229　組合せ引張・ねじりをうける軸対称体の弾塑性解析の有限要素法

京都大学工学部　○正　井上達雄
京都大学大学院　　　横田浩嗣

1　緒　言

普通の軸対称体の解析は加えられる荷重もしくは物体の変位が円周方向の成分を持たない場合のものである。ところが、環状切欠きを有する丸棒のねじりの問題は、軸対称体に対して円周方向の力が加わり物体は円周方向の変位を生じる。さらに、ねじりモーメントと軸方向の力の両方が作用する場合には、変位は３方向すべてに生じることになり今までの軸対称問題では取り扱えず、３次元問題となる。ただしねじりモーメント、つまり円周方向の力が回転軸に対して均等である場合には、変位も円周方向に対して一様になり、一種の軸対称問題として、一般の３次元解析よりはるかに容易に取り扱うことができる。本研究ではこの理論の概要を示し、それを用いて種々の切欠きの弾塑性解析を行った。

2　解析手法

2-1 変位関数　図１に示すような三角形のリング要素を用い、節点に反時計まわりにi,j,m の番号をつける。各節点についてｒ,ｚ,θ方向の変位成分を考え、それを用いて要素の全節点変位ベクトル $\{u\}^e$ は次のように表せる。

$$\{u\}^e=\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\\u_m\end{Bmatrix},\ \text{ただし}\ \{u_i\}=\begin{Bmatrix}u_{ri}\\u_{zi}\\u_{\theta i}\end{Bmatrix}\quad(1)$$

要素内の変位は次のようなθに独立なｒとｚに関する一次多項式で規定する。

$$\begin{aligned}u_r&=\alpha_1+\alpha_2 r+\alpha_3 z\\u_z&=\alpha_4+\alpha_5 r+\alpha_6 z\\u_\theta&=\alpha_7+\alpha_8 r+\alpha_9 z\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここでα_1～α_9は３つの節点のそれぞれの座標と３つの節点変位から決定できる。

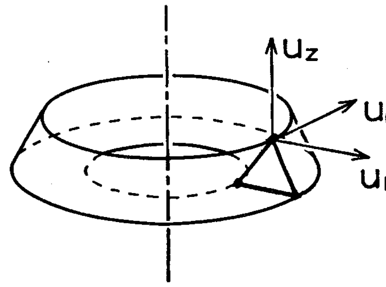

図１　３角形リング要素と節点変位の模式図

2-2 ひずみ－変位関係　円形断面の引張－ねじり組合せ負荷の場合、変位が円周方向に対して一様であるから、ひずみ－変位関係式においてθによる偏微分の項は零になる。したがって、円柱座標におけるひずみ－変位の関係式は次のようになる。

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\\varepsilon_z\\\varepsilon_\theta\\\gamma_{rz}\\\gamma_{z\theta}\\\gamma_{\theta r}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u_r/\partial r\\\partial u_z/\partial z\\u_r/r\\\partial u_r/\partial z+\partial u_z/\partial r\\\partial u_\theta/\partial z\\\partial u_\theta/\partial r-u_\theta/r\end{Bmatrix}\quad\cdots(3)$$

この関係式に式（2）で定義した変位関数を用いてマトリクス表示すると、

$$\{\varepsilon\}=[B]\ \{u\}^e\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

と表せる。ただし、マトリクス［Ｂ］は、式(5)のように与えられる。式中のΔは、３角形ijmの面積を表し、a_i,b_i,c_i等は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}a_i&=r_j z_m-r_m z_j\\b_i&=z_j-z_m\\c_i&=r_m-r_j\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$[B]=\frac{1}{2\Delta}\times\begin{Bmatrix}b_i&0&0&b_j&0&0&b_m&0&0\\0&c_i&0&0&c_j&0&0&c_m&0\\\frac{a_i}{r}+b_i+\frac{c_iz}{r}&0&0&\frac{a_j}{r}+b_j+\frac{c_jz}{r}&0&0&\frac{a_m}{r}+b_m+\frac{c_mz}{r}&0&0\\c_i&b_i&0&c_j&b_j&0&c_m&b_m&0\\0&0&c_i&0&0&c_j&0&0&c_m\\0&0&-\frac{a_i}{r}-\frac{c_iz}{r}&0&0&-\frac{a_j}{r}-\frac{c_jz}{r}&0&0&-\frac{a_m}{r}-\frac{c_mz}{r}\end{Bmatrix}\quad\cdots(5)$$

