

連続型疲労き裂進展モデルによる 非破壊検査を考慮した信頼性解析

神戸大学工学部
龍谷大学理工学部

正 ○徳 納 久 睦
正 中 川 隆 夫

1. はじめに

非破壊検査(NDI)を受ける構造物の信頼性評価の試みは、国内では北川らをはじめ筆者ら、藤本らによって行なわれているが[1-3]、疲労き裂進展に連続型の確率モデルを用いた研究はほとんど行なわれていない。本研究では、前報で求めた2つの連続型疲労き裂進展確率モデル[4]をNDI問題に適用することにより、き裂進展の統計的変動特性の違いが構造物の信頼性評価に与える影響について考察する。

2. 理 論

2. 1 破壊モデル

本解析では図1に示すような、北川らが用いた压力容器のモデルと同様のものを用いる[1]。半径 a_0 の初期き裂が相似形を保ちつつ進展し板厚 t に達した時を破壊とする。

2. 2 き裂進展則

き裂半長を a 、応力繰返し数を n とすると、き裂進展速度 da/dn と応力拡大係数の変動幅 ΔK の間には

$$da/dn = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

が成立するものとする。ここで m 、 C は定数である。応力拡大係数は、

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

とおき、便宜上、指数 m を $\lambda = (m/2) - 1$ なる λ で置きかえると式(1)は、

$$da/dn = C(\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2(\lambda+1)} a^{\lambda+1} \quad (3)$$

式(3)を初期き裂長さ a_0 として一定応力の下で解くと式(4)が求まる。

$$a = \{a_0^{-\lambda} - \lambda C(\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2(\lambda+1)} n\}^{-1/\lambda} \quad (4)$$

2. 3 疲労き裂進展モデル

疲労き裂進展過程の確率モデル化に対する本研究の考え方は、図2に示すように、き裂長さ・荷重繰返し

数の空間すなわち (a, n) 空間とは別に、ランダム過程における状態・時間空間すなわち (x, t) 空間を考え、 (a, n) 空間におけるき裂長さの確率的挙動が、 (x, t) 空間におけるランダムウォークの確率的挙動と一対一対応関係にあるとするものである。先に提案した、2つのフォッカプランク(F, P)方程式によるき裂進展の確率モデルについて簡単に述べる。

2. 3. 1 き裂進展のモデル1

時間 t に対する状態 x がランダムウォークするとき、 x の確率 $u(x, t)$ は次のF, P方程式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

ここで ν 、 D は定数である。式(5)の初期条件 $u(x, 0) = \delta(x)$ ($\delta(x)$ はディラックの δ 関数)に対する解析解は、

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2}{2Dt}\right\} \quad (6)$$

となる。すなわち、時刻 t における x の分布は、平均値 νt 、分散 Dt の正規分布となる。また、 x における寿命 t の確率密度関数 $v(x, t)$ は、

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt/\nu^2}} \exp\left\{-\frac{(t - x/\nu)^2}{2Dt/\nu^2}\right\} \quad (7)$$

となる。式(7)の右辺の分母の t を近似的に x/ν とくと寿命 t の近似式は、

$$v'(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dx/\nu^3}} \exp\left\{-\frac{(t - x/\nu)^2}{2Dx/\nu^3}\right\} \quad (8)$$

となり、平均値と分散をそれぞれ x/ν 、 Dx/ν^3 とする正規分布となる。

$$\nu = 10^{-4} \lambda E[C](\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2(\lambda+1)} \quad (9)$$

