

論文

メタマー交点波長に関する理論解析

Theoretical Analysis of Metamer Intersection Locations

松代 信人

Nobuhito Matsushiro

ロチェスター工科大学マンセル色彩科学研究所／沖電気工業株式会社

Munsell Color Science Laboratory, Rochester Institute of Technology /

Oki Electric Industry Co., Ltd.

大田 登

Noboru Ohta

ロチェスター工科大学マンセル色彩科学研究所

Munsell Color Science Laboratory, Rochester Institute of Technology

Abstract

Spectral radiance distributions which are different each other and give the same tristimulus values are called metamer. Related to metamer, there has been a historical assumption that intersection locations of metamers approximately coincide with particular locations in the wavelength range. However, in the existing research, experimental discussions have been performed under the assumption of specific models for spectral radiance distributions and there exists no general discussions from theoretical standpoints. In this paper, from a theoretical point of view, general analytical results not depending on any specific model are described. The discussion related to the assumption is treated universally with a general mathematical framework. The discussion starts from four intersections cases which is the basis of the assumption from a theoretical point of view, and succeeding three intersections cases in the existing literature are discussed theoretically.

Keywords: Spectral Radiance Distribution, Metamerism, Metamer, Intersection Location

要 旨

異なる分光スペクトルであるにも関わらず、同じ三刺激値を与える分光スペクトルはメタメリズムの関係にあるといい、この関係にある分光スペクトルをメタマーと呼ぶ。このメタマーにおいて、互いに交差する分光スペクトルの交点は、ほぼ特定の位置に存在するという仮説が古くから議論されている。しかしながら従来研究においては、分光スペクトルについて特定のモデルを仮定した実験的議論がなされており、理論的立場から一般性のある議論がなされたことはない。本論文では、理論的立場から、特定のモデルに依存しない一般性のある解析を行った結果について報告する。従来研究では、3交点について議論がなされてきたが、本論文では、理論的な立場からの解析の出発点を4交点とした解析結果について述べた後、これをベースとした3交点の場合の解析結果について述べる。

キーワード：分光分布、メタメリズム、メタマー、交点位置

1. はじめに

メタメリズムは、人間の視覚に関する最も重要な特性の1つであり、これまでに多くの研究がなされてきた。その中でも、W. D. Wrightを起源とし、その後、W. A. Thornton等によって検討されてきた仮説、すなわち、メタマー交点は波長領域の特定の波長位置にほぼ一致するという仮説は、特に重要なものの1つである^{1-3, 5}。W. A. Thorntonは、ベイヤーセット⁴と呼ばれるメタマーについて解析を行い、特定波長の近傍に交点の出現頻度のピークがあることを見出した。また、ガウス関数から発生されたメタマー分光スペクトルについて解析し、類似のピーク位置を見出した。さらに、これらの交点波長の重要性を光源設計において示した³。R. S. BernsとR. G. Kuehniは、分光スペクトルの記述に1特殊曲線モデルを使用した議論により、前述と同様の結果を示した⁶。N. OhtaとG. Wyszeckiは、この問題を強メタマーと弱メタマーの観点から議論した^{7, 8}。

しかしながら従来研究においては、分光スペクトルについて特定のモデル、特定のセットを仮定した実験的議論がなされており、理論的立場から一般性のある議論がなされたことはない。

過去の論争で実験数を増加させるに従い信頼性は高まるものの、実験に基づく結果はあくまで仮説である。従って、この論争は色彩科学の歴史的な流れの中で未完結として位置づけることができる。現代色彩科学において、古典的な経験則としてではなく、この問題を理論的に整理しておく必要があると考えられる。本論文では、特定のモデルに依存しない一般性のある理論解析を行う。

また、この問題は応用面に与える影響も大きく、これまでに、色をきれいにさせる光源設計への応用に結びついている。具体的には、W. A. Thorntonの提案したメタマーランプで、このアイディアが三波長蛍光ランプの開発に結びついた。その他、色分解系の分光感度設計への応用が考えられる。すなわち、三波長で分光情報を検出すれば、条件等色の影響の少ない設計を行うことができる。

メタマーは理論的には無数に存在することが問題の本質の見通しを困難にしている要因である。そこで本論文では、見通しのきく構造的なアプローチを行うために、モデル記述パラメータの変動中心とその周りでの対称変動という構造をベースに、無数に存在するメタマー群の集合を構造化した。

従来研究では、3交点について交点波長の議論がなされていたが、本論文では、まず、メタマー群の構造的な記述において出発点となる4交点について解析を行い、次にこれをベースとした3交点についての解析結果を示す。

従来研究は、言うまでもなく重要な結果を与えているが、本論文の一般性の枠組みにおいて、特定のモデルに依存しない不偏的な結果を得ることができた。

2. 用語の定義

異なる分光スペクトルであるにも関わらず、同じ三刺激値を与える分光スペクトルはメタメリズムの関係にあるといい、この関係にある分光スペクトルをメタマー、そのときの三刺激値をメタメリック三刺激値と呼ぶ。また、メタマーの関係にある分光スペクトル間の交点をメタマー交点と呼ぶ。

$R := [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 波長領域

$\lambda : R$ における波長 (離散サンプリング)