2-3 応力－ひずみ関係　本研究では、Misesの降伏条件および等方硬化則に基づき解析を行った。この場合、相当応力－相当塑性ひずみ関係は、

$$\bar{\sigma} = c(a+\bar{\varepsilon}^{p})^{n} \quad \cdots\cdots(7)$$

とした。

2-4 剛性マトリクス　要素の剛性マトリクスは、一般の軸対称問題と同様に体積積分をリングの全周にわたって行なわなければならないので、次のようになる。

$$[k]^{e} = 2\pi\iint r\,[B]^{T}[D][B]\,drdz \quad \cdots\cdots(8)$$

3　解　析　結　果

3-1 丸棒のねじりの弾塑性問題　本解析モデルの妥当性を検証するために、中実丸棒のねじりについて厳密解と本解析モデルによる解の比較を行った。

材料の塑性に関する構成式は 式(7)で与えられるのでせん断応力とせん断ひずみの関係は次のようになる。

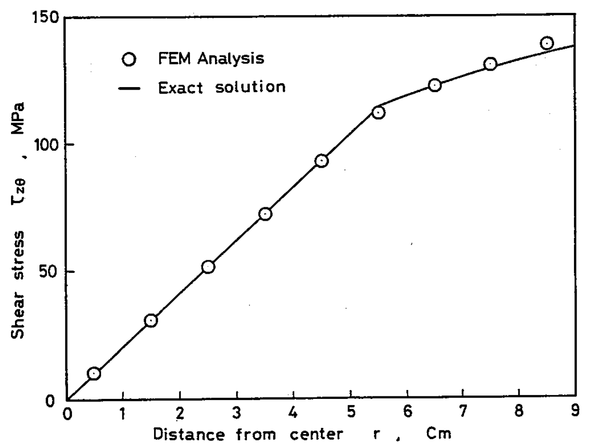

図２　丸棒のねじりにおける厳密解と有限要素法による解の比較

$$\gamma = \tau / G \qquad (\tau \leqq \tau_{y})$$
$$\gamma = \tau / G + 3\{(3\tau / c)^{1/n} - a\} \qquad (\tau \geqq \tau_{y}) \quad \cdots\cdots(9)$$

τ_{y}は初期降伏せん断応力である。式(7)と、比ねじれ角θとせん断ひずみの関係

$$\gamma = r\theta \quad \cdots\cdots(10)$$

より、半径方向の応力分布を求めることができる。

図２は直径9mmの丸棒に、$\theta=4.72\times10^{-4}$(rad)を与えた場合の厳密解と有限要素法による解の比較結果である。解析には、縦弾性係数E＝120GPa、ポアソン比ν＝0.37、c＝1190MPa、a＝5.6×10^{-3}、n＝0.239 の値を用いた。塑性域では、有限要素法による解の方が若干高くなっているが、よく一致しているといえる。

3-2 切欠き材に関する解析結果　本解析モデルにより環状切欠きを有する丸棒について解析を行った。解析を行った２種の切欠き形状について、その断面形状と要素分割を図３に示す。どちらも平滑部直径9mm、切欠きの深さは2mmで、一方はＲ２、もう一方はＲ５の切欠きを有する。対称性により断面の４分の１を考えればよい。切欠き底を含む下部を３方向すべてに拘束し、切欠きから離れた上部にｒ方向およびθ方向の強制変位を与えた。用いた定数は3-1節と同じである。

図４は応力分布の等高線図である。(a)のねじりについては$\tau_{z\theta}$、(b)の引張はσ_{z}、(c)の組合せは相当応力$\bar{\sigma}$の分布を表している。図中のu、ϕは与えたｚ方向の強制変位およびねじれ角を表す。いずれの場合も切欠き底に応力が集中していることが分かる。また、切欠き形状の違いにより応力集中率は異なるが、応力分布の形状に大きな違いはないと言える。

