214　炭素繊維複合材（ＣＦＲＰ）の疲労に対する確率論的考察

京都大学工学部　正　伊原千秋
京都大学工学部　正　○三澤哲也
京都大学大学院　重山吉偉

1　緒　言

炭素繊維複合材（ CFRP ）による飛行機の機体構造の開発が活発になっているが、CFRP は現在のところ品質の一様性に問題がある。そのため、CFRP を航空機の、主要な荷重をうけもつ１次構造へ使用する場合、疲労に対する信頼性が重要となり、疲労寿命分布などについての十分な知識が要求される。ところが、CFRP の疲労寿命に関する分布形やばらつきについては、公表されているデータが非常に少なく[1][2][3]、したがってまた、これらを理論的に考察した研究もほとんど見当たらない。

本論文では、この CFRP に疲労損傷が累積していく様子や、疲労寿命分布を理論的に求めるために、L.M. Kachanov による損傷力学の基礎方程式を採用し[4][5]、これに確率過程を導入して以下のような数学モデル[6]を作る。すなわち、部材が繰り返し応力を受けた場合、その部材に疲労損傷が累積し、それが部材の本来持っている性質に影響を及ぼすと考えられるので、上記の基礎方程式に現れる材料定数が不規則に変化すると考える。そこで、材料定数に Gauss 型白色雑音過程と呼ばれる確率過程を不規則入力として加え、得られた方程式をさらに伊藤型確率微分方程式に変換し、これを解くと、見本過程が得られる。さらに、確率密度関数も求めることができ、これを基にして疲労寿命分布が導出できる。そしてその結果を基に計算機実験を試み、実際の実験結果と比較することにより、この数学モデル、およびここで用いた解析手法について、その妥当性を検討する。

2　確率モデル[6]

L.M.Kachanov によれば、１次元の繰り返し応力による疲労損傷累積過程の基礎方程式は次式の形で与えられる[4][5]。

$$d\Psi/dn=A\cdot(S/\Psi)^{m} \qquad (1)$$

ここで Ψ は n サイクル後の健全度[5]と呼ばれるもので $n=0$ のとき $\Psi=1$ であり、部材が破断したときのサイクル値を N とすれば $n=N$ のとき $\Psi=0$ となる単調減少関数である。また A,m は材料定数で $A=0,m\geqq1$ であり、S は一定繰り返し応力振幅である。

実際の CFRP の平面曲げ疲労試験[3]によれば、N と剛性保持率[1]という形で求められる Ψ は、式（１）から求められるそれら値を中心にしてばらつくという結果が出ている。これは部材の受ける損傷、すなわち炭素繊維の剥離が起きる場所や剥離の大きさが、部材の本来持っている性質に影響を及ぼし、その結果式（１）の材料定数 A,m が変化するためと考えられる。ここでは特に A に着目し、この A が不規則に変化すると考え、また m は一定として議論を進めていくことにする。A が不規則に変化した場合も式（１）が成り立つと仮定すれば、式（１）は次のように書き直すことができる。

$$d\Psi/dn=-A(n)\cdot(S/\Psi)^{m} \qquad (2)$$

以下式（２）に基づいて疲労損傷累積過程を表す伊藤型確率微分方程式を導く。

まず、 $A(n)$ の不規則性を表すモデルとして、次の Gauss 型白色雑音過程を含む確率過程を採用することにする。

$$A(n)=A_1(n)+A_2(n)\cdot\gamma(n) \qquad (3)$$

ここで $A_1(n),A_2(n)$ は共に n に関する確定的な関数で n が有限のときはその絶対値が共に有界となる滑らかな関数とする。また $\gamma(n)$ は Gauss 型白色雑音、すなわち Gauss 型確率密度関数を持ち、形式的に

$$E[\gamma(n)]=0 \qquad (4)$$

$$E[\gamma(n)\cdot\gamma(n')]=\delta(n-n') \qquad (5)$$

を満たす確率過程である。（ $E[\cdots]$ は平均をとる操作を表す。また δ は Dirac のデルタ関数である。）

式（３）を式（２）に代入すると

$$d\Psi/dn=-S^{m}A_1(n)\cdot\Psi^{-m}-S^{m}A_2(n)\cdot\Psi^{-m}\cdot\gamma(n) \qquad (6)$$