ここで

$\lambda_{\min}$: 最小波長値

$\lambda_{\max}$: 最大波長値

異なる分光スペクトル $s^{(1)}(\lambda)$ と $s^{(2)}(\lambda)$ は、以下の三刺激値条件を満たす場合に、メタメリック三刺激値となる。

$$X = \sum_{\lambda \in R} s^{(1)}(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda = \sum_{\lambda \in R} s^{(2)}(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda$$

$$Y = \sum_{\lambda \in R} s^{(1)}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda = \sum_{\lambda \in R} s^{(2)}(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda \quad (1)$$

$$Z = \sum_{\lambda \in R} s^{(1)}(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta\lambda = \sum_{\lambda \in R} s^{(2)}(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta\lambda$$

ここで

$$\exists \lambda, \quad s^{(1)}(\lambda) \neq s^{(2)}(\lambda)$$

$$\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda) : \text{等色関数}$$

3. 従来研究

W. S. StilesとG. Wyszeckiは、2つの分光スペクトル間のメタマー交点の数は、少なくとも3つ存在することを示した⁹。従来研究では、3交点の場合の交点波長が議論されている。W. A. Thorntonの研究は、ベイヤーセット⁴と呼ばれる特定のデータセットや、ガウス関数といった特定のモデルに基づいたものである^{2, 3, 5}。そして、文献2)においては、メタマー3交点は、 $448 \pm 4nm$ 、 $537 \pm 3nm$ 、 $612 \pm 8nm$ に存在することを見出した。また、文献5)においては、メタマー3交点の

それぞれの中心は458nm、541nm、611nmに存在することを示した。

R. S. Berns と R. G. Kuehniは、分光スペクトルの記述に1特殊曲線モデルを使用した議論により、前述とほぼ同様の結果を示した⁶。N. OhtaとG. Wyszeckiは、この問題を強メタマーと弱メタマーの観点から議論した^{7,8}。強メタマーとは、メタマーを構成する分光スペクトルにはさまれる面積の大きいもの、また、弱メタマーとは、この面積の小さいものと定義され、強メタマーについては、上記3交点波長に集中することを実験的に示した。また、M. H. Brillは、分光スペクトルの主成分モデルによる記述の立場からこの問題を解析し、上述とほぼ同様の結果を得た¹⁰。

4. 理論解析

本論文は理論的立場から、特定のモデルに依存しない一般性のある解析を行う。

メタマー交点問題は、2つの分光スペクトル間の交点を、あらゆる組み合わせについて考えることに相当するので、以下これで議論を進める。また、メタメリック三刺激値関係にある異なる2つの分光スペクトル $s^{(1)}(\lambda)$ と $s^{(2)}(\lambda)$ の交点は、等価的にメタメリックブラック $s_{mb}(\lambda) = s^{(1)}(\lambda) - s^{(2)}(\lambda)$ のゼロクロスの特異性に置き換えることができるので、以下、この枠組みで議論することにする。付録で、メタメリックブラックの一般記述式を導出している(A.7)。メタメリックブラックは理論的には無数に存在する。そこで、問題に対して理論的に導かれる諸性質を利用するアプローチを行うために、モデル記述パラメータの変動中心とその周りでの対称変動という構造がこの式(A.7)をベースに構築され、無数に存在するメタメリックブラック群の集合が構造的に扱われる。

まず、メタメリックブラック群の構造的な記述において出発点となる4交点について解析を行い、次にこれをベースとした3交点についての解析結果を示す。

付録のメタメリックブラックの一般式(A.7.a)に含まれているR上で定義された任意の関数 $G(\lambda)$ は、メタメリックブラック生成における原入力パラメータ(モデル記述パラメータ)であり、まず $G(\lambda)$ が与えられ、メタメリックブラック三刺激値条件を満たす k_X 、 k_Y 、 k_Z が求められ、式(A.7.a)左辺のメタメリックブラックが生成される。 $G(\lambda)$ の記述方法を以下のように定義する。

サンプル点記述： $G(\lambda)$ を、Rにおける離散サン

pling λ 上で各々独立に指定して記述するモデル

形状モデル記述：サンプル点記述の次元より小さい次元のモデルにより、 $G(\lambda)$ の形状を記述するモデル

以下、特性群の証明により、本問題の理論的な解析を順に進めていく。まず、 $G(\lambda)$ がサンプル点記述される場合についての諸特性を説明する。

[特性1]

等色関数が事前に指定されているものとする、交点波長は $G(\lambda)$ (付録参照)のみに依存する。

証明

交点波長は、 k_X 、 k_Y 、 k_Z と $G(\lambda)$ のみに依存する式(A.10)により求められる。ここで、式(A.9)の解として求められる k_X 、 k_Y 、 k_Z は、式(A.9)において $G(\lambda)$ のみに依存することから、結局式(A.10)は $G(\lambda)$ のみに依存することになる。

特性1は、モデル記述パラメータが $G(\lambda)$ であることを示している。

[特性2]

交点波長は、各波長 λ における定数スケーリングファクタ γ ($\gamma \neq 0$) を用いた $G(\lambda)$ の一様スケーリングにおいて、不変である。