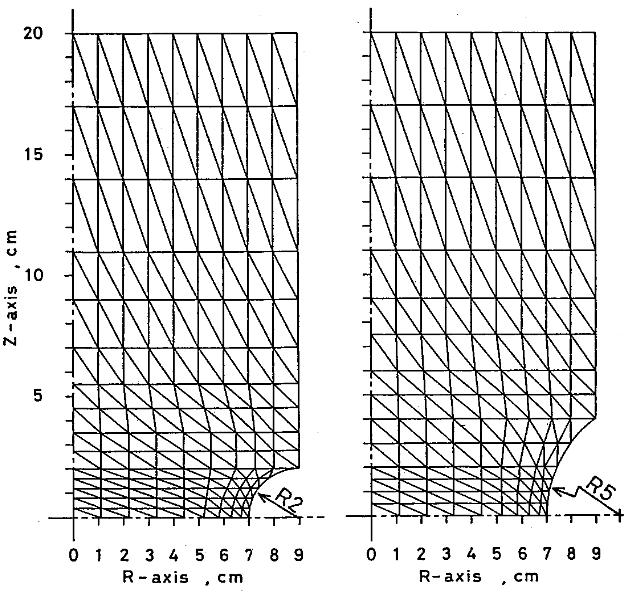

図３　要素分割

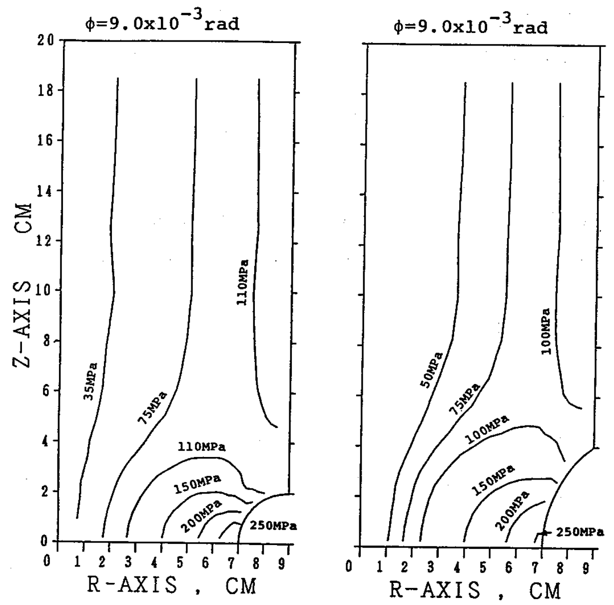

図４(a)　$\tau_{z\theta}$ の等高線図　(ねじり)

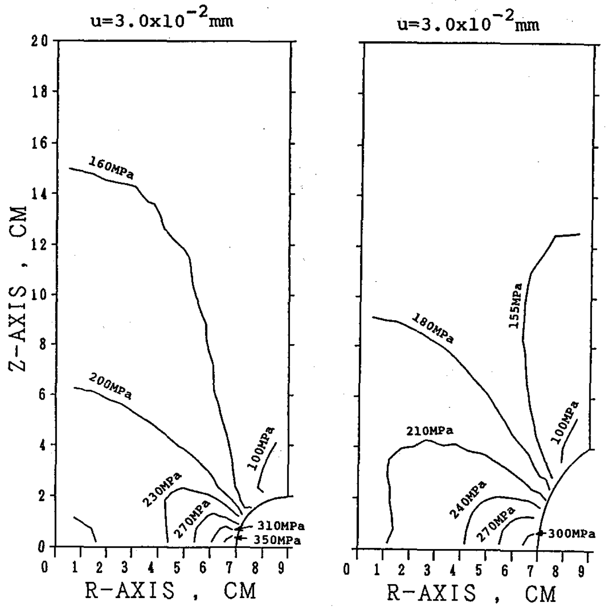

図4(b) σ_z の等高線図 (引張)

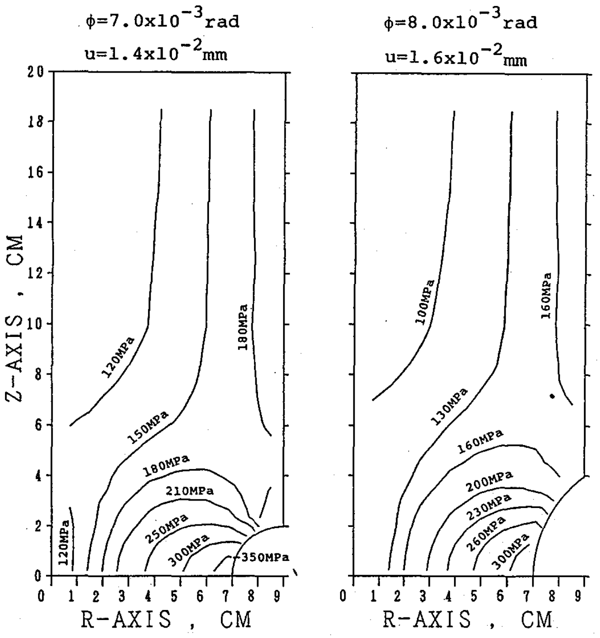

図4(c) $\bar{\sigma}$ の等高線図 (組合せ)