が得られる。式（６）は Langevin 方程式と呼ばれるもので $m\geqq1$ である m に対しては非線形となっている。そこで次のような変数変換

$$\Xi(n)=\{\Psi(n)\}^{m+1} \qquad (7)$$

を用いて、式（６）を $\Xi(n)$ についての方程式として書き換えると

$$d\Xi/dn=-S^{m}\cdot(m+1)\cdot A_1(n)-S^{m}\cdot(m+1)\cdot A_2(n)\cdot\gamma(n) \qquad (8)$$

が得られる。この式は線形であるから、 Wong らの結果[7]を用いて、次のような伊藤型確率微分方程式が得られる。

$$d\Xi(n)=-S^{m}(m+1)\cdot A_1(n)dn$$
$$-S^{m}(m+1)\cdot A_2(n)dw(n) \qquad (9)$$

ここで $w(n)$ は１次元標準 Wiener 過程、すなわち、

初期値が 0 で、次の条件を満たす Gauss 過程である。

$$E[w(n)]=0 \qquad (10)$$

$$E[w(n)\cdot w(n')]=n \quad (n'\geq n) \qquad (11)$$

式（９）に対する解は、初期値が$\Xi(0)=\{\Psi(0)\}^{m+1}=1$であることから、

$$\Xi(n)=1-S^m(m+1)\int_0^n A_1(\tau)d\tau -S^m(m+1)\int_0^n A_2(\tau)dw(\tau) \qquad (12)$$

となる。ここで右辺の第３項の積分は確率積分[8)9)]と呼ばれているものである。以上のことから $\Psi(n)$ は、式（１２）で定まる $\Xi(n)$ に対して式（７）を逆に解いて得られる式

$$\Psi(n)=\{\Xi(n)\}^{1/(m+1)} \qquad (13)$$

を通じて求まることになる。

ところで、最初に述べたように $0\leq\Psi(n)\leq1$ であるが、式（１２）を満たす $\Xi(n)$ は負になり得る量である。したがって式（１２）は $\Xi(n)=1$ から初めて $\Xi(n)=0$ となるまでの n に対して有効であることがわかる。$\Xi(n)$ が初めて 0 となるサイクル値を N とし、またそれ以後の n に対しては $\Xi(n)=0$ 、すなわち $\Psi(n)=0$ となるものと仮定すれば、疲労損傷累積過程は

$$\Psi(n)=\begin{cases}\{\Xi(n)\}^{1/(m+1)} & (0\leq n<N)\\ 0 & (N\leq n)\end{cases} \qquad (14)$$

で与えられる。

次に上の $\Psi(n)$ の確率密度関数を求める。そのために、まず $\Xi(n)$ の確率密度関数を求めるが、上で述べたようなサイクル数 N 以後は $\Xi(n)$ が 0 に留まるという、いわゆる吸収条件がある場合には、それを厳密に求めるのは困難である。そこで、その近似として本論文では吸収条件を考慮しない場合の $\Xi(n)$ の確率密度関数をそのまま採用する。

さて、式（１２）に対応する Fokker-Planck 方程式、すなわち吸収条件を考慮しない $\Xi(n)$ の確率密度関数 $\rho(\xi,n)$の従う偏微分方程式は次の式で与えられる[8)]。

$$\partial\rho/\partial n=S^m(m+1)\cdot A_1(n)\cdot(\partial\rho/\partial\xi) +1/2\{S^m(m+1)\cdot A_2(n)\}^2\cdot(\partial^2\rho/\partial\xi^2) \qquad (15)$$

また、式（１２）を満たす $\Xi(n)$ は Gauss 分布に従うことが知られている[9)]。さらに式（１０），（１１）および（１２）より

$$E[\Xi(n)]=1-S^m(m+1)\int_0^n A_1(\tau)d\tau \qquad (16)$$

$$E[\{\Xi(n)-E[\Xi(n)]\}^2] =\{S^m(m+1)\}^2\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau \qquad (17)$$

