302 繊維配向を考慮した一般化積層理論に関する一考察

京工繊大　繊維　前川　善一郎
〃　〃　○横山　敦士
〃　大学院　溝内　博行
立石ソフトウェア　山田　信司

1．緒言

ＦＲＰは成形時の流動などにより、複雑な繊維配向分布を生じることや、ＦＲＰ製品の変形、強度などが繊維含有量、繊維配向分布に大きく依存することはよく知られている。複雑な繊維配向分布を有するＦＲＰの変形などの定式化は、困難な問題であるが、本報告では、それらのアプローチの第一歩として繊維配向分布の新しい表示法を提案し[1]、積層理論への組み込みを試みたので、ここに報告する。

2．繊維配向密度分布

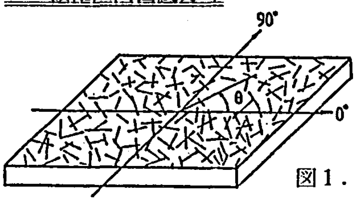
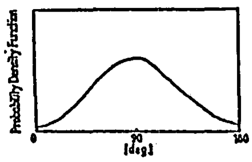
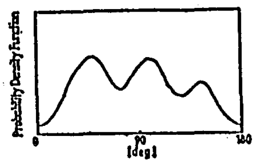


図１．繊維配向角の説明図

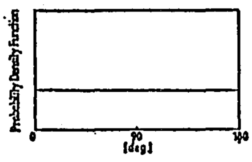
繊維配向の密度分布は一般に複雑であるが、ここでは、２次元配向の場合について考える。図１に示すように平面内に繊維配向角θをとるとθの定義域は(0°,180°)となる。繊維配向密度分布は図２に示すようにピークが１つ（ａ）、複数個（ｂ）ピークのないもの（ｃ）など種々の場合が考えられるが最初にピークが１つの場合、次に複数個の場合について述べるものとする。ここで（ｃ）は（ａ）の特別の場合として取り扱う。



(a)



(b)



(c)

図２．典型的な繊維配向密度分布

（１）ピークが１つの場合

繊維配向密度分布の特徴は確率変数が上限、下限を有することであり、正規分布、ワイブル分布などの適用できない理由になっている。いま、図３に示すようなピークを１つ有する繊維配向分布を考える。密度分布関数として不完全ベータ分布関数を用いるものとし、次式で示す繊維配向密度関数を提案する。

$$g(\theta)=\frac{\{\sin(\theta/2)\}^{2P-1}\cdot\{\cos(\theta/2)\}^{2Q-1}}{\int_{\theta_a}^{\theta_b}\{\sin(\theta/2)\}^{2P-1}\cdot\{\cos(\theta/2)\}^{2Q-1}d\theta} \tag{1}$$

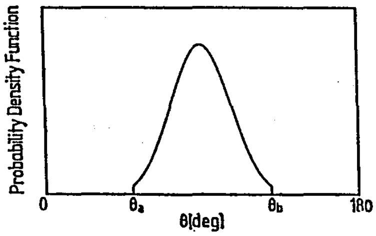


図３．ピークが１つの繊維配向密度分布

ここで、 $P\geqq 1/2, Q\geqq 1/2$、$0°<\theta a\leqq\theta\leqq\theta b\leqq 180°$とする。

いま、$X=\sin^2(\theta/2)$とおきθをXに変換する。今回のθの範囲で、この変換は単調で一価の逆関数を持ち、$d\theta/dX>0$が存在するため、$f(X)=g(\theta)|d\theta/dX|$の関係から、次式が成り立つ。

$$f(X)=\frac{X^{P-1}\cdot(1-X)^{Q-1}}{\int_a^b X^{P-1}\cdot(1-X)^{Q-1}dX}=\frac{X^{P-1}\cdot(1-X)^{Q-1}}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \tag{2}$$

