

大阪府立大学工学部
松下電工株式会社

菅野 良弘
田 栗 昇

1. 緒言 材料の物性値の温度依存性が温度分布や熱応力分布の正確な解析に不可欠であることはよく知られており、従来から球¹⁾、円筒²⁾、複合円筒³⁾、複合球⁴⁾などの一次元定常、非定常熱応力問題は、特定の熱的境界条件(境界温度指定)、物性値の温度依存性のもとで解析結果が報告されている。また、著者の一人は^{5),6)}、二次元温度場にある多重連結領域の非定常熱応力問題を物性値の温度依存性を考慮して解析するための基礎式系を誘導し、数値計算を行って物性値の温度依存性が熱応力分布に及ぼす影響を検討した。一般に、高温構造材料としてのセラミックスは、鉄鋼材料より高温に耐え、また広い温度域で弾性体として挙動するため、この広い温度域で熱弾性解析するには、狭い温度域でしか弾性解析がゆりされない金属材料以上に物性値の温度依存性の考慮が必要とされる。Ganguly と Hasselman⁷⁾は、アルミナの熱衝撃特性を知るため、板厚方向にのみ温度分布をもつ平板の定常熱応力を、熱伝導率の温度依存性のみを考慮し、ヤング率、線膨張係数、ポアソン比は一定値として既存の熱応力式^{8),9)}を用いて解析して、熱応力分布に及ぼす熱伝導率の影響を論じている。しかし、板厚方向に温度分布をもつ平板の熱応力を、ヤング率、線膨張係数、ポアソン比などの温度依存性を考慮して解析するための比較的容易に使用しうる熱応力式は報告されていない。そこで、本研究では、セラミックスの熱的材料挙動に興味のある者が比較的容易に利用しうる熱的、弾性的物性値の温度依存性が考慮された熱応力式を提案し、種々の熱的境界条件の組合せのもとで解析できることを示し、アルミナの平板の物性値の温度依存性を考慮した定常熱応力問題に適用して、数値計算結果から物性値の温度依存性の影響を検討した。

2. 理論解析

2.1 定常温度場 板厚方向にのみ温度分布をもつ厚さ $2b$ の平板の物性値の温度依存性が考慮された定常温度場は、図1のように板厚方向に z 軸をとり、温度を T 、熱伝導率を $\lambda(T)$ とすれば、次式のように表わされる。

$$\frac{d}{dz} \left\{ \lambda(T) \frac{dT}{dz} \right\} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

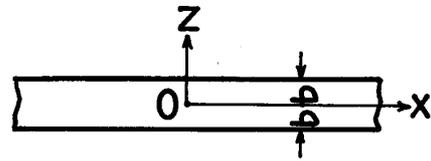


図1. 板厚方向に温度分布をもつ平板

次に、板の両面において3種類の熱的境界条件を考

- (i) 第1種熱的境界条件 ($h \rightarrow \infty$), $T = \Theta$ (温度指定)
 - (ii) 第2種熱的境界条件 ($h = 0$), $\lambda(T) \frac{dT}{dz} = 0$ (断熱)
 - (iii) 第3種熱的境界条件 ($0 < h < \infty$), $\lambda(T) \frac{dT}{dz} + h(T - \Theta) = 0$ (熱放散)
- ここで、 Θ は境界指定温度または周囲媒体温度、 h は熱伝達率である。

$$\text{式(1)より,} \quad \lambda(T) \frac{dT}{dz} = C_1 \quad \text{----- (2)}$$

$$\Lambda(T) = \int \lambda(T) dT = C_1 z + C_2 \quad \text{----- (3)}$$

熱伝導率が温度の線形関数で表わされる場合などを除くと式(3)から $T(z)$ を求めることは容易でないので、ここでは式(2)、(3)の積分定数 C_1, C_2 を熱的境界条件から求め、それをを用いて z, dz を温度 T の関数として表わし、この C_1, C_2, z, dz を以後の熱応力の解析に利用する手法をとる。次に、板の両面において種々の熱的境界条件の組合せを有する場合について C_1, C_2 を求める。