が導けることに注意すると、結局式（１５）の解は

$$\rho(\xi,n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\{S^m(m+1)\}^2\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau}} \times\exp\left[\frac{-\{\xi-1+S^m(m+1)\int_0^n A_1(\tau)d\tau\}^2}{2\{S^m(m+1)\}^2\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau}\right] \qquad (18)$$

となる。これが求める $\Xi(n)$ の近似的な確率密度関数である。したがって $\Psi(n)$ の近似的な確率密度関数 $\tilde{\rho}(\psi,n)$ は、式（１３），（１８）から次式のように求まる。

$$\tilde{\rho}(\psi,n)=\frac{\psi^m}{\sqrt{2\pi\{S^m(m+1)\}^2\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau}} \times\exp\left[\frac{-\{\psi^{m+1}-1+S^m(m+1)\int_0^n A_1(\tau)d\tau\}^2}{2\{S^m(m+1)\}^2\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau}\right] \qquad (19)$$

式（１９）を基にして、健全度 $\Psi(n)$ が１から初めて ψ_c に達するまでの疲労寿命分布 $H(n\mid\psi_c,1)$ を求めることができる。いま 0 の近傍にない n に対して

$$\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau/\{\int_0^n A_1(\tau)d\tau\}^2\ll1 \qquad (20)$$

が成立すると仮定する。このとき、$H(n\mid\psi_c,1)$ は

$$H(n\mid\psi_c,1)\cong\bar{\Phi}\left[\frac{1-\psi_c^{m+1}-S^m(m+1)\int_0^n A_1(\tau)d\tau}{S^m(m+1)\sqrt{\int_0^n\{A_2(\tau)\}^2d\tau}}\right] \qquad (21)$$

で与えられる。ここで $\bar{\Phi}$ は標準正規分布の余関数であって

$$\bar{\Phi}(u)=1/\sqrt{2\pi}\int_u^\infty\exp(-u^2/2)du \qquad (22)$$

で与えられる。

3　材料面からの考察

ここで、２つの関数 $A_1(n),A_2(n)$ に対して材料面からの考察を加えることで、これらの関数の形を具体的に定めることにする。 $A(n)$ をサイクル n について長期的に見た場合、その平均である $A_1(n)$ は一定であると考えるのが自然である。したがって

$$A_1(n)=A_1 \quad (\text{正の定数}) \qquad (23)$$

と置くことにする。一方、$A_2(n)$ については、これが具体的にどういう関数になっているかを決定するには、別の何らかの情報が必要となってくる。そこで、まず $A_2(n)$ として最も簡単な関数

$$A_2(n)=A_2 \quad (\text{正の定数}) \qquad (24)$$

という定数関数の場合を考え、これによる結果がどの程度実際の実験結果を再現するかを検討する。

式（２３），（２４）を式（１２）に代入することにより、最終的に疲労損傷累積過程$\Psi(n)$について以下の結果を得る。

$$\Psi(n)=\begin{cases}\{\Xi(n)\}^{1/(m+1)} & (0\leq n<N)\\ 0 & (N\leq n)\end{cases} \qquad (25)$$

$$\Xi(n)=1-K_1n-K_2\int_0^n dw(\tau) \qquad (26)$$

ここに、

$$\begin{cases}K_1\equiv S^m(m+1)A_1\\ K_2\equiv S^m(m+1)A_2\end{cases} \qquad (27)$$

である。式（２６）からわかるように、K_1 は $\Psi(n)$ の確定論的な挙動を、K_2 は確率論的な挙動を支配する量といえる。

さらに、式（２１）に式（２３），（２４）を代入すると、疲労寿命分布は結局

$$H(n\,|\,\psi_c,1) \cong \Phi\left[\frac{1-\psi_c^{m+1}-K_1 n}{K_2\sqrt{n}}\right] \qquad (28)$$