証明

$G(\lambda)$ の代わりに $\gamma \cdot G(\lambda)$ を、式(A.9)に含まれている $C_{\bar{x}}^{(4)}$ 、 $C_{\bar{y}}^{(4)}$ 、 $C_{\bar{z}}^{(4)}$ に代入する。式(A.9)の線形比例の関係により、式(A.9)の解として $\gamma \cdot k_X$ 、 $\gamma \cdot k_Y$ 、 $\gamma \cdot k_Z$ が得られる。ここで、 k_X 、 k_Y 、 k_Z は $G(\lambda)$ に対応して得られている解とする。スケーリングされた $\gamma \cdot G(\lambda)$ と、対応する解 $\gamma \cdot k_X$ 、 $\gamma \cdot k_Y$ 、 $\gamma \cdot k_Z$ を式(A.10)に代入し、 γ で正規化することにより、スケーリングのない場合に相当する式が得られ、本特性が証明される。

$\gamma = 0$ において、式(A.9)は斉次方程式となることから、 $\gamma \neq 0$ が仮定される。

[特性3]

交点波長は、 $G(\lambda)$ のプラスとマイナスの入れ換えについて不変である。

証明

特性2の証明における γ と $-\gamma$ の関係から、本特性は証明される。

特性4は、モデル記述パラメータ $G(\lambda)$ の変動中心とその周りでの対称変動構造に関するものである。

ここで変動中心とは、 $G(\lambda)$ の期待平均である。

[特性4]

$G(\lambda) = \text{const}$ ($\rightarrow 0$ and $\neq 0$, 一定値) は、全ての存在し得る $G(\lambda)$ の変動中心である。以後、この const を const_0 で表示する。

証明

特性3から、 $G(\lambda)$ と $-G(\lambda)$ は、0-軸について対称の関係にあり、0-軸についての変動の一对をなしている。そしてこの一对の平均値は0-軸上に存在する。よって、この特性が証明される。

[特性5]

$G(\lambda) = \text{const}_0$ に代表される $G(\lambda) = \text{const}$ ($\forall \text{const} (\neq 0)$)については、交点数は4であることが、特性2と式(A.10)を使用した数値解の数え上げから示されている。

[特性6]

4交点波長位置は、 $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対応する交点波長を中心として、不偏の性質を持つ。

証明

式(A.7)は、最適化の結果得られたメタメリックブラックの設計形状である。メタメリックブラックの変動は $G(\lambda)$ のみに依存し、このとき $G(\lambda) = \text{const}_0$ は、変動の中心である(特性4)。ここでの変動においては、スケール係数 γ の変動も含まれる。

このとき、存在し得るすべての4交点メタメリックブラック交点波長は、以下に説明するように、 $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対する交点波長を中心として変動する。

式(A.9)から、行列形式の以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = -M^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{\lambda \in R} \bar{x}(\lambda) G(\lambda) \Delta \lambda \\ \sum_{\lambda \in R} \bar{y}(\lambda) G(\lambda) \Delta \lambda \\ \sum_{\lambda \in R} \bar{z}(\lambda) G(\lambda) \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで

$$M = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}}^{(1)} & C_{\bar{x}}^{(2)} & C_{\bar{x}}^{(3)} \\ C_{\bar{y}}^{(1)} & C_{\bar{y}}^{(2)} & C_{\bar{y}}^{(3)} \\ C_{\bar{z}}^{(1)} & C_{\bar{z}}^{(2)} & C_{\bar{z}}^{(3)} \end{bmatrix}$$

式(A.10)から、ある1つの交点波長 λ は、 k_x 、 k_y 、 k_z と G の関数であり、テーラー展開による1次式として以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \lambda &= H(k_x, k_y, k_z, G) \\ &\cong w + w_x k_x + w_y k_y + w_z k_z + G \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

w, w_x, w_y, w_z : 展開係数

式(2)の左辺の k_x 、 k_y 、 k_z は、式(2)の右辺に含まれている $G(\lambda)$ の線形和となっており、このことから、式(3)は $G(\lambda)$ の線形和となっている。式(3)の $G(\lambda)$ の変動において、式(3)の左辺の λ は、中心極限定理により正規分布をなす。波長領域における R サンプリング数を無限に増加させることにより、式(3)の右辺に含まれる項数が無限に増加され、漸近的に中心極限定理が満たされる。式(3)の $G(\lambda)$ 線形和において、その変動中心は $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対応する波長 λ であることから、 $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対する交点波長が正規分布の中心に対応する。 $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対する交点波長周りの正規分布は、交点波長位置の分布の不偏性を示している。

以上で本特性が証明された。

次の特性7は3交点の場合に関するものであり、前述の4交点の議論に基づくものである。 $G(\lambda) = \text{const}_0$ における4交点波長を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$)とする(5. 数値解析参照)。特性7において対称とは、波長の短い方から最初に存在している $\bar{x}(\lambda)$ のピーク近傍を中心とした $\bar{x}(\lambda)$ の左右対称性を指す(図1(a)(b)参照)。これは $\bar{x}(\lambda)$ についても同様である(対称性の評価については、5. 数値解析参照)。

[特性7]