とおき、 n と t および a と x の関係をそれぞれ、

$$t = 10^{-4} n \quad (10)$$

$$x = a_0^{-\lambda} - a^{-\lambda} \quad (11)$$

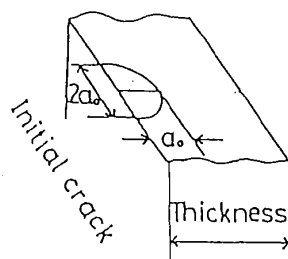


図 1 破壊モデル

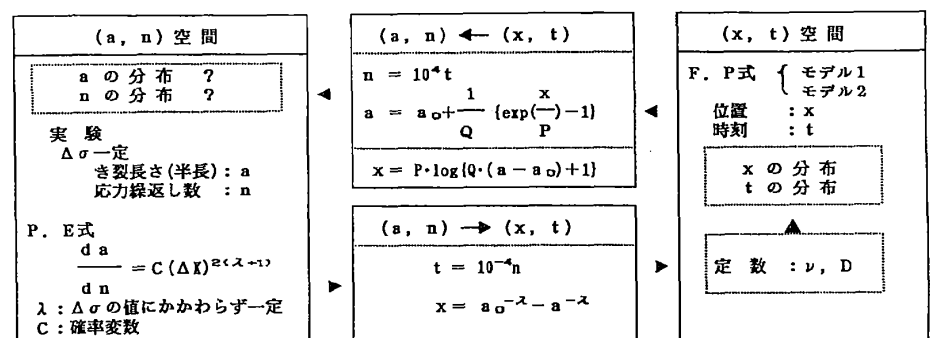


図 2 (a, n) 空間と (x, t) 空間

とし、さらに P 、 Q を定数とする式(11)の近似式

$$x = P \cdot \log\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} \quad (12)$$

を用いて x から a への変換を行う。

これらの式から解析的にき裂長さの分布式 $w(a, n)$ および寿命分布 $h(a, n)$ が求まる。

$$w(a, n) = \frac{P \cdot Q}{\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} \sqrt{2\pi \cdot 10^{-4} D n}} \cdot \exp\left\{-\frac{\{P \cdot \log\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} - 10^{-4} \nu n\}^2}{2 \cdot 10^{-4} D n}\right\} \quad (13)$$

$$h(a, n) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^9 \pi D f(a) / \nu^3}} \cdot \exp\left\{-\frac{(n - 10^4 \cdot f(a) / \nu)^2}{2 \cdot 10^9 \cdot D f(a) / \nu^3}\right\} \quad (14)$$

ただし $f(a) = a_0^{-\lambda} - a^{-\lambda}$

式(14)より寿命の平均値および分散をそれぞれ $E[n]$ $Var[n]$ とすると

$$\frac{Var[n]}{E[n]} = \frac{10^9 \cdot D f(a) / \nu^3}{10^4 \cdot f(a) / \nu} = \frac{10^4 D}{\nu^2} = \text{const.} \quad (15)$$

となる。

2. 3. 2 き裂進展のモデル 2

P 、 E 式の係数 C を、平均値 $E[C]$ 、分散 $Var[C]$ とする正規分布と仮定し、

$$\nu = \lambda E[C] (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^{2(\lambda+1)} \cdot 10^4 \quad (16)$$

$$D = \nu^2 \cdot Var[C] / E[C]^2 \quad (17)$$

とおくと、モデル 2 の F 、 P 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} = D t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

となる。

式(17)の解は平均値 νt 分散 $D t^2$ の正規分布となり、

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2}{2 D t^2}\right\} \quad (19)$$

$$t = 10^{-4} n \quad (20)$$

$$x = a_0^{-\lambda} - a^{-\lambda} \quad (21)$$

としさらに P 、 Q を定数とする、式(21)の近似式

$$x = P \cdot \log\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} \quad (22)$$

を用いて、 (a, n) 空間に変換すると、モデル 1 の場合と同様に解析的にき裂長さの分布式 $w(a, n)$ および寿命分布 $h(a, n)$ が求まる。

$$w(a, n) = \frac{P \cdot Q}{\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} \sqrt{2\pi \cdot 10^{-4} D n}} \cdot \exp\left\{-\frac{\{P \cdot \log\{Q \cdot (a - a_0) + 1\} - 10^{-4} \nu n\}^2}{2 \cdot 10^{-4} D n}\right\} \quad (23)$$

$$h(a, n) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^9 \pi D f(a) / \nu^3}} \cdot \exp\left\{-\frac{(n - 10^4 \cdot f(a) / \nu)^2}{2 \cdot 10^9 \cdot D f(a) / \nu^3}\right\} \quad (24)$$