で与えられる。

4　計算機実験および考察

以上得られた結果について、その妥当性を検討する。比較のために用いられるのは、下川，浜口らが行った炭素繊維８枚朱子織物積層材に対する平面曲げ疲労試験[3]である。見本過程や疲労寿命分布を求めるうえで必要なパラメータは、 S=380 (MPa) に対しては

$$\begin{cases} K_1 = 1.5605 \times 10^{-5} \\ K_2 = 1.8328 \times 10^{-3} \\ m = 13.772 \end{cases} \qquad (29)$$

という値が得られた。

Fig.1 は、上の値を式（２５），（２６）に代入して計算機実験を行った結果得られた $\Psi(n)$ の見本過程を、横軸に寿命比 n/N をとってプロットし、さらに実際のデータを重ねてプロットしたものである。Fig.1 の見本過程を見れば、寿命比が 0.4～0.6 のところでは実際のデータにだいたい合っているが、全体としてはばらつきが大きく、特に寿命比が 0.7～1.0 のところではその傾向が顕著である。これは、見本過程の確率論的挙動を支配する K_2 の値が大きいために生ずると思われる。そこで、K_2 の値を式（２９）の値より小さくとれば、見本過程のばらつきが小さくなり、実際のデータに近づくことが予想されるが、その反面疲労寿命分布のばらつきは実際より小さくなってしまう。このように見本過程と疲労寿命分布を同時に正確なものにすることができないという矛盾は、L.M.Kachanov の基礎方程式の A と m のうち、A のみを不規則に変化させ m を一定としたことに起因する。しかし A と m を独立に不規則に変化させた場合、見本過程こそ得られるが疲労寿命分布の導出が困難となってしまうことから、ここで得られた Fig.1 の見本過程は、実際の現象のおおよその傾向を知るための１つの目安という程度に受けとめるべきである。

次に健全度 ψ_c が 0.95,0.9,0 の３つの場合について、疲労寿命分布を式（２８）から求め、その結果を対数確率紙にプロットし、さらに、特に $\psi_c=0$ に対しては実際の実験結果があるので、これを重ねてプロットしたのが Fig.2 である。 Fig.2 からもわかるように、ここで得られた疲労寿命分布は見事に実際の実験結果に一致している。　【結言】、【参考文献】省略

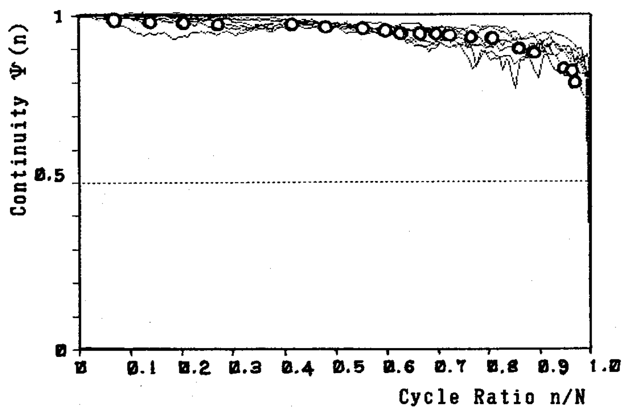

Fig.1

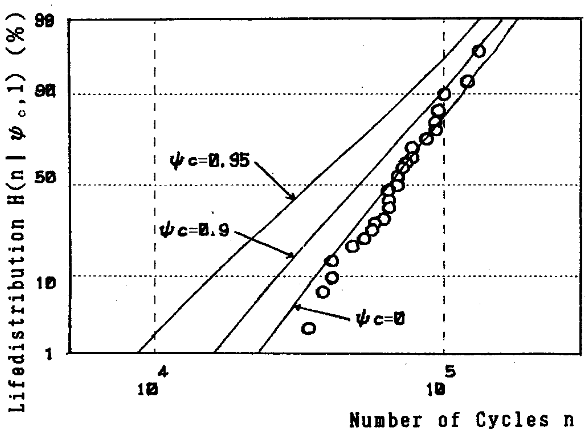

Fig.2