

新潟大学 工学部 正 ○田辺裕治 原 利昭
 新潟大学 大学院 小林公一 田中茂雄
 新潟工業短期大学 坂本 信

1. 緒 言

骨のバイオメカニクスに関する分野では小寸法の試料の粘弾性特性を簡単かつ迅速に評価することがしばしば要求される。そこで本研究では、粘弾性材料のスプリット・ホプキンソン棒法（以下、ホプキンソン棒法と呼ぶ。）衝撃圧縮試験の際に測定される動的応答から粘弾性定数を決定する一方法について提案する。

本研究では先ず、試料を三要素標準線形固体（以下、三要素モデルと記す。）と仮定してホプキンソン棒内の粘弾性波伝ばを解析する。解析にはラプラス変換法とFFTを利用した数値ラプラス逆変換法¹⁾を組み合わせた解析手法を用いる。多孔質弹性体理論に基づく骨の力学モデルは三要素モデルに帰着されるという報告²⁾もあり、試料として同モデルを想定することは骨組織を対象として考える場合には妥当であろう。

次に、以上の波の伝ばの解析と非線形最小二乗法を用いて実測透過応力波形から粘弾性定数を推定する方法を示し、その推定値の妥当性を数値シミュレーションおよびPMMA試料に対する実験により検討する。

そして次に、提案した推定手法を用いてウシ大腿骨ち密骨の粘弾性特性を定量的に評価するとともに、その異方性を調べた結果について述べる。

2. 解 析

Fig.1に示すように、2本の同径、同質の弾性棒（入、出力棒）により試料として粘弾性棒が挟まれている場合を考える。各棒に平行にx軸をとり、 $x=0$ と $x=\ell$ の両面で試料は入、出力棒に接している。各棒は十分に細いものとし、一次元波動伝ばを仮定する。入、出力棒の密度、ヤング率、断面積をそれぞれ ρ_0, E_0, S_0 とし、試料の密度、断面積を ρ, S とする。

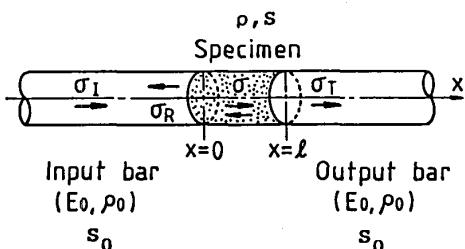
2.1 弹性棒の波動 Fig.1において、 σ_I, σ_R ,

Fig.1. Wave propagation in the split-Hopkinson pressure-bar with a viscoelastic specimen.

σ_T をそれぞれ入射応力波、反射応力波、透過応力波とすれば、入力棒においては

$$v = v_I + v_R = \frac{c_0}{E_0} (\sigma_R - \sigma_T) ; x \leq 0 \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_R ; x \leq 0 \quad (2)$$

なる関係が成立する。ここで σ は応力、 v は粒子速度、 $c_0 = \sqrt{E_0 / \rho_0}$ は弾性波の伝ば速度である。また、出力棒においては

$$v = v_T = \frac{c_0}{E_0} (-\sigma_T) ; x \geq \ell \quad (3)$$

$$\sigma = \sigma_T ; x \geq \ell \quad (4)$$

なる関係が成立する。式(1)～(4)は粘弾性棒に対する境界条件として用いる。

2.2 粘弾性棒の波動 粘弾性棒をFig.2に示す三要素モデルと考えると、波動方程式、構成方程式、境界条件は次のようにになる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (6)$$

$$v = \frac{c_0}{E_0} (\sigma_R - \sigma_I) ; x=0 \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{S_0}{S} (\sigma_R + \sigma_I) ; x=0 \quad (8)$$

$$v = -\frac{c_0}{E_0} \sigma_T ; x=\ell \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{S_0}{S} \sigma_T ; x=\ell \quad (10)$$

ただし ε, t はひずみおよび時間である。式(5)～(10)を時間 t についてラプラス変換、 $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ 、すれば、基礎式として式(11)～(16)が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}}{dx^2} - \phi(p) \bar{\sigma} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d \bar{\sigma}}{dx} = \rho p \bar{v} \quad (12)$$