$G(\lambda) = \text{const}_0$ に対応した λ_1 と λ_2 の midpoint には、不偏交点波長が存在する。

証明

$\bar{x}(\lambda)$ と $\bar{z}(\lambda)$ のそれぞれは、 λ_1 と λ_2 の中点 $\lambda^*=(\lambda_1+\lambda_2)/2$ について対称であると仮定すると(5. 数値解析参照)、 $\bar{x}(\lambda)$ と $\bar{z}(\lambda)$ 以下のように記述できる。

$$\bar{x}(\lambda_1)=\bar{x}(\lambda^*)-\bar{x}_c \quad (4.a)$$

$$\bar{x}(\lambda_2)=\bar{x}(\lambda^*)-\bar{x}_c \quad (4.b)$$

$$\bar{z}(\lambda_1)=\bar{z}(\lambda^*)-\bar{z}_c \quad (5.a)$$

$$\bar{z}(\lambda_2)=\bar{z}(\lambda^*)-\bar{z}_c \quad (5.b)$$

ここで

$\bar{x}_c, \bar{z}_c$: 定数

λ_1, λ_2 : 5.数値解析参照

($\lambda_1=430nm, \lambda_2=469nm$ (CIE1931),

$\lambda_1=430nm, \lambda_2=468nm$ (CIE1964))

$\bar{y}(\lambda)$ は波長領域 $[\lambda_1, \lambda_2]$ で直線とみなせるものと仮定すると(図1 (a) (b), 5.数値解析参照)、 λ^* で以下の式が成り立つ。

$$\bar{y}(\lambda_1)=\bar{y}(\lambda^*)-\bar{y}_c \quad (6.a)$$

$$\bar{y}(\lambda_2)=\bar{y}(\lambda^*)+\bar{y}_c \quad (6.b)$$

ここで

$\bar{y}_c$: 定数

以下で定義される $G^+(\lambda_1), G^+(\lambda_2)$ に対する λ_1, λ_2 交点波長について成り立つ式(7.a) (7.b)の関係から議論を始める。

$$\{k_X \bar{x}(\lambda_1) + k_Y \bar{y}(\lambda_1) + k_Z \bar{z}(\lambda_1)\} + G^+(\lambda_1) = 0 \quad (7.a)$$

$$\{k_X \bar{x}(\lambda_2) + k_Y \bar{y}(\lambda_2) + k_Z \bar{z}(\lambda_2)\} + G^+(\lambda_2) = 0 \quad (7.b)$$

ここで

$$G^+(\lambda_1), G^+(\lambda_2) := G(\lambda^*) + k_X \cdot \bar{x}_c + k_Z \cdot \bar{z}_c$$

付録で説明しているように、与えられた $G(\lambda)$ について、未定係数 k_X, k_Y, k_Z はメタメリックブラックの三刺激値条件から一意に解くことができる。また、3つの交点波長からも k_X, k_Y, k_Z は一意に解くことができる。すなわち、未知パラメータ k_X, k_Y, k_Z は、4交点波長の集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ の中から選択された3つの交点波長から一意に解くことができる。よって、 $\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4\}, \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ と $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ は、 $k_X,$

k_Y, k_Z の解として同一のものを導き出す。従って、式(7.a)と(7.b)は共通の k_X, k_Y, k_Z の値を持つ。

ここで、2つの波長 λ_1 と λ_2 上における式(7.a) (7.b)の左右両辺のそれぞれの線形和を考える。この線形和においては、 k_X, k_Y, k_Z の値はそのまま保存され、式(4) (5) (6)を使用することにより、以下の式の変換がなされる。

$$\begin{aligned} & \left[\{k_X \bar{x}(\lambda_1) + k_Y \bar{y}(\lambda_1) + k_Z \bar{z}(\lambda_1)\} + G^+(\lambda_1) \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X \bar{x}(\lambda_2) + k_Y \bar{y}(\lambda_2) + k_Z \bar{z}(\lambda_2)\} + G^+(\lambda_2) \right] / 2 \\ & = \left[\{k_X \bar{x}(\lambda_1) + k_Y \bar{y}(\lambda_1) + k_Z \bar{z}(\lambda_1)\} + G(\lambda^*) + k_X \cdot \bar{x}_c + k_Z \cdot \bar{z}_c \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X \bar{x}(\lambda_2) + k_Y \bar{y}(\lambda_2) + k_Z \bar{z}(\lambda_2)\} + G(\lambda^*) + k_X \cdot \bar{x}_c + k_Z \cdot \bar{z}_c \right] / 2 \\ & = \left[\{k_X (\bar{x}(\lambda_1) + \bar{x}_c) + k_Y \bar{y}(\lambda_1) + k_Z (\bar{z}(\lambda_1) + \bar{z}_c)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X (\bar{x}(\lambda_2) + \bar{x}_c) + k_Y \bar{y}(\lambda_2) + k_Z (\bar{z}(\lambda_2) + \bar{z}_c)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & = \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y \bar{y}(\lambda_1) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y \bar{y}(\lambda_2) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & = \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y (\bar{y}(\lambda^*) - \bar{y}_c) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y (\bar{y}(\lambda^*) + \bar{y}_c) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & = \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y \bar{y}(\lambda^*) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & + \left[\{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y \bar{y}(\lambda^*) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \right] / 2 \\ & = \{k_X \bar{x}(\lambda^*) + k_Y \bar{y}(\lambda^*) + k_Z \bar{z}(\lambda^*)\} + G(\lambda^*) \quad (8) \\ & = 0 \end{aligned}$$