(a) 両面の温度が指定された場合

$$T = T_1, \quad z = b \quad \text{----- (4)} \quad T = T_2, \quad z = -b \quad \text{----- (5)}$$

式(4)、(5)を式(3)に代入して、

$$C_1 = \{ \Lambda(T_1) - \Lambda(T_2) \} / 2b \quad \text{----- (6)}, \quad C_2 = \{ \Lambda(T_1) + \Lambda(T_2) \} / 2 \quad \text{----- (7)}$$

(b) 片面断熱、他面温度指定の場合

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} = 0, \quad z = b \quad \text{----- (8)} \quad T = T_1, \quad z = -b \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{式(2), (8)より,} \quad C_1 = 0 \quad \text{----- (10)} \quad \therefore T = \text{const.} \quad \text{----- (11)}$$

$$\text{式(9), (11)より,} \quad T = T_1 \quad (|z| \leq b) \quad \text{----- (12)} \quad \text{従って,}$$

$$\text{式(3), (10), (12)より} \quad C_2 = \Lambda(T_1) \quad \text{----- (13)}$$

(c) 両面断熱の場合

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} = 0, \quad z = b \quad \text{----- (14)}, \quad \lambda(T) \frac{dT}{dz} = 0, \quad z = -b \quad \text{----- (15)}$$

$$\text{式(2), (14), (15)より,} \quad C_1 = 0 \quad \text{----- (16)} \quad \therefore T = \text{const. (定)} \quad \text{----- (17)}$$

$$\text{式(3), (16), (17)より,} \quad C_2 = \Lambda(T = \text{const. (定)}) \quad \text{----- (18)}$$

(d) 片面断熱、他面熱放散の場合

$z = -b$ における熱伝達率を h_{-b} で表わすと、

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} = 0, \quad z = b \quad \text{----- (19)}$$

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} - h_{-b} (T - \Theta_1) = 0, \quad z = -b \quad \text{----- (20)}$$

式(2), (19)より, $C_1 = 0$ ----- (21) $\therefore T = \text{const.}$ ----- (22)

式(2), (20), (21)より, $T = \Theta_1$ ----- (23)

また, 式(3), (21), (23)より, $C_2 = \Lambda(\Theta_1)$ ----- (24)

(c) 片面温度指定, 他面熱放散の場合

$$T = T_1, \quad z = b \quad \text{----- (25)}$$

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} - h_{-b} (T - \Theta_2) = 0, \quad z = -b \quad \text{----- (26)}$$

今, $z = -b$ における温度を $T = T_{-b}$ と仮定すれば, 式(26)より,

$$\left[\lambda(T) \frac{dT}{dz} \right]_{z=-b} = h_{-b} (T_{-b} - \Theta_2) = C_1 \quad \text{----- (27)}$$

式(3)に式(27)の C_1 と式(25)を代入すれば,

$$C_2 = \Lambda(T_1) - h_{-b} b (T_{-b} - \Theta_2) \quad \text{----- (28)}$$

次に, 式(27), (28)を式(3)に代入すれば,

$$\Lambda(T) = h_{-b} (z - b) (T_{-b} - \Theta_2) + \Lambda(T_1) \quad \text{----- (29)}$$

式(29)は, $z = -b$, $T = T_{-b}$ においても成立するので,

$$\Lambda(T_{-b}) - \Lambda(T_1) = -2h_{-b} b (T_{-b} - \Theta_2) \quad \text{----- (30)}$$

従って, $z = -b$ における温度 T_{-b} は式(30)が満足されるように決定され, この T_{-b} を式(27), (28)に代入することにより C_1, C_2 が決定される。