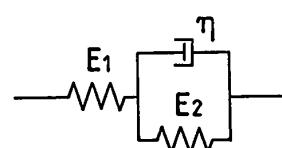


Fig.2. Three-element standard linear solid.

$$\bar{v} = \alpha (\bar{\sigma}_R - \bar{\sigma}_I) \quad ; x=0 \quad (13)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\beta} (\bar{\sigma}_R + \bar{\sigma}_I) \quad ; x=0 \quad (14)$$

$$\bar{v} = -\alpha \bar{\sigma}_T \quad ; x=\ell \quad (15)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\beta} \bar{\sigma}_T \quad ; x=\ell \quad (16)$$

ここで

$$\alpha = \frac{c_0}{E_0}, \quad \beta = \frac{S}{S_0}, \quad \phi(p) = \frac{\rho p^2 (\eta p + E_1 + E_2)}{\eta E_1 p + E_1 E_2} \quad (17)$$

とおいた。式(11)の解として

$$\bar{\sigma} = C_1 \exp \{-\sqrt{\phi(p)}x\} + C_2 \exp \{\sqrt{\phi(p)}x\} \quad (18)$$

が得られ、 C_1, C_2 は式(13)～(16)から次のようになる。

$$C_1 = \bar{\sigma}_I \frac{2\alpha}{\{\delta + \psi(p)\}} \cdot \frac{1}{G(p)} \quad (19)$$

$$C_2 = -\bar{\sigma}_I \frac{2\alpha \{\delta - \psi(p)\} \exp \{-2\sqrt{\phi(p)}\ell\}}{\{\delta + \psi(p)\}^2} \cdot \frac{1}{G(p)} \quad (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha \beta, \quad \psi(p) = \phi(p)/(\rho p) \\ G(p) &= 1 - \left\{ \frac{\delta - \psi(p)}{\delta + \psi(p)} \right\}^2 \exp \{2\sqrt{\phi(p)}\ell\} \end{aligned} \quad \} \quad (21)$$

である。したがって、入射応力波のラプラス変換 $\bar{\sigma}_I$ が求まれば、式(18)～(21)から応力のラプラス変換形 $\bar{\sigma}$ が得られる。その逆変換は次節の方法で行った。また、本研究では実測入射応力波形を台形状パルスで近似して以下の計算を行った。

2・3 FFTによる数値ラプラス逆変換法¹³⁾ 逆変換はその定義式を離散フーリエ変換形に書き換えた次式に高速フーリエ変換(FFT)を適用して行った。

$$\begin{aligned} f(h\Delta t) &= \frac{e^{i\gamma h\Delta t}}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}_n e^{i2\pi nh/N} \\ (h=0, 1, \dots, N-1) \quad \} \quad (22) \\ \bar{f}_n &= \bar{f}(\gamma + i n \Delta \omega), \quad \gamma = \text{const.}, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \Delta t &= T/N, \quad \Delta \omega = 2\pi/T \end{aligned}$$

ここで T は求める時間範囲である。本研究では $\gamma = 6/T$, データ数は $N = 2^{13}$ とした。

2・4 粘弾性定数の推定 本研究では式(16)に基づいて、出力棒で観測されるべき理論透過応力波形 σ_T を求め、これと非線形最小二乗法を用いて実測透過応力波形から粘弾性定数値を推定する。すなわち、 σ_T を時間 $t_k = k\Delta t$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) と粘弾性定数 (E_1, E_2, η) の関数 $\sigma_T = g(t_k, E_1, E_2, \eta)$ とし、 t_k での実測値 $E_x(t_k)$ との差の二乗和

$$S_x = \sum_{k=0}^{N-1} \{g(t_k, E_1, E_2, \eta) - E_x(t_k)\}^2 \quad (23)$$

が最小となるようにパラメーター (E_1, E_2, η) を決定する。計算にはガウス・ニュートン法を用い、解の安定化お

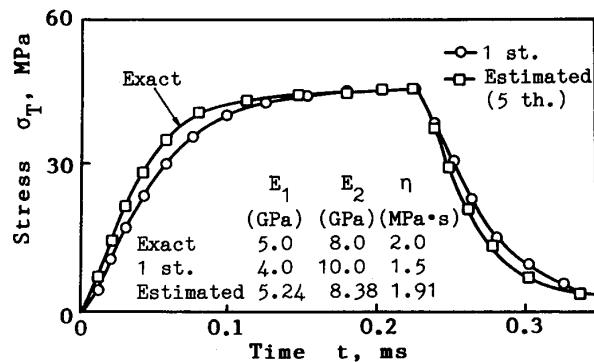


Fig.3. Results of numerical simulation for transmitter stress wave profile.