式(8)の最終式は波長 $\lambda^*=(\lambda_1+\lambda_2)/2$ 上のものであり、この波長におけるゼロクロス条件を、共通の k_X, k_Y, k_Z 値下で、 $\{\lambda^*, G(\lambda^*)\}, \{\lambda_3, G^+(\lambda_3)\}, \{\lambda_4, G^+(\lambda_4)\}$ のパラメータセットについて満たす。このセットに含まれている $G^+(\lambda_3), G^+(\lambda_4)$ は、先の $G^+(\lambda_1), G^+(\lambda_2)$ の設定に基づき、 $G^+(\lambda_3)=G^+(\lambda_4)=G^+(\lambda_1)=G^+(\lambda_2)$ の関係を満たすものである。このパラメータセットは、波長 $\lambda^*, \lambda_3, \lambda_4$ における3交点を実現しているものであり、 G は3交点上でそれぞれ $G(\lambda^*), G^+(\lambda_3), G^+(\lambda_4)$ の値をとることが条件となっている。

λ_1 と λ_2 上の2つの不偏性をもった交点式の和(式(8))は、また、不偏の交点波長を与える。このことは、2つの式(7.a)と(7.b)を λ についての式(3)の形で記述したときの和について、さらに中心極限定理が適用されることから示すことができる。

以上で本特性が証明された。

ここまでは、 $G(\lambda)$ のサンプル点記述を行う場合について述べた。以下の特性8、9は、 $G(\lambda)$ の形状モデル記述を行う場合に関する。形状モデル記述の方法としては、存在可能なものが全て想定される。

[特性8]

$G(\lambda)$ の形状モデル記述においても、特性6は成立し、また、交点位置は不変である。

証明

式(2)に含まれている項は、 $\sum_{\lambda \in R} \bar{x}(\lambda)G(\lambda)\Delta\lambda$ 独立成分分析(ICA)によって波長領域において得られる $n(>0)$ 個の独立成分の線形和によって表現される。 $\sum_{\lambda \in R} \bar{y}(\lambda)G(\lambda)\Delta\lambda$ と $\sum_{\lambda \in R} \bar{z}(\lambda)G(\lambda)\Delta\lambda$ についても同様である。このことから式(3)の右辺は、互いに確率的に独立な成分の線形和で表現され、中心極限定理から、式(3)の左辺の λ が正規分布となる。波長領域でのサンプリング数が無限に近づくにつれて、形状記述に関わるモデルは、無数に存在するようになり、これに伴い、独立成分は無数に存在する。その結果、式(3)の右辺を表現する無数の独立成分により、式(3)で中心極限定理が成立し、特性6が成り立つ。

式(3)は1次式であり、 $G(\lambda)$ の微分条件を含まないことから、波長領域での $G(\lambda)$ がサンプル点記述か形状モデル記述かに依存せず、式(3)に含まれる係数は不変である。すなわち、分布の中心も不変である。

[特性9]

$G(\lambda)$ の形状モデル記述においても、特性7は成立する。

証明

形状モデルが含まれていても式(8)は成立し、また、特性8の成立により、式(3)の和の形式で計算される $\lambda^* = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ の正規分布性が証明できる。

以上、 $G(\lambda)$ のサンプル点記述と形状モデル記述、すなわち存在し得る $G(\lambda)$ 全てについての交点波長に関する議論により、特定のモデル、特定のデータセットに限定されない一般性のある理論解析がなされた。

5. 数値解析と考察

前章で証明した特性群により、無限に存在するメタメリックブラックの交点位置に関する議論を、交点中心とその周りでの対称分布形状(正規分布)に関する議論に落とし込んだ。従って、交点波長の正規分布中心である $G(\lambda) = \text{const}_0$ に対応する交点波長についてのみ数値解析を設定し、交点問題の解を得る。波長領域でのサンプリングの影響を極力減らすために、全ての計算は1nmサンプリングで行った。CIE 1931 2°視野とCIE 1964 10°視野の等色関数 $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ を使用した。基本的には、380nmから780nmの波長領域を考慮したが、過去の研究において使用されている場合もある400nmから700nmの波長領域も合わせて考慮した。未知パラメータ k_X , k_Y , k_Z は式(A.9)を使用して求め、また、交点波長は式(A.10)を使用して求めた。式(4)(5)に設定された仮定すなわち対称性の仮定における平均誤差は2.38%(CIE 1931)、5.24%(CIE 1964)と算定された。これらの誤差は、十分に小さい値であるといふことができる。ここで、平均誤差の算出においては、 λ^* を中心とする $\bar{z}(\lambda)$ の左右の平均値が、対称性を構成するものとして、これに対する絶対値誤

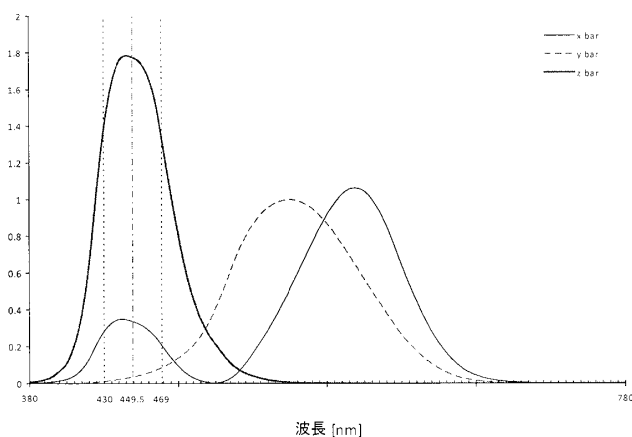


図1(a) 等色関数の対称性(CIE 1931)