(f) 両面熱放散の場合 $z = b, -b$ における熱伝達率,

周囲媒体温度をそれぞれ h_b, h_{-b} ; Θ_3, Θ_4 とすると,

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} + h_b (T - \Theta_3) = 0, \quad z = b \quad \text{----- (31)}$$

$$\lambda(T) \frac{dT}{dz} - h_{-b} (T - \Theta_4) = 0, \quad z = -b \quad \text{----- (32)}$$

今, $z = b, -b$ における温度を T_b, T_{-b} と仮定すると, 式(31), (32)より

$$\left[\lambda(T) \frac{dT}{dz} \right]_{T=T_b} = h_b (\Theta_3 - T_b) = C_1 \quad \text{----- (33)}$$

$$\left[\lambda(T) \frac{dT}{dz} \right]_{T=T_{-b}} = h_{-b} (T_{-b} - \Theta_4) = C_1 \quad \text{----- (34)}$$

$$\therefore C_1 = h_b (\Theta_3 - T_b) \quad \text{----- (35)} \quad \text{従って, 式(3)より}$$

$$C_2 = \Lambda(T_b) - h_b b (\Theta_3 - T_b) \quad \text{----- (36)}$$

また, $z = \pm b$ で式(3)が成立することから

$$\Lambda(T_b) - \Lambda(T_{-b}) = 2C_1 b \quad \text{----- (37)}$$

式(33), (34)より, T_{-b} は T_b で次のように表わされる。

$$T_{-b} = \frac{h_b}{h_{-b}} (\Theta_3 - T_b) + \Theta_4 \quad \text{----- (38)}$$

式(37)に式(35), (38)を代入すれば,

$$\Lambda(T_b) - \Lambda\left(\frac{h_b}{h_{-b}} (\Theta_3 - T_b) + \Theta_4\right) = 2h_b b (\Theta_3 - T_b) \quad \text{----- (39)}$$

式(39)が成立するよう $z = b$ における温度 T_b が決定されると, 式(35), (36)から C_1, C_2 が決定される。

2.2 物性値の温度依存性を考慮した平板の熱応力

平板に外力が作用せず, 板厚方向のみ定常温度分布をもつ場合の熱応力成分は, 次式の形に表わしうる。

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = f(z), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yx} = \sigma_{zy} = 0 \quad \text{----- (40)}$$

また, この場合の応力-ひずみ式は, ヤング率, ポアソン比, 線膨脹係数を $E(T), \nu(T), \alpha(T)$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \{1 - \nu(T)\} f(z) / E(T) + \psi(T), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{zy} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = -2\nu(T) f(z) / E(T) + \psi(T), \quad \psi(T) = \int \alpha(T) dT \end{aligned} \right\} \quad \text{(41)}$$

式(40)の応力成分は (x, y, z) を標準系の応力のつり合式を満足しているので, 式(41)のひずみ成分が次の適合条件式を満足すれば, $f(z)$ が所要の熱応力成分となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx, yy} + \varepsilon_{yy, xx} = 2\varepsilon_{xy, xy}, \quad \varepsilon_{yy, zz} + \varepsilon_{zz, yy} = 2\varepsilon_{yz, yz} \\ \varepsilon_{zz, xx} + \varepsilon_{xx, zz} = 2\varepsilon_{zx, zx}, \quad \varepsilon_{xx, yy} = -\varepsilon_{yz, xx} + \varepsilon_{zx, yx} + \varepsilon_{xy, zx} \end{aligned} \right\} \quad \text{(42)}$$

$\varepsilon_{yy, zx} = -\varepsilon_{zx, yy} + \varepsilon_{xy, zy} + \varepsilon_{yz, xy}, \quad \varepsilon_{zz, xy} = -\varepsilon_{xy, zz} + \varepsilon_{yz, xz} + \varepsilon_{xz, yz}$
 $\therefore \tau^2, \quad \varepsilon_{xx, yy} = \partial^2 \varepsilon_{xx} / \partial y^2$. 式(41), (42)より次式が満足されるとき式(41)のひずみ成分(応力成分 $f(z)$)が存在する。

$$\left[\{1 - \nu(T)\} f(z) / E(T) + \psi(T) \right]_{,zz} = 0 \quad \text{----- (43)}$$

$$\therefore f(z) = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \{ C_5 z + C_6 - \psi(T) \} \quad \text{----- (44)}$$

