

## 1. はじめに

材料の粘弾性、塑性や粘塑性を表現するには、内部変数を用いた連続体理論が比較的に扱いやすいが、本報告においては、内部変数と記憶効果を考慮することにより、ひずみ硬化-軟化特性やクリープにおける加速クリープ挙動を説明しうる構成式について述べその応用例を示す。

## 2. 内部変数と記憶を持つ弾粘塑性理論

三次元の弾粘塑性理論としてはPergyna<sup>1)</sup>の理論が代表的である。この理論はオーバーストレスモデルと呼ばれかなり多くの時間依存性のある塑性変形を表現しうるが、次のような欠点がある。第一に、クリープ特性のうち、加速クリープを特別な場合として表現できない。第二に、一般に、その極限として弾塑性理論に連続的に合致させることができない。このような欠点を克服するため新たな理論を導くことにする。

一般に、単独熱体と呼ばれる材料においては、物体の応力は考えている物体中の一点の近傍における変形と温度の履歴によって決まる。以下では簡単のため温度履歴は考えない。変形履歴と評価する方法として、大きく分けて次の二つの方法が考えられる。1つは変形履歴に対する汎関数と直接与える方法<sup>2)~4)</sup>であり、他は内部変数を導入する方法である<sup>5)~8)</sup>。一方、内部変数と変形履歴の両方を用いる方法がWang<sup>9)</sup>により、その応用がPergyna<sup>10)</sup>により示されているが、具体的な構成式の提案には至っていない。本報告は、基本的には、Wangの一般化単独体の考えに基づいて論を進める。

まず、 $S$  (カレントホフの応力テンソル) を独立変数にとり、 $S$  の全履歴が次の4つの量で表現できるとする。

$S(t)$ ;  $S$  の現在の値,  $S^*$ ;  $S$  の履歴の汎関数,  $\alpha$ ; 2階テンソルの内部変数,  $\kappa$ ; スカラーの内部変数

$$S^* = \hat{S}^*(S(t-s), S \in (0, \infty)) \quad (1) \text{ 減退記憶の原理を満足すると仮定すると, } \lim_{s \rightarrow \infty} S^* = S \quad (2)$$

$\phi$  (単位質量当りの自由エネルギー),  $E$  (グリーンのひずみテンソル),  $\eta$  (単位質量当りのエントピー)

$Q$  (熱流束ベクトル) と  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\kappa}$  (時間微分を表す) が  $S, S^*, \theta$  (温度),  $G$  (温度勾配),  $\alpha, \kappa$  の関数とすると, Clausius-Duhemの不等式から  $\partial \phi / \partial G = 0$  (3),  $\partial \phi / \partial S = E$  (4)  $\partial \phi / \partial \theta = \eta$  (5) となる。

ここで  $\phi = \phi_1(S, \theta) + \phi_2(S, S^*, \alpha, \kappa, \theta)$  とおけば  $E = E^e + E^i = \partial \phi_1 / \partial S + \partial \phi_2 / \partial S$  (6) となり,  $E^e$  が弾性,  $E^i$  が非弾性ひずみ  $\kappa$  に対応する。

以下では温度の影響を無視する。 $\alpha$  として粘塑性ひずみテンソルを用いる。 $\alpha = E^{vp}$  (7) さらに次の発展則を考える。  $\dot{E}^{vp} = \lambda \partial f_d / \partial S$  (8)  $f_d$  は塑性ポテンシャルで  $f_d(E^{vp}, S, \kappa) = 0$  (9)

降伏曲面は  $f_y(S, S^*, E^{vp}, \kappa) = 0$  (10) であり,  $f_y \leq 0$  弾性,  $f_y > 0$  弾粘塑性状態を示す。

(8)式中の  $\lambda$  は次の  $\dot{\kappa} = \hat{\kappa}(S, S^*, E^{vp}, \kappa)$  (11) なる発展則から求められる。ここでは  $\dot{\kappa} = \dot{E}^{vp}$  (12)

$S^* = S$  の時,  $f_d = f_y$  となり弾塑性体に一致させる。(図-1)

$S^*$  が  $S_t$  の連続線形汎関数とすると、次のように表現することが、可能である。

$$S^* = \int_{-\infty}^t K(t-t') S_t(t') dt', \quad t' \in (-\infty, t), \quad S_t \equiv S(t-s), \quad S \in (0, \infty) \quad (13)$$