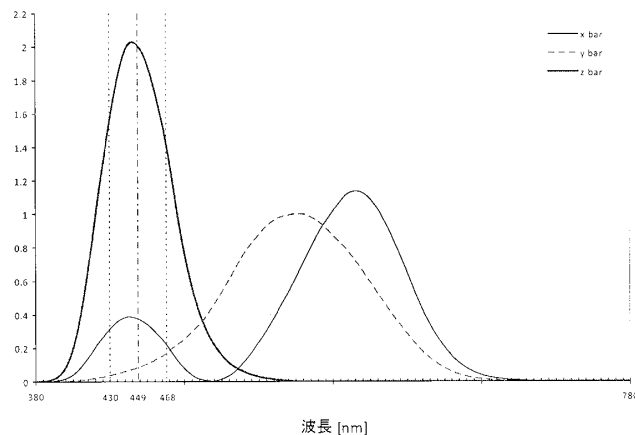


図1(b) 等色関数の対称性(CIE 1964)

差の百分率を λ 毎に求めた。 $\bar{x}(\lambda)$ についても同様にした。そして最終的に $|k_X|\bar{x}(\lambda)$, $|k_Z|\bar{z}(\lambda)$ の値の大きさを重み付けしたトータルな平均百分率誤差を以下の式で求めた。

$$e_{\bar{x}, \bar{z}} = \frac{1}{40} \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{|k_X|\bar{x}(\lambda)e_{\bar{x}}(\lambda) + |k_Z|\bar{z}(\lambda)e_{\bar{z}}(\lambda)}{|k_X|\bar{x}(\lambda) + |k_Z|\bar{z}(\lambda)} \quad (9)$$

ここで、

$$\lambda_1 = 430$$

$$\lambda_2 = 469(\text{CIE1931}), 468(\text{CIE1964})$$

$$e_{\bar{x}}(\lambda): \bar{x}(\lambda) \text{ の百分率誤差}$$

$$e_{\bar{z}}(\lambda): \bar{z}(\lambda) \text{ の百分率誤差}$$

$$|k_X| = 0.549, |k_Z| = 0.605 (\text{CIE1931})$$

$$|k_X| = 0.449, |k_Z| = 0.524 (\text{CIE1964})$$

これらの結果は、式(4)(5)で設定した対称性の仮定の妥当性を示すものである。図1において、 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 区間で値の大きい $\bar{z}(\lambda)$ の対称性が特にCIE1931で高く、 $\bar{x}(\lambda)$ も含めた式(8)において、トータルにこの仮定が有効に働いている。また、式(6)で設定した直線性の仮定の誤差の百分率を $|k_Y|\bar{y}(\lambda)$ で重み付けし、対称性の評価とも合わせた平均百分率誤差(式(10))は2.53%(CIE1931)、4.36%(CIE1964)と小さく、 $\bar{y}(\lambda)$ も含めた式(8)において、これらの仮定が妥当であり有効に働いている。

$$e_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} = \frac{1}{40} \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{|k_X|\bar{x}(\lambda)e_{\bar{x}}(\lambda) + |k_Y|\bar{y}(\lambda)e_{\bar{y}}(\lambda) + |k_Z|\bar{z}(\lambda)e_{\bar{z}}(\lambda)}{|k_X|\bar{x}(\lambda) + |k_Y|\bar{y}(\lambda) + |k_Z|\bar{z}(\lambda)} \quad (10)$$

ここで、

$$e_{\bar{y}}(\lambda): \bar{y}(\lambda) \text{ の百分率誤差}$$

$$|k_Y| = 0.914 (\text{CIE1931}), 0.953 (\text{CIE1964})$$

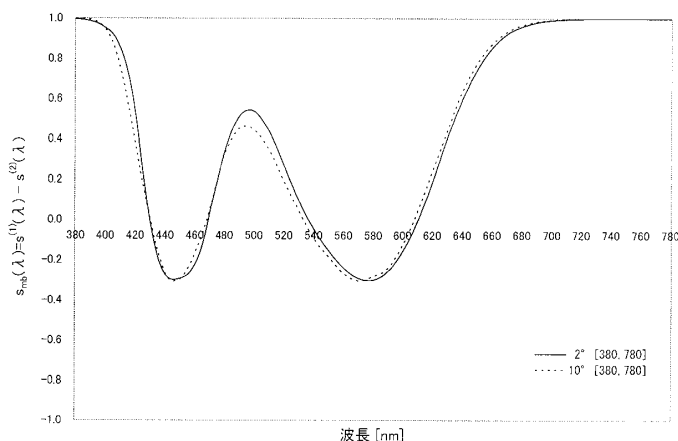


図2 数値解析におけるメタメリックブラックと交点 (CIE 1931, 1964等色関数, [380nm, 780nm]) .