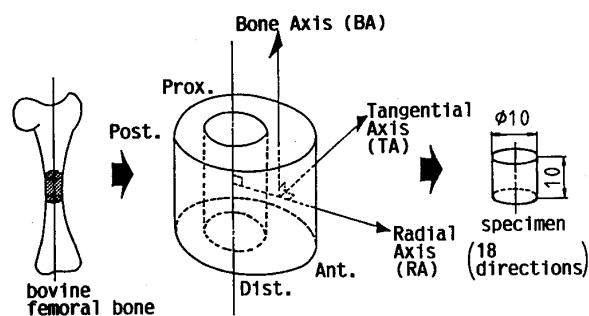


Fig.4. Cartesian coordinate system chosen for cortical bone specimens.

より収束の高速化を図るために縮小因子³⁾を用いた。収束点の判定には次式を用い、これを満足した場合に反復計算を終了した。

$$| \{S_x(\text{前回}) - S_x(\text{現在})\} / S_x(\text{現在}) | < 0.01 \quad (24)$$

本推定手法の誤差について検討するため数値シミュレーションを行った。すなわち、予め決めたパラメーター (E_1, E_2, η) の値に対する透過応力の理論解を式(23)中の $E_x(t_k)$ におき、任意の初期値に対して得た理論解を $g(t_k, E_1, E_2, \eta)$ とおいて本推定手法を適用した。その結果の一例を Fig.3 に示す。初期値が真値に対して 25% 程度ずれている場合でも 5 回の反復計算で真値に対して誤差 5% 以内の推定値が得られることがわかる。

3. 実験

2章の方法の適用例について以下に述べる。

3・1 実験装置および試験片 装置は前報⁴⁾と同様であるのでその詳細は省略する。

試料は PMMA と湿潤状態のウシ大腿骨骨幹中央部前面の密骨である。PMMA は 2 章で述べた粘弾性定数の推定手法の妥当性を検討するために用いた。両試料はいずれも $\phi 10 \times 10 \text{ mm}$ の試験片に加工して実験に供した。なお、ウシ密骨の場合には粘弾性特性の方位依存性を明らかにするために、Fig.4 に示すような直交座標系を設定し、各座標軸 (BA, TA, RA と略記する。) の方向に試

試験片の軸の方向が一致するようにして計3方向から試験片を採取した。本研究で使用した密骨はplexiform boneであり、Haversian boneは見られなかった。

3・2 結果と考察

3・2・1 粘弾性定数の推定結果 PMMAに対する粘弾性定数の初期値および推定値とそれらに基づく透過応力波形の計算結果を実測波形とともにFig.5に示す。ホプキンソン棒法の通常の解析により得られる応力-ひずみ曲線から弾性率を求め、それを粘弾性定数 E_1 の初期値に選んだ。また E_2 の初期値は E_1 と同じオーダーの適当な値に選び、 η のそれは試行計算により決定した。推定値に基づく理論透過応力波形は実測値と全体にわたり良く一致している。粘弾性波の伝ば速度 $\sqrt{E_1/\rho}$ および静的なYoung率 $E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ を推定値から評価するとそれぞれ1940m/s, 2.24GPaとなり実測値2050m/s, 2.99GPaにかなり近い。さらに E_1, E_2, η の各推定値ともに他の文献⁵⁾の値に近くなっている。以上の結果より本研究の推定手法は妥当なものであると言える。

BA方向に方位を有するウシち密骨試験片の粘弾性定数の初期値および推定値とそれらに基づく透過応力波形の計算結果を実測波形とともにFig.6に示す。初期値はPMMAの場合と同様な方法で決定した。同図で推定値に基づく理論透過応力波形と実測波形とは良く一致していることから、ち密骨(plexiform bone)の力学モデルとして三要素モデルを用いても良いことがわかる。