式(44)はその形から明らかなように特殊な温度場の場合を除いて traction free の条件を満足しないので, Saint Venant's の原理により次式によって C_1, C_2 を決定する。

$$\int_{-b}^b \sigma_{xx} dz = \int_{-b}^b z \sigma_{xx} dz = 0 \quad \text{----- (45)}$$

σ_{yy} についても同様である。式(45)に式(44)を代入すれば,

$$C_5 = \frac{I_2 \cdot I_N - I_1 \cdot I_M}{I_2^2 - I_1 \cdot I_3}, \quad C_6 = \frac{I_2 \cdot I_M - I_3 \cdot I_N}{I_2^2 - I_1 \cdot I_3} \quad \text{----- (46)}$$

$\therefore \tau^2,$

$$\left. \begin{aligned} I_1 = \int_{-b}^b \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} dz, \quad I_2 = \int_{-b}^b \frac{z E(T)}{1 - \nu(T)} dz, \quad I_3 = \int_{-b}^b \frac{z^2 E(T)}{1 - \nu(T)} dz \\ I_N = \int_{-b}^b \frac{E(T) \psi(T)}{1 - \nu(T)} dz, \quad I_M = \int_{-b}^b \frac{z E(T) \psi(T)}{1 - \nu(T)} dz \end{aligned} \right\} \quad \text{(47)}$$

$$\text{式(2), (3)より, } dz = \frac{\lambda(T)}{C_1} dT, \quad z = \frac{\Lambda(T) - C_2}{C_1} \quad \text{----- (48)}$$

式(43)を(47)に代入すれば, $I_1 \sim I_3, I_N, I_M$ は温度に関する積分として次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 = \frac{1}{C_1} \int_{T_b}^{T_a} \frac{E(T) \lambda(T)}{1 - \nu(T)} dT, \quad I_2 = \frac{1}{C_1^2} \int_{T_b}^{T_a} \frac{E(T) \lambda(T) \{ \Lambda(T) - C_2 \}}{1 - \nu(T)} dT \\ I_3 = \frac{1}{C_1^3} \int_{T_b}^{T_a} \frac{E(T) \lambda(T) \{ \Lambda(T) - C_2 \}^2}{1 - \nu(T)} dT, \quad I_N = \frac{1}{C_1} \int_{T_b}^{T_a} \frac{E(T) \lambda(T) \psi(T)}{1 - \nu(T)} dT \\ I_M = \frac{1}{C_1^2} \int_{T_b}^{T_a} \frac{E(T) \lambda(T) \psi(T) \{ \Lambda(T) - C_2 \}}{1 - \nu(T)} dT \end{aligned} \right\} \quad \text{(49)}$$

C_1, C_2, T_a, T_b は温度場の解析から求まっているので式(46)

(49)より C_5, C_6 が決定されると式(44)より所要の熱応力が得られる。なお, 式(3)において z を指定すれば, 温度 T が反復法により得られ, 式(44)中の $E(T) / \{1 - \nu(T)\}, \psi(T)$ が決定される。式(44), (46), (47)に $E(T) = E_0, \nu(T) = \nu_0, \alpha(T) = \alpha_0$ を代入して得られる熱応力式は, Boley & Weiner⁹⁾ や竹内¹⁾ の著書に示めされている式と完全に一致する。