ここで、$a=\sin^2(\theta_a/2)$、$b=\sin^2(\theta_b/2)$である。ゆえに、Xの範囲は、$0<a\leqq X\leqq b\leqq 1$である。さらに、$Bb(P,Q)$と$Ba(P,Q)$は不完全ベータ関数であり次式で表される。

$$Bb(P,Q)=\int_0^b X^{P-1}\cdot(1-X)^{Q-1}dX\quad,\quad Ba(P,Q)=\int_0^a X^{P-1}\cdot(1-X)^{Q-1}dX \tag{3}$$

Xに関する分布関数F(X)は次式で表される。

$$F(X)=\int_a^X f(X)dx=\frac{BX(P,Q)-Ba(P,Q)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \tag{4}$$

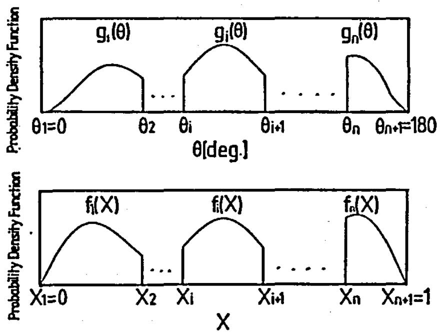
また、f(X)の期待値μと分散σ^2は次式で与えられる。

$$\mu=\frac{Bb(P+1,Q)-Ba(P+1,Q)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)}\quad,$$
$$\sigma^2=\frac{Bb(P+2,Q)-Ba(P+2,Q)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)}-\left\{\frac{Bb(P+1,Q)-Ba(P+1,Q)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)}\right\}^2 \tag{5}$$

ここで、a=0、b=1の場合（５）式は、簡単化され次式となる。

$$\mu=\frac{P}{P+Q}\quad,\quad\sigma^2=\frac{P\cdot Q}{(P+Q)^2(P+Q+1)} \tag{6}$$

（２）ピークが複数個の場合



（ａ）

（ｂ）

図４．ピークがｎ個の繊維配向分布

繊維配向分布は、一般に図2の（a）に示すものより（b）のようなピークが複数個ある分布を示し、その取扱いは、困難である。本研究では、このような分布に対し、複合分布を適用することにする。いま、図4の（a）に示すような、ピークをn個もつ繊維配向分布を考える。θに関するi番目の繊維配向密度関数を次式に示す。

$$g_i(\theta)=\frac{\{\sin(\theta/2)\}^{2P_i-1}\cdot\{\cos(\theta/2)\}^{2Q_i-1}}{\sum_{j=1}^{n}R_j} \quad (7)$$

ここで、R_jは次式で表される。

$$R_j=\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}}\{\sin(\theta/2)\}^{2P_j-1}\cdot\{\cos(\theta/2)\}^{2Q_j-1}d\theta \quad (8)$$

$\theta_i \leqq \theta < \theta_{i+1}$, $\theta_1=0°$, $\theta_{n+1}=180°$とする。ピークが1つの場合と同様に、θをXに変換すると、Xに関する分布関数が不完全ベータ関数で表すことができる。

3．繊維配向分布を考慮した積層理論

（1）ピークが1つの場合

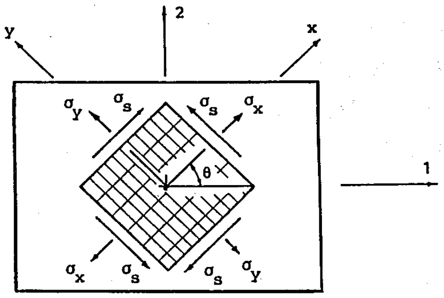


図5．繊維軸系と斜交軸系との関係図

図5に示すような荷重方向（1-2軸）とθだけ斜交した方向に繊維軸方向（x-y軸）がある平面応力場について考える。斜交軸系と繊維軸系の応力－ひずみ関係式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\{\sigma'\} = [Q'] \{\varepsilon'\} \quad (9)$$

ここで、$\{\sigma'\}=[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_6]$，$\{\varepsilon'\}^T=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_6]$

$$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\} \quad (10)$$

ここで、$\{\sigma\}=[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_s]$，$\{\varepsilon\}^T=[\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_s]$

