133 ハニカム構造物の圧入解析への均質化法の適用

名大[院]　○浅田崇史　　名大　大野信忠　　名大[院]　田中佑治

Flat Punch Indentation Analysis of Honeycomb Structures using Homogenization Method

Takashi ASADA, Nobutada OHNO and Yuji TANAKA

1 緒　言

複合材料やセル状材料は，周期性を仮定できるミクロ構造を有している．このようなミクロ構造からなるマクロ構造物の特性評価には，均質化法が有効である．しかしこの手法では，材料が非弾性変形を示すとき，マクロ構造物の有限要素解析を行うと同時に，その各要素／各積分点でユニットセルの均質化解析を増分的に行う必要があるから，計算コストが非常に高くなる．

そこで著者らは，前報[1]において，陰解法に基づく均質化法の定式化を行い，均質化問題を反復的に解くアルゴリズムを構築した．この手法では，反復計算に用いる初期値を多様にとることができる．前報において，初期値が反復計算の収束性に及ぼす影響を詳細に検討した結果，適切な反復初期値を選ぶことで，従来の手法[2]に比べて反復計算収束性が大幅に改善されることを示した．

本研究では，さらなる効率化のために，ユニットセルの点対称性に着目し，陰的増分均質化法を再構築する．ハニカム構造のように，周期性に加えて，セル中心に関する点対称性も有する場合には，ユニットセルより解析領域を小さくとれるため，解析効率が向上する．つづいて，本手法を用いて，ハニカム構造物の平面パンチによるインデンテーション解析を行う．このような解析例はこれまでほとんどなく，実験で観察されたような局所化挙動をマクロ構造物に再現することは非常に興味深い．

2 陰的増分均質化法

周期的な微視構造体からなるマクロ構造物を考える．微視構造体は，マクロ構造物に対して十分に小さいとし，その周期単位セルは Y とする．

2.1 前報の結果　まず，ユニットセルの体積平均を次式のように定義する．

$$\langle \# \rangle = |Y|^{-1} \int_Y \# \mathrm{d}Y \tag{1}$$

ここで，$|Y|$ はユニットセルの体積を示す．このとき，マクロ応力 $\mathbf{\Sigma}$ とミクロ応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の関係が次式のように表される．

$$\mathbf{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \tag{2}$$

また，物体力を無視した場合に，ミクロ応力の釣合い式が弱形式で

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = 0 \tag{3}$$

と書ける．ここで，δ は任意の変分を示し，$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は Y 周期性を満足する擾乱ひずみである．さらに，Y 内での位置ベクトルを $\mathbf{y}$ とすると，Y 内のミクロ変位 $\mathbf{u}$ は，次式で表される．

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}} \tag{4}$$

上式の $\tilde{\mathbf{u}}$ は擾乱変位を示す．このとき，ミクロひずみは次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}[\nabla_y \mathbf{u}] = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{5}$$

ここで，∇_y は $\partial/\partial y$ を示す．

Y 内の弾性変形は，Hooke の法則に従うとする．すなわち，Y を構成する材料の弾性剛性を $\mathbf{D}^e$ とすると

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{6}$$

で表される．ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}^p$ は塑性ひずみを示す．

式(2)-(6)が時刻 t_{n+1} で成り立つとして離散化したのち，均質化問題を Newton-Raphson 法に従って解くために，構成式(6)を線形化し整理すると

$$\begin{aligned} &\left\langle \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{D}_{n+1}^{(i)} : \nabla_y \Delta\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} \right\rangle = \\ &\quad -\left\langle \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} \right\rangle - \left\langle \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{D}_{n+1}^{(i)} : (\Delta\mathbf{E}_{n+1} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)}) \right\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

を得る．ここで，$\mathbf{D}_{n+1}^{(i)} = \partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} / \partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(i)}$ であり，Δ は時刻 t_n から t_{n+1} への増分を表す．また，添字(i)は第 i 反復を示す．式(7)の境界値問題を有限要素法により解くことで，$\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)}$ が求まり，$\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(i)}$，$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)}$ が更新される．反復計算が収束すれば，$\langle \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \rangle$ から $\mathbf{\Sigma}_{n+1}$ を得ることができる．