$K$  はもっと一般に  $K(t-t', E^{vp})$  とおくこともできる。

応用例 ここで微小変形勾配の場合での単純引張り状態を考える。

単純引張り状態で Prandtl-Reuss 型<sup>彈</sup>塑性体は次式で与えることができる。

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{1}{E} d\sigma + d\varepsilon^p \quad (14), \quad d\varepsilon^p = A \partial f_2 / \partial \sigma \quad (15)$$

$$f_2 = \sigma \quad (16) \quad A = d\sigma / H'(\varepsilon^p) = d\sigma / g'(\sigma) \quad (17)$$

$d\sigma / d\varepsilon^p = H'(\varepsilon^p) = g'(\sigma)$  (18) ここで,  $\varepsilon$ : 軸ひずみ,  $\sigma$ : 軸応力,  $d\varepsilon^p$ : 塑性ひずみ増分,  $H'$ ,  $g'$ : 硬化係数,  $E$ : 弾性ヤング率である。

ここでは単一の Exponential 関数を用いて次式で  $S^*$  つまり  $\sigma^*$  を定義する。

$$\sigma^* = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau} \sigma_r(t') dt' \quad (19)$$

硬化関数が  $\varepsilon^p = g(\sigma)$  と表わされるという。  $g(\cdot)$  とは双曲型関数と考え  $\sigma$  と  $\sigma^*$  を入れ替えると,

$$\varepsilon^{pp} = b\sigma^* / (a - \sigma^*) \quad (20) \quad (20) \text{ と } (15), (16), (17) \text{ 及び } (18) \text{ から}$$

$$\frac{d\varepsilon^{pp}}{dt} = \frac{ab}{(a - \sigma^*)^2} (\sigma - \sigma^*) \frac{1}{\tau} \quad (21)$$

$a, b, \tau$  は材料定数である。  $\tau$  は  $\sigma^*$  の  $\sigma$  に対する遅れ時間を示すパラメーターであり,  $\tau$  とえば  $\sigma = a$  の時、フリクシーフ時には  $d\varepsilon^{pp}/dt = \frac{b}{\tau} e^{t/\tau} > 0$  ( $b > 0$ ) とし加速フリーフを示すことになる。

$a$  は双曲型硬化関数で  $\varepsilon^p \rightarrow \infty$  の時の値 (の値) であり,  $b^{-1}$  は硬化関数 ( $\sigma \sim \varepsilon^p$ ) の初期勾配である。

$a = 1.0$  (kgf/cm<sup>2</sup>),  $b = (1/200)$  (1/kgf/cm<sup>2</sup>),  $E = 200$  (kg/cm<sup>2</sup>),  $\tau = 100$  sec の場合の種々のひずみ速度に対する応答を示す。高分子材料や軟弱な粘土でみられるスリソバーシュート, スリソアンジュ現象がみられ興味深い。

### 3. 内部変数と言ひ意を持つ塑性理論

Pipkin & Rivlin や Valanis は変形履歴の測度として次のような内部測度を用いた。

$dZ^2 = P_{ij,kl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}$  (22)  $P_{ij,kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$  の場合が Pipkin & Rivlin の場合であり, Valanis はより一般に  $dZ^2 = d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}$  を使い, さらに  $d\varepsilon_{ij}$  のかわりに塑性ひずみ増分テンソルを用いている。ここでは時間依存性のない塑性理論と導く際に, (22) 式の  $Z$  を用いて応力履歴と評価することにする。

$$S^* = \hat{S}^*(S_r^*(Z-S)), \quad S \in (0, Z] \quad (23) \quad \text{ただし } dZ^2 = d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (24)$$

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} S = S(Z) \quad (25)$$

$S^*$  はひずみ経路  $K$  に対する遅れ応力パラメーターと考えられ, 変形の進行にともない現在の  $S$  の値に一致してくる。

塑性ひずみ増分テンソル  $d\varepsilon^p$  は次式より求められる。

$$d\varepsilon^p = A \partial f_2 / \partial S \quad (26) \quad f_2(S, S^*, E^p, \kappa) = 0 \quad (27)$$

$$f_2(S, E^p, \kappa) = 0 \quad (28) \quad f_2: \text{塑性ポテンシール} \quad f_y: \text{降伏関数}$$

$$df_y > 0 \quad \text{負荷}, \quad df_y = 0 \quad \text{中立負荷}, \quad df_y < 0 \quad \text{除荷} \quad \text{であり,}$$

$A$  は硬化則より求められる。

応用例

2. 節の場合と同様の場合を考える。  $S \in \sigma$  で  $S^* \in \sigma^*$  で表われ,  $dZ = d\varepsilon$  とおく。

$$\sigma^* = \frac{1}{\tau} \int_0^Z e^{-(Z-Z')/\tau} \sigma_r(Z') dZ' \quad (29)$$