4交点における不偏交点波長は、特性5により求めた。CIE 1931 ([380nm, 780nm])を仮定したときのメタメリックブラックとその交点波長を図2に示す。図2において、4交点波長は430nm、469nm、537nm、611nmであり、 $k_X = -0.549$, $k_Y = -0.914$, $k_Z = -0.605$ である。これらは、特性6、8から不偏交点波長である。特性7に基づき、3交点における最小波長交点 λ^* は449.5nmと計算される(図1(a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda^*$ が対応)。CIE 1964 ([380nm, 780nm])の場合についても、図2に合わせて示している。4交点波長は、430nm、468nm、533nm、608nmであり、このときの $k_X = -0.447$, $k_Y = -0.953$, $k_Z = -0.524$ 、3交点における最小波長 λ^* は449nmと計算される(図1(b) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda^*$ が対応)。

CIE 1931 ([400nm, 700nm])の場合を、図3に示している。このときの4交点は、430nm、469nm、537nm、610nmであり、 $k_X = -0.533$, $k_Y = -0.923$, $k_Z = -0.608$ である。3交点における最小波長 λ^* は、449.5nmと計算される。CIE 1964 ([400nm, 700nm])の場合も図3に合わせて示している。4交点は、430nm、468nm、533nm、607nmで $k_X = -0.434$, $k_Y = -0.960$, $k_Z = -0.525$ である。3交点における最小波長 λ^* は449nmと計算される。

以上は、本論文において初めてなされた理論的アプローチによって得られた、不偏交点波長に関する結果である。

図2 (CIE1931)の3交点の理論値、449.5nm (= λ^*)、537nm、611nmは、W. A. Thorntonの結果²⁾の448nm、537nm、612nmに、それぞれ対応付けられる。同様にして図2、3に示した他の結果も、W. A. Thorntonらの結果と対応付けることができる。

特性2によれば、強メタマーと弱メタマーはスケー

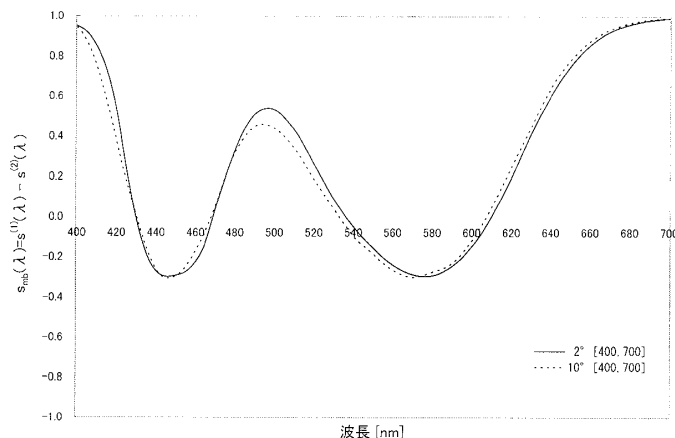


図3 数値解析におけるメタメリックブラックと交点 (CIE 1931, 1964等色関数, [400nm, 700nm]) .

リングの関係にあることから、交点波長は不変であるが、文献7)8)では、設定したモデルの性質に依存して、結果がふられたものと考えることができる。

以上の数値解析結果をまとめると、従来研究の実験結果は、本論文の理論交点波長位置を、特定のモデルやデータセットで近似していたものであると言える。

6. まとめ

メタマー交点は波長領域の特定の波長位置にほぼ一致する、という仮説に関する議論は古典的なものであるが、これまでに実験研究のみが存在していた。

本論文では、この仮説を理論的立場から論じた。2つの分光スペクトル間のメタマーと等価なメタメリックブラックの設計を行う評価関数を設定し、これから出発し、メタメリックブラックの一般式を導出した。これまでに、メタメリックブラック式は存在していたが、 $G(\lambda)$ を分光スペクトルとして、これからメタメリックブラック式を導出していたために、 $G(\lambda)$ は0もしくは正の値をとるものとなっていた。このことで、既存の式は存在し得る全てのメタメリックブラックを表現するものではなかった。

本論文では、メタメリックブラックの一般式を導出し、これに基づき、交点問題の議論に必要な幾つかの特性を証明した。まず、4交点問題から出発し、次にその結果に基づき、これまでの研究で議論されている3交点問題について論じた。本論文の一般性のある枠組みにおいて、特定のモデル、特定のデータセットに依存しない不偏的な結果を得ることができた。

従来研究は、言うまでもなく重要な結果を与えているが、本論文は、理論解析を背景とした説明性に寄与するものである。

謝辞

有益なご指摘をいただきました査読者の方々に深く感謝申し上げます。

参考文献

- 1) Wright W. D. : The Measurement of Colour. Van Nostard New York, Fourth Edition (1969) 147.
- 2) Thornton W. A. : Matching Lights, Metamers and Human Visual Response. The Journal of Color and Appearance, 2 (1973) 23-29.
- 3) Thornton W. A. : Lamps for Assessing Metamerism. J. Illum. Eng. Soc., 4 (1974) 11-18.
- 4) Berger A. and Strocka D. : Quantitative Assessment of Artificial Light Sources for the Best Fit to Standard Illuminant D65. Applied Optics, 12 (1973) 338-348.
- 5) Thornton W. A. : Evidence for the Three Spectral Responses of the Normal Human Visual System. Color Res. Appl., 11 (1986) 160-163.
- 6) Berns R. S. and Kuehni R. G. : What Determines Crossover Wavelengths of Metameric Pairs with Three Crossovers ? Color Res. Appl., 15 (1990) 23-28.
- 7) Ohta N. and Wyszecki G. : Location of the Nodes of Metameric Color Stimuli. Color Res. Appl., 2 (1977) 183-186.
- 8) Ohta N. : Intersections of Spectral Curves of Metameric Colors. Color Res. Appl., 12 (1987) 85-87.
- 9) Stiles W. S. and Wyszecki G. : Intersections of the Spectral Reflectance Curves of Metameric Object Colors. J. Opt. Soc. Am., 58 (1968) 32-40.
- 10) Brill M. H. : Statistical Confirmation of Thornton's Zero-Crossing Conjecture for Metameric Black. Color Res. Appl., 12 (1987) 51-53.
- 11) Luenberger D. G. : Optimization by Vector Space Methods. John Wiley & Sons (1976).
- 12) Aubin J. P. : Optima and Equilibria. Springer-Verlag (1993).
- 13) Ekeland I. : On the Variational Principle. J. Math. Anal. Appl., 47 (1974) 324-353.
- 14) Matsushiro N, Ohta N, Shaw M. Q, and Fairchild M. D. : Optimizing Color-Matching Functions for Individual Observers Using a Variation Method. J. Imaging Sci. Technol., 45 (2001) 472-480.
- 15) Cohen J. B. : Visual Color and Color Mixture. Univ. of Illinois Press Urbana and Chicago (2001).
- 16) Takahama K. and Nayatani Y. : New Method for Generating Metameric Stimuli of Object Colors. J. Opt. Soc. Am., 62 (1972) 1516-1520.