3. アルミナ平板の物性値の温度依存性を考慮した熱応力

数値計算に用いたアルミナ (Al_2O_3) の物性値の温度依存式も次のように定めた。¹⁰⁾⁻¹³⁾

$$\left. \begin{aligned} \lambda(T) &= 5.729 \times 10^{-14} T^4 - 1.854 \times 10^{-3} T^3 + 2.477 \times 10^{-7} T^2 \\ &\quad - 1.726 \times 10^{-4} T + 6.30 \times 10^{-2} \text{ [cal/cm} \cdot \text{c} \cdot \text{sec]} \\ E(T) &= 3.531 \times 10^6 - 4.930 \times 10^2 (T + 273.15) \exp[-309.0 \\ &\quad / (T + 273.15)] \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\ \alpha(T) &= -1.282 \times 10^{-18} T^4 + 6.662 \times 10^{-15} T^3 - 1.266 \times 10^{-11} T^2 \\ &\quad + 1.211 \times 10^{-8} T + 7.098 \times 10^{-6} \text{ [}^\circ\text{C}^{-1}\text{]} \\ \nu(T) &= 1.20 \times 10^{-5} T + 0.232 \end{aligned} \right\} (50)$$

Ganguly と Hasselman⁷⁾は、熱伝導率のみならず温度依存性を考慮した平板の定常熱応力を解析しているが、そこで用いたヤング率、線膨張係数、ポアソン比の一定値は示していないので、ここでは、27°Cのときの値 $E_0 = 3.47 \times 10^6$ (kg/cm²) $\nu_0 = 0.232$, $\alpha_0 = 7.09 \times 10^{-6}$ (°C⁻¹) を用いて数値計算を行い、Ganguly と Hasselman⁷⁾との結果と比較して解法の check を行った。

図2は、熱伝導率の温度依存性を考慮して解析されたアルミナ平板の温度分布で、実線は Ganguly と Hasselman⁷⁾の結果と、破線は Ganguly⁷⁾の温度分布の板両面の値を指定温度として境界条件(a)について本解析法で得られた結果と、また、一点鎖線は熱伝導率の温度依存性は考慮せず、温度指定境界条件のもとに得た結果を示す。実線と破線は非常によく一致しており、また、熱伝導率の温度依存性を考慮することにより温度勾配が大きくなることを読みとれる。

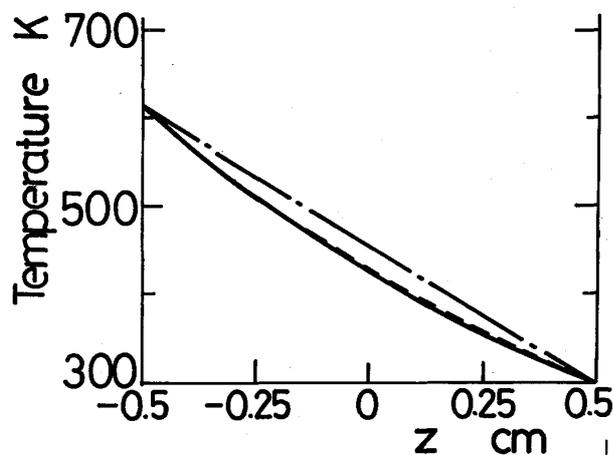


図2. 平板内の温度分布 (2b=1cm)

図3は、図2の温度分布のもとでのアルミナ平板内の熱応力分布を示し、実線は Ganguly⁷⁾の熱伝導率のみを考慮した場合の結果、破線と一点鎖線は本解析法でそれぞれ熱伝導率のみを考慮した場合、式(50)を用いた場合の結果である。この図より実線と破線はよく一致しており本解析法の有効性が確認された。図中の一点鎖線よりアルミナ平板の熱応力は弾性的な物性値の温度依存性をも考慮することにより相当大きくかん知されることがわかる。なお、物性値一定の平板の温度場は、単連結領域が熱応力を生じないための条件⁹⁾を満足するから $\sigma_{xx} = 0$ である。

