

Macroscopic Property of Randomly Distributed Porous Material

Daisuke FUJIWARA, Hiroshi NISHIGAMI and Shoji IMATANI

1 緒 言

すべての材料は、巨視的には均質であっても微視的にみると不均質な構造を有しており、微視的構造を構成する各点の幾何学的及び物理的条件、各相間の相互作用によって、その巨視的物性が特徴づけられる。均質化法では、対象とする構造のマクロ構造の大きさに比べて、非常に小さな単位マイクロ構造の空間の繰り返しによって形成されていると仮定することで、微視構造の形状も考慮した解析を行うことができる。¹⁾

本研究では、均質化法を用い微視的に不均質な材料の弾性係数と等価な、均質の弾性係数を求めることを目的とする。特に、ユニットセル中に占める実質部材の体積率が変化する場合の巨視的弾性係数の変化を有限要素法を用いて解析し、異種の要素間の整合性を検討した。

2 均質化法の解析手法

2.1 基礎式 構造体のマクロとミクロのスケール比 ε をとする。変形や応力の問題を考えると、変数はすべてスケール比 ε に依存するので、ミクロ構造の影響を考えると、上添字 ε をつけて表わす。変位に漸近展開を施し、高次の微小項を無視すると

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1)$$

と近似することができる。

弾性テンソルを E_{ijkl}^ε 、 Γ_t を表面力が作用する境界を表わすとする。構造体に表面力 t_i が作用するとき、仮想変位を v_i^ε とすると仮想仕事の原理は、

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i v_i^\varepsilon d\Gamma \quad (2)$$

と表わせる。ここで、式 (1) の変位を式 (2) に代入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}^\varepsilon \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^1}{\partial y_j} \right) dY d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma \quad (3)$$

となる。

2.2 特性関数による変数分離 ミクロ構造とマクロ構造両方の関数になっている u_i^1 を特性変位と呼ばれる χ_i^{kl} を用いて次のように変数分離する。

$$u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \quad (4)$$

式 (3) が任意の仮想変位 v_i^0 、 v_i^1 について成り立つことと、式 (4) からミクロ方程式とマクロ方程式に分離することができる。完全に分離されたマクロ方程式に表される均質化された弾性テンソルを

$$E_{ijkl}^H \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad (5)$$

と定義する。

境界条件は、ユニットセル中心での節点変位を固定し、ミクロ構造の外周囲の変位が周期的になるように拘束する。それにより得られた特性変位を用いて、式 (5) の均質化された弾性係数を求めることになる。

2.3 種々の要素への適用

2次元問題として、有限要素法への適用を試みる。ユニットセルの体積率が100%の時は3節点線形要素を用い、体積率が20%程度までは8節点アイソパラメトリック要素を用いて有限要素解析することにする。

全体積に占める体積率が極めて小さくなると、構成する部材の曲げ変形が支配的になるので、平面要素では変形のモードが正しく表せない。そこで、Fig.1のように断面が一定の長方形断面要素を深い (Timoschenko) はり²⁾の解析に対して考える。この要素は、6個の節点自由度を持つ。この深いはり要素と棒要素を組み合わせると、はりの内部の変位は

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -zN_1 & N_2 & 0 & -zN_2 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

となる。 z ははり中央面からの距離を表す。ここで、1次元形状関数 N_i は、 $N_1 = (L/2 - x)/L$ 、 $N_2 = (L/2 + x)/L$ のように線形である。

3 数値解析例

要素分割する際にボロノイ多角形と呼ばれる凸多角形を用いる。体積率が100%~80%までは3節点要素を用いて、ボロノイ多角形をランダムに抜き出すことでユニットセルを作成した。次に、99%~20%の間は8節点要素を用いて、Fig.2のようにボロノイ多角形の中心をくりぬくことでユニットセルを作成した。最後に、10%以下では2節点要素を用いてはり要素とし、ボロノイ多角形の辺を分割することでユニットセルを作成した。多くのボロノイ多角形を配置することで、均質化された弾性係数はほぼ等方性として扱うことができる。

Fig.3は体積率と、ポアソン比の相関を示したものである。Fig.4は解析により得られた巨視的弾性係数を以下に表す実験式³⁾と比較したものである。

$$E = E_0(1 - 1.9P + 0.9P^2) \quad (6)$$

Fig.3 より, ポアソン比が大きい場合には体積率が減少すると均質化されたマクロ構造のポアソン比が減少した後, 増加している. また, ポアソン比は, 0.5 から 0.6 に収束している. 等方なポアソン比が 0.5 を越えると材料は不安定となるはずであるが, 数値的にはこのような不合理な結果が得られることになる. Fig.4 より, 実験式から得られた巨視的弾性係数とほぼ一致していることがわかる. 実験式は比較的気孔率が小さい(体積分率が大きい)ものに対するものであるが, 広い範囲の弾性係数に対して一致する. 深いはり要素は応力が 1 次元であるにも関わらず, 2 次元平面要素と同様に均質化された弾性係数を表現している. このことは, 3 次元解析で立体要素とはり要素を用いた解析でも成立するかどうかを確かめる必要がある.

