，辺長比について「短辺に対する長辺の比」をもって定義する．

$$X=\frac{\left(\frac{a}{b}\frac{k_{LR}}{k_{LT}}+\frac{b}{a}\frac{k_{LT}}{k_{LR}}\right)}{2}\quad,\quad Y=\frac{\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{G_{LR}}{G_{LT}}+\frac{b^2}{a^2}\frac{G_{LT}}{G_{LR}}\right)}{2}\tag{4}$$

これによれば，$Y = f$ (X) 関係は X=1 を起点とし，X の増大に伴い勾配がきつくなる関数である．

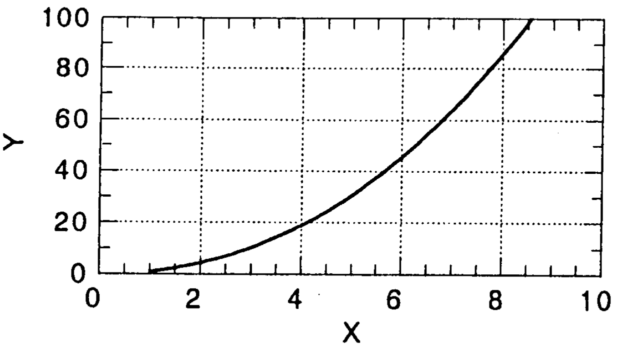

Fig.2. Relationships between X referred to G and Y referred to k in Eq. (4).

3．　静的複合加力試験による実験的検証

G_{LT}，G_{LR} は材料に固有な値であり，すなわち試験片の断面辺長比が変化してもこれらは影響を受けないと考えられる．したがって，複合加力試験より得られた k_{LT}，k_{LR} から式（2）を用いて G_{LT}，G_{LR} を算出した場合，もし試験片の断面辺長比によりこれらが変化したとすれば不合理であろう．

そこで，これに関して実験的に検証するため，様々な断面辺長比の木材角棒を対象に単純ねじり試験および静的複合加力試験を行った．試験片にはブナ（*Fagus crenata* Bl.）とアガチス（*Agathis* spp.）の２樹種を用意し，形状は繊維方向を軸とする角棒とした．断面寸法は a と b をそれぞれ接線・半径方向の辺長として (a, b) = ① (6, 50), ②(10, 30), ③ (15, 20), ④ (17.5, 17.5), ⑤ (20, 15), ⑥ (30, 10), ⑦ (50, 6) mm の７条件に，断面積を一定としたまま変化させた．実験には電気油圧サーボ式軸力・ねじり複合疲労試験機を用いた．

軸力・ねじり静的複合加力試験から得られたLT・LR 各面のトルク－せん断ひずみ曲線より初期剛性 k_{LT}，k_{LR} をそれぞれ求め，式（2）に従い各面のせん断弾性係数 G_{LT}，G_{LR} を算出した．その結果，辺長比が大きくなるにつれ G の値に大きなばらつきが見受けられ，適切な G_{LT}，G_{LR} が得られていないと考えられた．これに関して，式（４）を用い，適切な G の異方度が得られたかどうかを各条件毎に検討した．ここで，G の異方度の適正範囲は，単純ねじり作用下の正方形断面（④，辺長比１）の実験結果を基準に，その平均値±標準偏差で決定した（アガチス 1.50±0.08，ブナ 1.28±0.11）．この適正範囲より各条件に対する Y 値（式（４）の G に関する値）の範囲を推定し，これと実験値を比較したところ，単純ねじり試験では①，⑦を除き，両者の間に大きな違いは見受けられなかった．これに対して，複合加力試験の場合，断面形状が比較的正方形に近い条件（③，④，⑤）の実験値は推定範囲と良好な一致を示したが，一方，比較的薄肉に近い条件（①，②，⑥，⑦）では実験値が推定範囲から大きく外れた．

実験より，①，②，⑥，⑦については理論式から適切な G が得られず，理論の適用は不適当と考えられる．この原因には以下の２点が考えられる．１点目は，G の元である k が実験により正しく測定されていない可能性である．これに関して，適切な G の異方度（Y 値）を得るために必要な k の異方度（X 値）を式（４）の $Y=f$(X) 関係より各条件毎に推定した．これを図３に示す．縦軸には X 値をとり，推定範囲（平均値±標準偏差）と実験値を各条件毎に併せて示した．

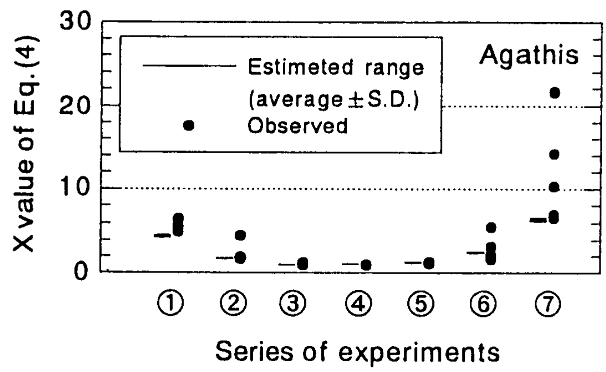

Fig.3. Comparison between estimated range and experiments about X value of Eq. (4).

これによれば，辺長比が大きくなるほど（①，②，⑥，⑦）実験値が推定範囲から大きく外れている．これは，軸力・ねじり複合加力試験の場合，ねじりによる軸方向のワーピングが軸力により拘束されたためと考えられる．ワーピングの拘束は薄肉断面ほど生じやすくなることが知られている．

２点目には理論式の性質が挙げられる．式（４）では，図２に示したように X 値が大きくなるにつれて，実験から直接得られる k（X 値）のわずかな変化に対して G（Y 値）の算出値が激しく変動するようになる．ここで，X 値は辺長比が大きくなるほど大きな値となる．また，大きな辺長比を持つ角棒にねじりを負荷した場合，大きな変形を生じなければトルクを受けることができない．すなわち，小さな辺長比のものに比べて，トルク及びひずみの測定に関する測定誤差が生じやすくなる．以上より，辺長比が大きな断面形状の場合には，理論式による適切な G の算出が困難になったと考えられる．

複合応力状態への理論適用に関し，これらの実験・検討結果を基に断面辺長比の推奨範囲を求めたところ，辺長比は約２以内が妥当と考えられた．