図4は、式(50)の物性値の温度依存性を用い、温度差

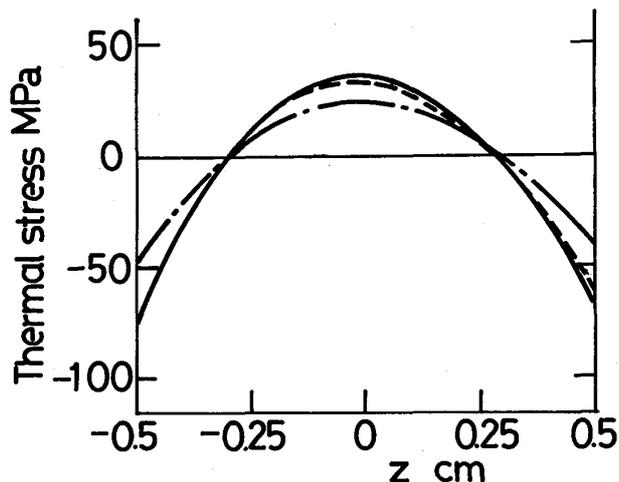


図3. 平板内の温度分布 (2b=1cm)

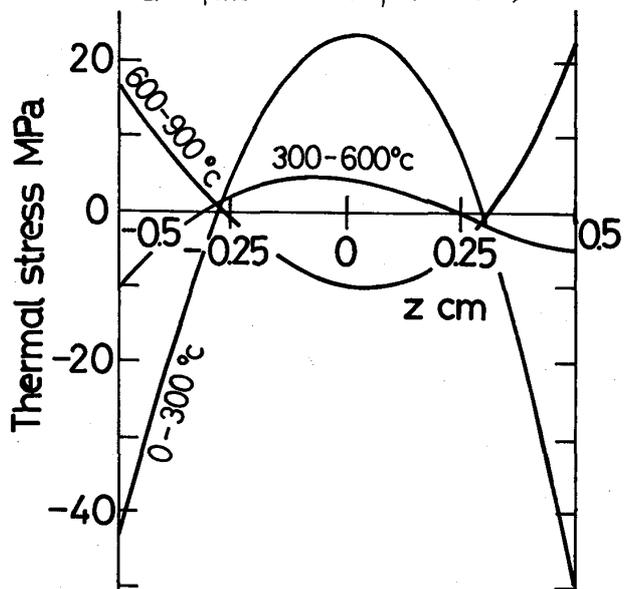


図4. 種々の温度域における平板内の温度分布

を300°Cに固定し、温度域を変えて得られたアルミナ平板内の熱応力分布を示す。この図より温度域によって全く逆の分布を示すことから温度差のみでなく、温度域に注意してアルミナを高温構造材料として使用するべきことを暗示している。

参考文献

(1) Nowinski, J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 29-2 (1962), 399. (2) 畑・渥美, *機論*, 34-266 (昭43), 1697. (3) 竹内・1783名, *軽金属*, 28-5 (昭53), 247. (4) 矢交・1782名, *機論*, 44(A)-381 (昭53), 1454. (5) Sugano, Y., *Z.A.M.M.* 64-3 (1984), 163. (6) 菅野・前川, *機論*, 50-461 (1985), 960. (7) Ganguly, B.K., McKinney, K.R. & Hasselman, D.P.H., *J. Amer. Ceramic Soc.*, 58-9/10 (1975), 455. (8) Boley, B.A., Weiner, J.H., *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons (1960), 278. (9) 竹内, *熱応力* 日新出版 (昭46), 53, 57. (10) 山口・柳田編, *エンジニアリングセラミックス*, 技報堂出版 (昭59), 133. (11) 小松・佐野他共訳, *セラミックス材料科学入門(応用編)*, 内田老鶴園新社 (昭56), 576. (12) Watchman, J.B., *Physical Review*, 122-6 (1961), 1754. (13) 京セラグループ, *Mechanical and Industrial Ceramics*, No. Z-103-2, P.15.