繊維軸系の剛性マトリックス［Q］は次式によって表される。

$$\begin{vmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} & \dfrac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} & 0 \\ \dfrac{\nu_y E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} & \dfrac{E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & E_s \end{vmatrix} \quad (11)$$

次に、斜交軸系の剛性マトリックスの各要素の列マトリックス｛Q'｝と繊維軸系の｛Q｝との関係は次式で与えられる。

$$\{Q'\} = [B] \{Q\} \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4+n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2-n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3-m^3n & 2(mn^3-m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n-mn^3 & 2(m^3n-mn^3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{vmatrix}$$

いま、積層板が（1）式の繊維配向分布関数$g(\theta)$によって表される繊維配向分布を有する場合（12）式の剛性マトリックスは次式によって表される。

$$\{Q'\} = [A] \{Q\} \quad (13)$$

$$A_{kl}=\int_0^{180} g(\theta)B_{kl}d\theta \quad ,(k=1,\cdots,6,l=1,\cdots,4) \quad (14)$$

（1）式を（14）式に代入して計算すると次式となる。

$$\{A_{kl}\} = [D] \{F\}$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{24} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{34} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \\ A_{44} \\ A_{61} \\ A_{62} \\ A_{63} \\ A_{64} \\ A_{61} \\ A_{62} \\ A_{63} \\ A_{64} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{Bb(P+1/2,Q+3/2)-Ba(P+1/2,Q+3/2)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \\ \dfrac{Bb(P+3/2,Q+1/2)-Ba(P+3/2,Q+1/2)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \\ \dfrac{Bb(P+1,Q+1)-Ba(P+1,Q+1)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \\ \dfrac{Bb(P+3/2,Q+5/2)-Ba(P+3/2,Q+5/2)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \\ \dfrac{Bb(P+5/2,Q+3/2)-Ba(P+5/2,Q+3/2)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \\ \dfrac{Bb(P+2,Q+2)-Ba(P+2,Q+2)}{Bb(P,Q)-Ba(P,Q)} \end{vmatrix} \quad (15)$$

ここで、BaとBbは（3）式で示す不完全ベータ関数である。

（2）ピークが複数個の場合

（7）式の繊維配向分布関数によって表されるピークを複数個有する場合の剛性マトリックスもまた（13）式と同様に次式によって表される。

$$\{Q'\} = [A]\ \{Q\} \tag{16}$$

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} g_i(\theta) B_{kl}\, d\theta \tag{17}$$

（7）式を代入して（17）式を計算すると次式となる。

$$\{A_{kl}\} = [D]\ \{F\} \tag{18}$$

ここで、$\{A_{kl}\}$ と $[D]$ は（15）式と同じであるが、$\{F\}$ は次式となる。

$$\{F\} = \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+1/2,Q_i+3/2)-Bx_i(P_i+1/2,Q_i+3/2)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+3/2,Q_i+1/2)-Bx_i(P_i+3/2,Q_i+1/2)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+1,Q_i+1)-Bx_i(P_i+1,Q_i+1)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+3/2,Q_i+5/2)-Bx_i(P_i+3/2,Q_i+5/2)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+5/2,Q_i+3/2)-Bx_i(P_i+5/2,Q_i+3/2)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i+2,Q_i+2)-Bx_i(P_i+2,Q_i+2)\}}{\sum_{i=1}^{n}\{Bx_{i+1}(P_i,Q_i)-Bx_i(P_i,Q_i)\}} \end{vmatrix} \tag{19}$$

4．結果

図6、7に（1）式で表される繊維配向分布の1例を示す。縦軸に密度関数$f(\theta)$、横軸に配向角θをとり、下限値$\theta_a=0°$、上限値$\theta_b=180°$の場合を示す。