弾粘塑性体の場合と同様に双曲型の関数を仮定すると (14) 式より

$$d\sigma = E \left( 1 - \frac{ab}{(a - \sigma^*)^2} (\sigma - \sigma^*) \frac{1}{\tau} \right) d\epsilon \quad (30)$$

$a = 1.0 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ ,  $b = (1/200) \text{ (1/kgf/cm}^2\text{)}$ ,  $E = 200 \text{ kgf/cm}^2$  の時の種々の  $\tau$  に対する応答を図-3に示す。  
ひずみ硬化-軟化特性を示すことが確かめられた。ここで述べた方法はひずみ軟化特性を示す種々の材料に対して有効  
であると考えられ、今後具体的な材料に対して適用してゆくつもりである。

### 参考文献

- 1) P. Perzyna, Advances in Appl. Mech., Vol. 12, p. 313 (1971)
- 2) Coleman & Noll, Rev. Modern Phys., Vol. 33, 239 (1961)
- 3) Pipkin & Rivlin, ZAMP, 16, 313 (1965)
- 4) K. C. Valanis, Archives of Mech., 23, 517 (1971)
- 5) Coleman & Gurtin, J. Chem. Phys. 47, 597 (1967).
- 6) K. C. Valanis, J. Math. & Phys., 45, 197 (1966)
- 7) Green & Naghdi, Arch. Rational Mech. Analysis, 18, 251 (1965)
- 8) Kratochvil & Dillon, J. Appl. Phys., 40, 3207 (1969).
- 9) C.-C. Wang, Arch. Rational Mech. Analysis, 32, 1 (1969)
- 10) P. Perzyna, Int. J. Non-Linear Mech., 6, 707 (1971)
- 11) 山本三三三, 物体の変形学, 材料学会編, 誠文堂新光社 (昭和47)
- 12) 関口秀雄, 京都大学工学部博士申請論文 (1974)

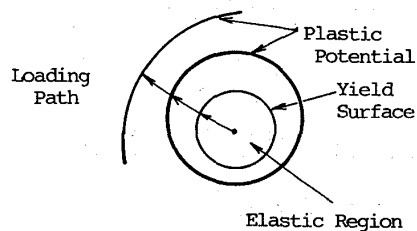


Fig. 1

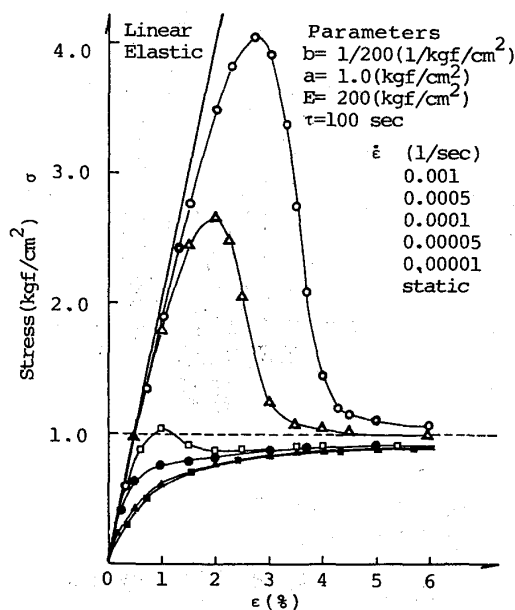


Fig. 2

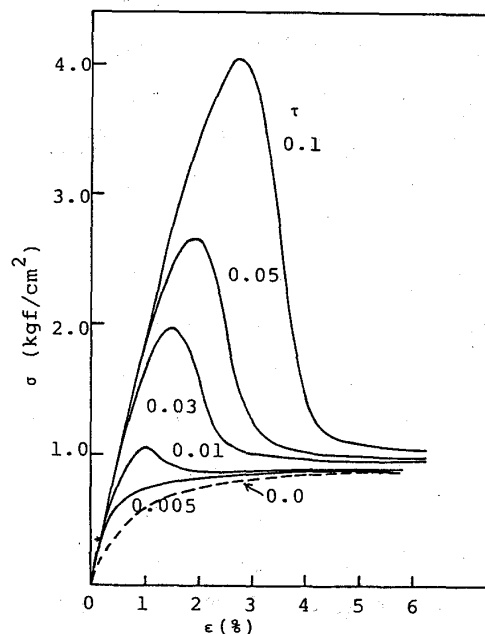


Fig. 3