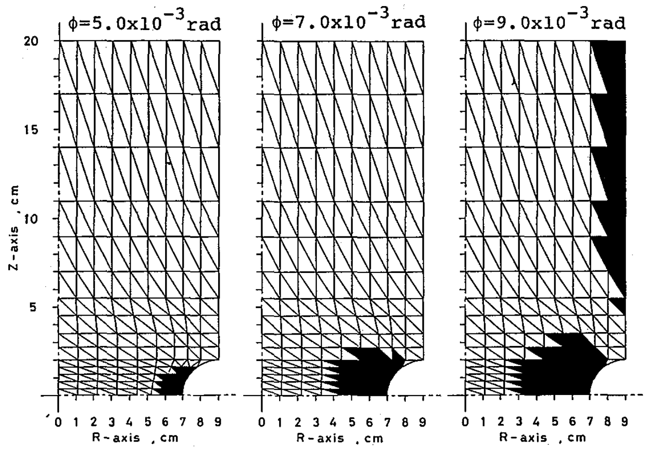

図5(a) 塑性域の進展の模式図 (ねじり)

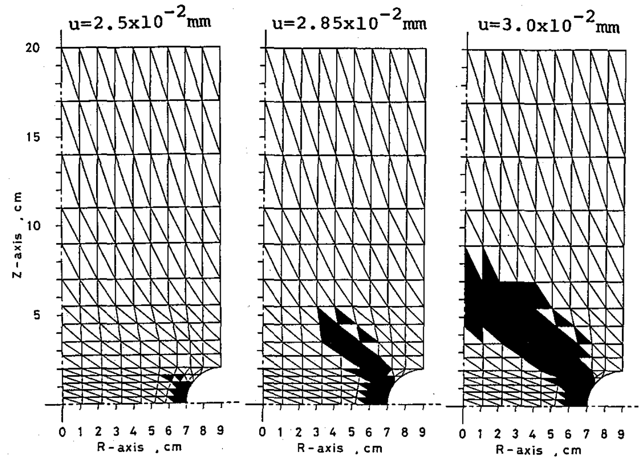

図5(b) 塑性域の進展の模式図 (引張)

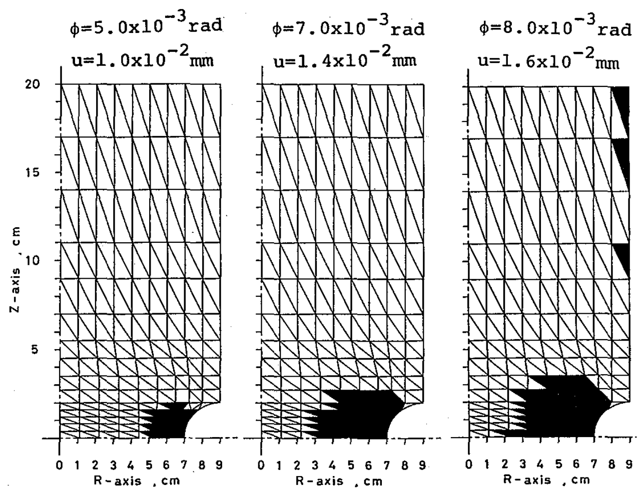

図5(c) 塑性域の進展の模式図 (組合せ)

図5は与える強制変位を大きくしていった場合の塑性域の変化を表した図である。応力集中により切欠き底から塑性し始めるが、負荷様式により塑性域の変化の様子が異なることがわかる。

4 結 言

円形断面の丸棒が円周方向に一様なねじり変形と軸方向の引張をうける軸対称問題について、三角形リング要素を用いた有限要素解析モデルを考案した。そのモデルにより引張ねじり組合せ負荷をうける環状切欠き材の弾塑性解析を行った。