ただし $f(a) = a_0^{-\lambda} - a^{-\lambda}$

モデル 2 では

$$\frac{\sqrt{Var[n]}}{E[n]} = \frac{\sqrt{D}}{\nu} = \text{const.} \quad (25)$$

となる。

2. 4 き裂長さの初期分布および欠陥発見確率

初期き裂長さ a_0 の初期分布 $G_0(a_0)$ にはベータ関数を用いる。

$$G_0(a_0) = \frac{(a_U - a_L)^{q-1} (a_U - a_0)^{p-1}}{B(q, r) (a_U - a_L)^{q+r-1}} \quad (26)$$

ここで a_L および a_U は分布の上下限值、 p および q はベータ関数のパラメータである。

また、欠陥発見確率 $P[D|a]$ は a を変数とする次の式で表されるものとする。[1]

$$\left. \begin{aligned} P[D|a] &= 0 & : a < a_1 \\ P[D|a] &= \left(\frac{a - a_1}{a_2 - a_1}\right)^q & : a_1 \leq a \leq a_2 \\ P[D|a] &= 1 & : a \geq a_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

2. 5 破壊確率

破壊確率の計算は「部品交換モデル」(NDIにより検出されなかったき裂分布はそのまま残り、検出されたき裂分布は初期き裂長さ分布に再分配される)の場合について行う。計算は (x, t) 空間上で行い、き裂長さ a に対応する x の値を便宜的にき裂長さと考えことにする。供用開始後の時刻 T_j において j 回目の NDIを行うものとし T_j の前後におけるき裂長さの確率密度関数をそれぞれ $p(x|T_j)$ および $p'(x|T_j)$ とする。部品交換モデルの仮定より式(27)を用いて、

$$p'(x|T_j) = G_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} p(x|T_j) \cdot P[D|x] dx + p(x|T_j) \cdot \{1 - P[D|x]\} \quad (28)$$

となる。モデル 1 においては、 T_j において $x = x_j$ のき裂は T_j から時間 t 後には、平均値 $(x_j + \nu t)$ 、分散 $D t$ の正規分布になることから、この正規分布を $NORM(x|x_j + \nu t, D t)$ (29)

とおくと、時刻 $(T_j + t)$ におけるき裂長さの分布 $p(x|T_j + t)$ は、式(28)と(29)の積和として

$$p(x|T_j + t) = \int_{-\infty}^{\infty} p'(x_j|T) \cdot NORM(x|x_j + \nu t, D t) dx_j \quad (30)$$

となる。

時刻 T における破壊確率 P_r はき裂長さが限界き裂長さ x_0 を越える確率として得られる。

$$P_r(T) = \int_{x_0}^{\infty} p(x|T) dx \quad (31)$$

モデル 2 では、 T_j から時間 t 後の分散が $D t^2$ となる。

3 解析例

3.1 き裂長さの初期分布および欠陥発見確率

限界き裂長さを20mm、応力幅を200Mpa、き裂長さの初期分布を与える式(26)の係数は、 $a_L = 0.5\text{mm}$ 、 $a_U = 7\text{mm}$ 、 $q = 1$ 、 $r = 6$ とした。また、欠陥発見確率 $P[D|a]$ の係数は $a_1 = 0.5\text{mm}$ 、 $a_2 = 12\text{mm}$ 、 $d = 0.15$ とした。

3.2 P、EおよびF、P式の係数

P、E式の係数Cの平均値は 1×10^{-13} 、 $m = 3.0$ ($\lambda = 0.5$ とした)。2つのF、P方程式はいずれも、 ν およびDの2つの係数をもつが、 ν はき裂進展速度の平均値をあたえ、両モデルに対し式(9)から求まる。一方Dは、き裂進展のばらつきをあたえ、過去の実験結果から定めた。モデル1では、寿命分布について(分散/平均値) = $s = \text{一定}$ 、となるがこの値は約1000~3000程度であることから[5]この値を式(15)に代入しDを決める。一方、モデル2では寿命分布について(標準偏差/平均値) = 変動係数 = $\nu_n = \text{一定}$ となるがこの値は約0.03~0.1程度であることからこの値を式(25)に代入してDを決めた。[6]