2.2 半ユニットセルの導入　図 1 に示すハニカム構造物を考える．ハニカム構造物は，ユニットセルの周期性に加えて，○ に関する点対称性を有することが分かる．したがって，Y 内部の応力ひずみもこれらの点に関して点対称に分布する．よって，半ユニットセル $\tilde{Y}$ の体積平均を

$$\langle \# \rangle_{\tilde{Y}} = |\tilde{Y}|^{-1} \int_{\tilde{Y}} \# \mathrm{d}\tilde{Y} \tag{8}$$

とすれば，式(2)，(3)は次式で書けることが示される[3]．

$$\mathbf{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\tilde{Y}} \tag{9}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\tilde{Y}} = 0 \tag{10}$$

ここで，$|\tilde{Y}|$ は半ユニットセルの体積を示す．また，基礎式(4)-(6)も同様に成り立つため，半ユニットセルを導入した場合でも，$\tilde{Y}$ に課すべき境界条件は異なるが，式

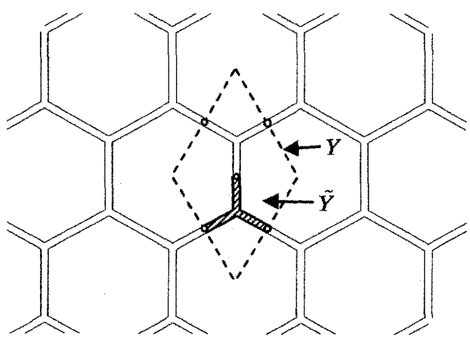

Fig.1 Unit cell Y and semi-unit cell $\tilde{Y}$ of honeycombs.

(7)と同じ境界値問題を解けばよい．つまり，図1における o を中心とした境界面で点対称条件を課すことで解析領域を半減することができる．

3　ハニカム構造物のミクロ／マクロ解析

本研究で構築したミクロ／マクロ解析手法により，ハニカム構造物の圧入解析を行った．

解析に用いたマクロ構造物を図2(a)に示す．マクロ構造物は，中心上部において平面パンチによるインデンテーションを一般化平面ひずみ条件のもとで受けるとして，その1/2部分を2次元8節点低減積分要素により要素分割した．また，マクロ構造物の解析モデルは，メッシュ依存性を検討するために，三種類の有限要素分割粗さの異なるモデルを用意した．中心上部境界における押込み変位 u_L^0 は，$u_{L,\max}^0 = -1.2\mathrm{mm}$ まで増分的に単調圧縮負荷を加えた．

次に，ミクロ構造の有限要素モデルを図2(b)に示す．前章で述べた半ユニットセル $\tilde{Y}$ を取り，一般化平面ひずみ条件のもとでの変形を仮定し，2次元4節点非適合要素により要素分割した．ユニットセルの構成材料は弾塑性材料とし，J_2 完全塑性モデルに従うとした．解析に用いた材料パラメータは，ヤング率 $E = 69$ [GPa]，ポアソン比 $\nu = 0.3$，初期降伏応力 $\sigma_0 = 40$ [MPa]である．

上述の解析の結果，図3(a)-(c)を得た．図3(a)-(c)は，マクロひずみの2乗ノルム $\|\mathbf{E}\| = (\frac{2}{3}\mathbf{E}:\mathbf{E})^{1/2}$ の分布を示しており，どの場合も同じ角度で局所化挙動が起こっている．これは実験で観察された局所化挙動を定性的に再現しているから，本研究のミクロ／マクロ解析手法は有効であることがわかる．

また図4は，マクロ押込み変位 u_L^0 と押込み応力の関係を示している．図3および図4から，マクロ構造物のメッシュ依存性は，ほとんど現れなかったことがわかる．

参考文献

1) Asada, T. and Ohno, N., Int. J. Solids Struct., **44**, 7261 (2007).
2) Terada, K. and Kikuchi, N., Comput. Methods Appl. Mech. Engng., **190**, 5427 (2001).
3) Ohno, N., Matsuda, T. and Wu, X., Int. J. Solids Struct., **38**, 2867 (2001).