4 結 言

ユニットセルの気孔の大きさによって巨視的な弾性係数が変化することがわかった. 巨視的に等方な均質化弾性係数を求めるためには, ミクロ構造の乱雑さが重要な因子となる. また, 材料定数によらず体積率が減少するにつれて, 巨視的なポアソン比は実質部材のポアソン比の数値に関わらず 0.5 に近づくことがわかった. このことは, 巨視的な応答は, 擬似的に非圧縮性を示すことを意味している.

深いはり要素は応力は, 本質的に 1 次元であるのものにもかかわらず, 2 次元平面要素と同様に均質化された弾性係数を表現できることがわかった. 今後, 本研究を 3 次元に拡張するとともに, 立体要素, 板(シェル)要素, およびはり要素での比較を試みる予定である.

参考文献

- 1) J.M. Guedes, N. Kikuchi, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **83** 143(1990).
- 2) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 210(1995)
- 3) W.D.キンガリー, セラミックス入門 応用編, 748(1980)

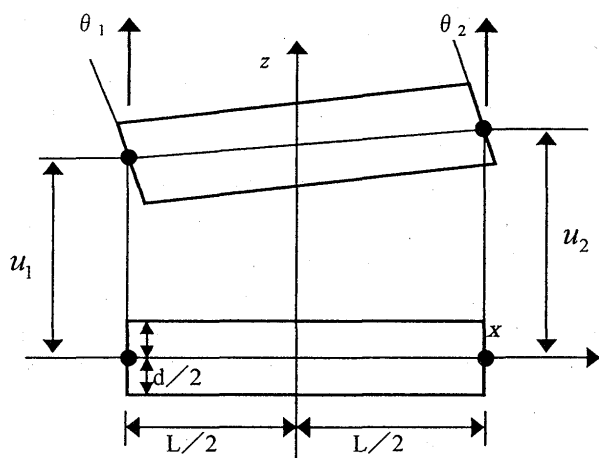


Fig.1 Schematic view of thick beam element.

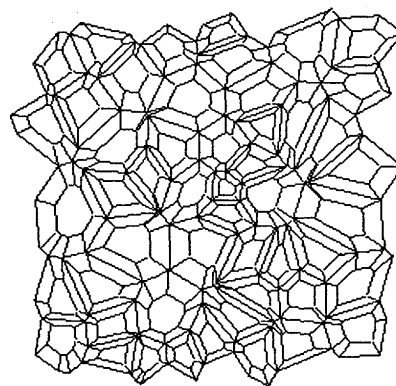


Fig.2 Modeling of porous structure with 8-node isoparametric elements

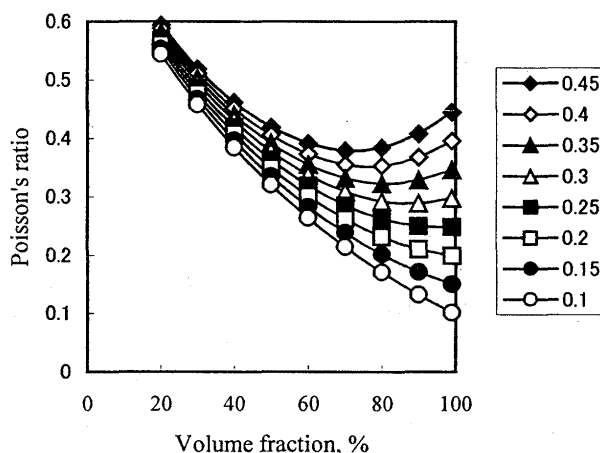


Fig.3 Variation of Poisson's ratio with respect to volume fraction.

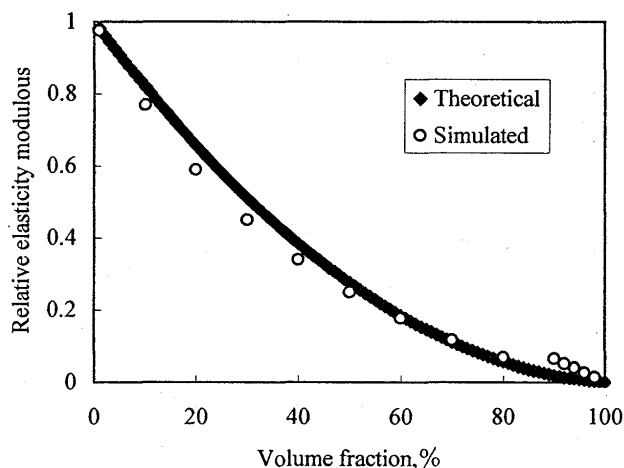


Fig. 4 Variation of Young's modulus with respect to volume fraction.