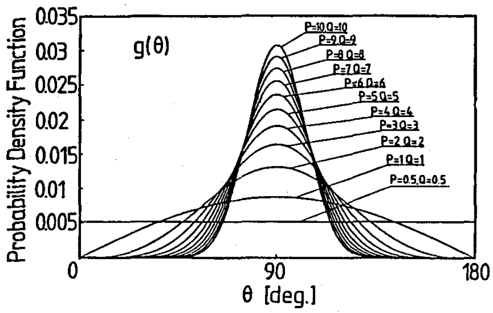


図6．（1）式による繊維配向密度分布の一例（P＝Q）

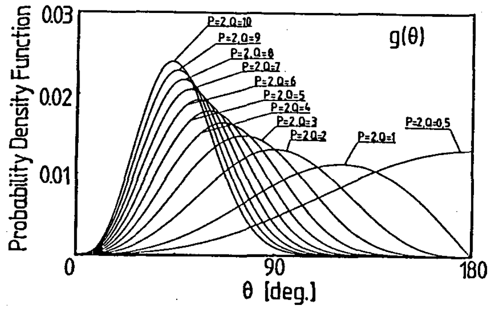


図7．（1）式による繊維配向密度分布の一例（P＝2）

図6では、P=QとしPとQを、0.5と1から10まで1づつ増加させたものである。θ=90°で、最大値をとり、θ=90°に対し対称の分布をなし、PとQを増加するにつれ分散値が小さくなる。図7はP=2で一定としQの値を0.5と1から10まで1づつ増加させたものである。Qの値が増加するにつれ密度関数が最大値をとるθの値は、0°の方にシフトする。

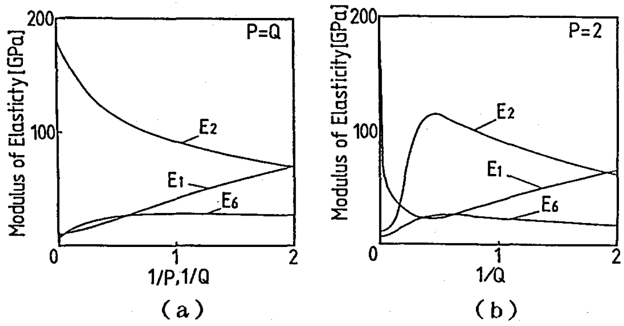


図8．弾性率E1、E2とせん断弾性率E6と母数P，Qとの関係

いま、例題として（11）式における材料定数としてｸﾞﾗﾌｧｲﾄ/ｴﾎﾟｷｼの一方向強化複合材料のもつ値を用いるものとする。すなわちE_x=181[GPa]、E_y=10.3[GPa]、E_s=7.17[GPa]、ν_x=0.28である。これらの材料定数をもつ複合材料が図6、7に示すような繊維配向分布を有する場合について考える。これらの材料定数と母数P、Qの値を（11）、（15）式に代入して（9）式の応力－ひずみ関係式が構築される。この式より1方向と2方向の弾性率E1、E2とせん断弾性率E6とを計算することができる。その結果を図8（a）、（b）に示す。図8（a）に、P=QとしPとQを変化させたときのE1、E2、E6を示す。縦軸は弾性率、横軸は母数の逆数である。1/P=1/Q=2のとき、すなわちP=Q=1/2のときランダム配向分布となってE1=E2となり、1/Pと1/Qが0に近づくとき、すなわちPとQが∞に近づくとき一方向強化複合材料の材料定数の値に近づく。図8（b）に母数Pを2で一定とし、Qを変化させたときのE1、E2、E6を示す。縦軸は弾性率、横軸は母数Qの逆数である。Qが増加するにしたがい繊維配向分布関数のピークが180°から0°の方に移行し鋭くなる。そのためE1、E2、E6とも複雑な動きを示しQが∞に近づくとき一方向強化複合材料の材料定数に近づくことがわかる。

5．結言

本報告では繊維配向分布関数を組み込んだ積層理論の提案を、行った。本理論から繊維が複雑な配向分布をしている場合でも変形状態の推測が可能となった。

参考文献1）第17回FRPシンポジュウム前刷（1988）pp,134