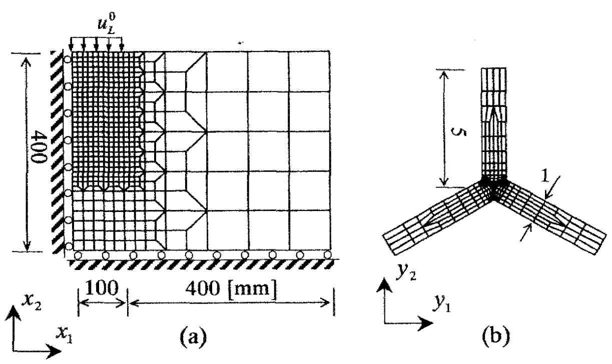

Fig.2 Indentation analysis; (a) finite element mesh of a macro-structure subjected to indentation displacement u_L^0, and (b) finite element mesh of semi-unit cell $\tilde{Y}$.

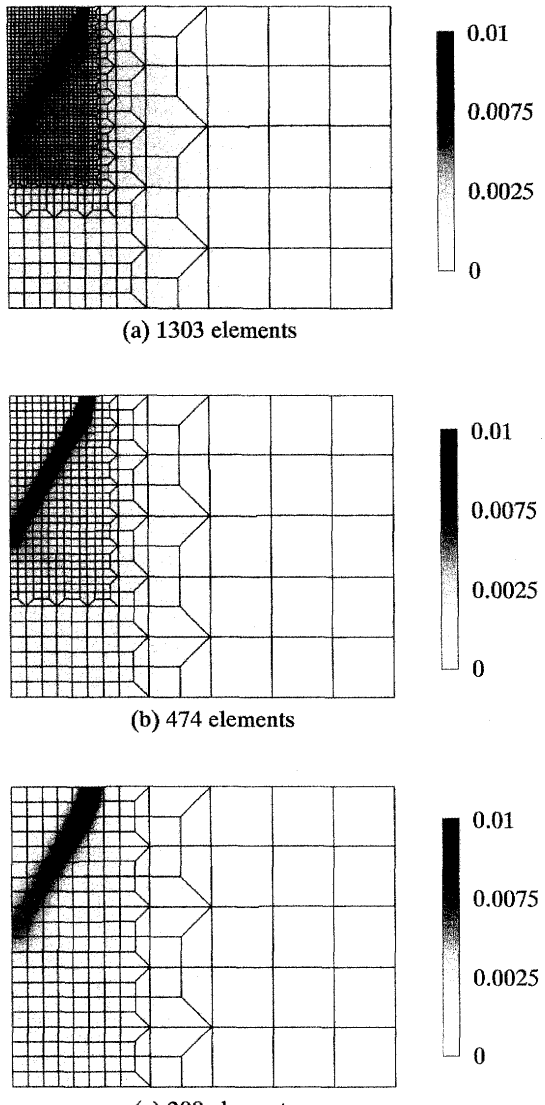

Fig.3 Localization behavior of macro-structures at u_L^0=-0.96 mm; $\|\mathbf{E}\|$ contours in macro-structures (a) 1303 elements, (b) 474 elements, (c) 200 elements.

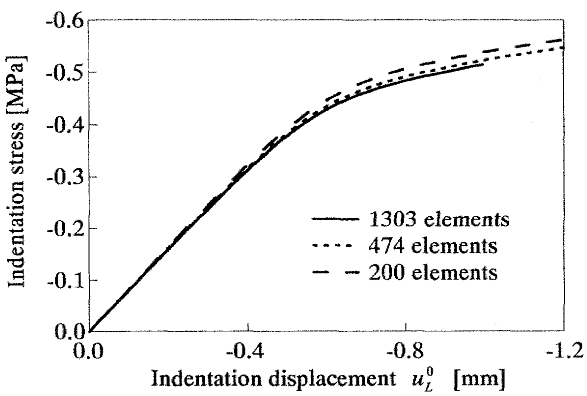

Fig.4 Relationship between macro-indentation stress and macro-indentation displacement u_L^0.