3・2・2 ち密骨の粘弾性特性の方位依存性 plexiform boneの粘弾性定数を各方位ごとに推定した結果をFig.7に示す。 E_1 はBA方向が最も大きく、RA方向で最も小さい。一方、 E_2 と η の方位依存性は E_1 の場合に比較してそれほど明瞭ではない。さらに、 E_1 と E_2 により予測される静的なYoung率は各方位で約4GPaとなり、その方位依存性も顕著でないと推測される。これらの結果は前報⁴⁾の超音波弾性率および静的圧縮弾性率の方位依存性と良く対応している。

4. 結 言

小寸法のち密骨試料の粘弾性特性を簡単かつ迅速に評価する方法の一つとして、ホプキンソン棒法衝撃圧縮試験の際に測定される透過応力波形から、粘弾性波の伝ばの解析と非線形最小二乗法を用いて粘弾性特性を同定する方法を提案し、その有効性を示した。

参考文献

- 1) W.Krings and H.Waller, Int.J.Numer.Methods Eng., 14, 1183(1979).
- 2) 日本機械学会編, “生体力学”(1991) オーム社
- 3) 南 茂夫, “科学計測のための波形データ処理”(1986) C Q 出版社

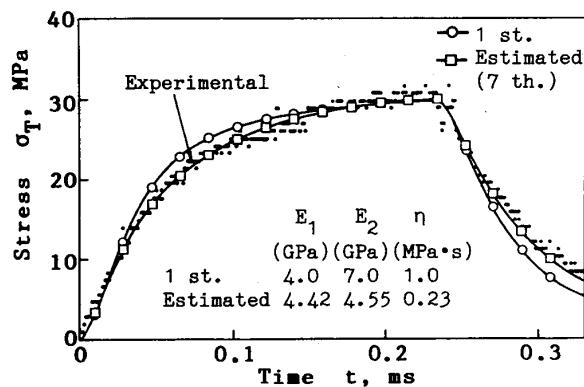


Fig.5. Computed and experimental transmitter stress wave profiles for PMMA specimen.

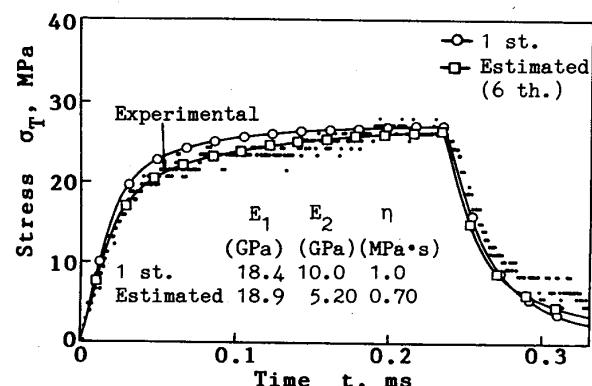


Fig.6. Computed and experimental transmitter stress wave profiles for bovine femoral compact bone specimen (BA-direction).

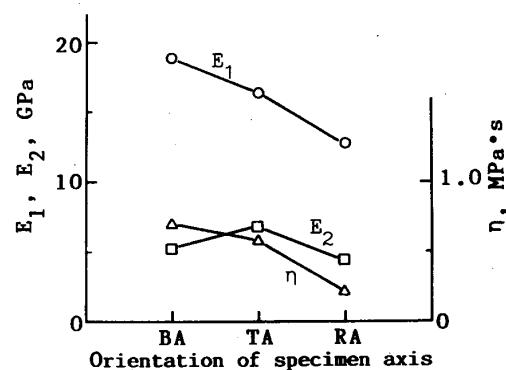


Fig.7. Variation of viscoelastic constants for bovine femoral compact bone specimens with respect to the orientation of specimen axes.

- 4) Y.Tanabe, S.Tanaka, M.Sakamoto, T.Hara, Proc. 34th Jpn.Cong.Mat.Res., in press.

- 5) 佐々木隆治, 川井良次, 岩壺卓三, 中川紀寿, 日本機械学会講演論文集, 784-2, 87(1978).