4 考察

前述のように、寿命分布についてモデル1は s が一定の、またモデル2は ν_n が一定のモデルであるといえる。推移確率行列を用いる離散モデルは、前者とほぼ対応するものであり[5]、後者は実験的にはしばしば現われるが[6]これまでモデル化はされていない。

図3、4は、モデル1の $s = 1000$ および3000の場合について、NDIの回数が累積破壊確率 P_r におよぼす影響を示す。NDIの回数は $(PSI+ISI)$ としている。 s の値が大きいほど P_r の増加は早く、また同じNDIの回数で比較すると P_r の値も大きい。また、本計算に用いたき裂長さの初期分布および欠陥発見確率では、供用前査(PSI)の効果はほとんど見られない。図5、6は、モデル2による $\nu_n = 0.03$ 、0.10 の場合の同様の計算結果を示す。両者には 図3、4の場合と同様の傾向が見られる。図3と図6を比較するとNDIの回数の少ない範囲でかなりよく一致している。

参考文献

- 1] 北川ら, 機論, A-45, 397, 1033-1035(1979)
- 2] 中川ら, 材料, 34, 378, 327-332(1985)
- 3] 藤本, 非破壊検査, 41, 4, 179-185(1992)
- 4] 徳納ら, 41期材料学会前刷, (1992)
- 5] 中川ら, 材料, 33, 367, 475-481(1984)
- 6] 市川ら, 第10回設計における信頼性工学シンポジウム前刷, 101-106(1991)

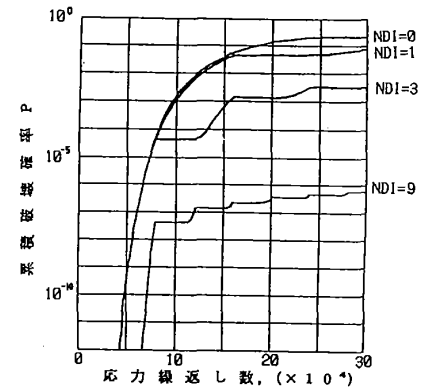


図3 累積破壊確率 P 、 $s = 1000$ (モデル1)

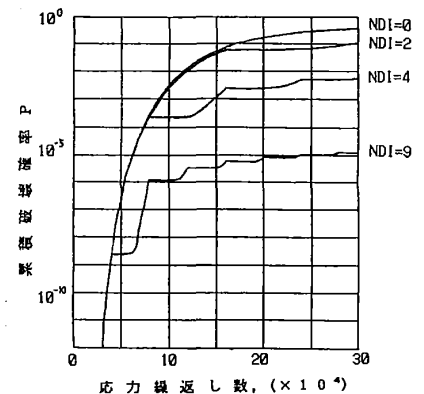


図4 累積破壊確率 P 、 $s = 3000$ (モデル1)

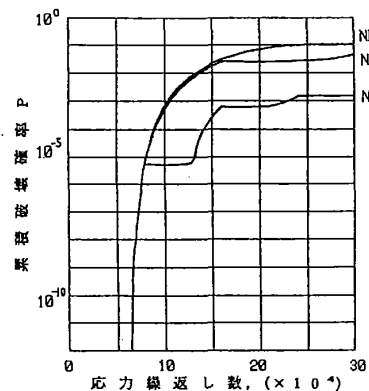


図5 累積破壊確率 P 、 $\nu_n = 0.03$ (モデル2)

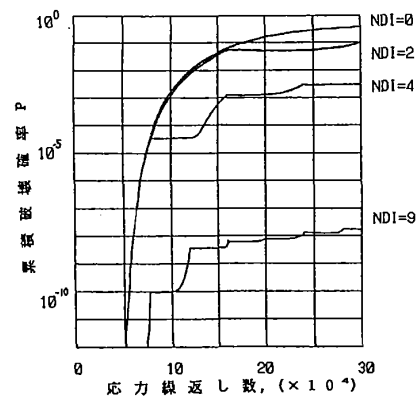


図6 累積破壊確率 P 、 $\nu_n = 0.01$ (モデル2)