付録

交点問題の議論のために、メタメリックブラックの一般式の導出を行う。

波長 λ 上のメタメリックブラックの一般式は、評価関数 $f^*(s_{mb}(\lambda))$ を最適化する解 $s_{mb}(\lambda)$ で定義される。ここで評価関数の最適化は、あるメタメリックブラックの設計指針に対応する。種々の評価関数 f^* の設定に対応して、種々のメタメリックブラックの設計指針が設定される。 f^* の記述においては、ある関数 $g(\lambda)$ を調整パラメータとして見せることができ、このとき f^* は、 $f^*(s_{mb}(\lambda)) = f(s_{mb}(\lambda), g(\lambda))$ ($\forall \lambda$) の形式で記述される。この評価関数 f は、以下のよう
に多項式表現できる。

$$f(s_{mb}(\lambda), g(\lambda)) \cong \sum_{i,j} a_{ij} s_{mb}(\lambda)^i g(\lambda)^j \quad (\text{A.1})$$

ここで

$$a_{ij} \ (i, j = 1, 2, \dots) : \text{係数(定数)}$$

式(A.1)は、2次の多項式近似により以下のように表現される。

$$f(s_{mb}(\lambda), g(\lambda)) \cong a_1 + a_2 s_{mb}(\lambda) + a_3 s_{mb}(\lambda)^2 + a_4 g(\lambda) + a_5 \{g(\lambda)\}^2 + a_6 g(\lambda) s_{mb}(\lambda) \quad (\text{A.2})$$

ここで

 $a_i (i = 1, 2, \dots, 6)$: 係数(定数)

評価関数 f が最適な状態をとるとき $\left(\frac{\partial f}{\partial s_{mb}(\lambda)} = 0\right)$ 、 $s_{mb}(\lambda)$ は最適解として解かれるが、これは $g(\lambda)$ (もしくは以下に定義された $G(\lambda)$) に依存したものである。ここで最適とは、メタメリックブラックが意図した設計仕様を満たすことと定義される。 $\frac{\partial f}{\partial s_{mb}(\lambda)}$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_{mb}(\lambda)} &= a_2 + 2a_3 s_{mb}(\lambda) + a_6 g(\lambda) \\ &= a \{ s_{mb}(\lambda) - G(\lambda) \} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ここで

$$a = 2a_1 \quad (=1.) \text{関数 } f \text{ の正規化係数}$$

$$G(\lambda) = -\frac{a_2}{2a_3} - \frac{a_6}{2a_3} g(\lambda)$$

$s_{mb}(\lambda)$ がメタメリックブラックであるという拘束条件下で、 $f(s_{mb}(\lambda), g(\lambda))$ のラグランジェ関数は以下の式となる。

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{\lambda \in R} f(s_{mb}(\lambda), g(\lambda)) \Delta \lambda \\
&\quad - \left\{ k_X \sum_{\lambda \in R} \bar{x}(\lambda) s_{mb}(\lambda) \Delta \lambda + k_Y \sum_{\lambda \in R} \bar{y}(\lambda) s_{mb}(\lambda) \Delta \lambda \right. \\
&\quad \left. + k_Z \sum_{\lambda \in R} \bar{z}(\lambda) s_{mb}(\lambda) \Delta \lambda \right\} \\
&= \sum_{\lambda \in R} F(\lambda) \Delta \lambda
\end{aligned} \tag{A 4}$$

式(A.4)から、ラグランジェの未定乗数問題¹¹⁻¹⁴として、以下の関係が導かれる。

$$\frac{\partial L}{\partial s_{mb}(\lambda)} = 0 \quad (\text{A.5.a})$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_Y} = 0 \quad (\text{A.5.b})$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_Y} = 0 \quad (\text{A.5.c})$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_Z} = 0 \quad (\text{A.5.d})$$

式(A.5.a)は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_{mb}(\lambda)} &= \frac{\partial F(\lambda)}{\partial s_{mb}(\lambda)} \\ &= [s_{mb}(\lambda) - G(\lambda)] \\ &\quad - \{k_X \bar{x}(\lambda) + k_Y \bar{y}(\lambda) + k_Z \bar{z}(\lambda)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

式(A.6)から以下の式(A.7.a)，(A.7.b)を得る。

$$s_{mb}(\lambda) = \{k_X \bar{x}(\lambda) + k_Y \bar{y}(\lambda) + k_Z \bar{z}(\lambda)\} + G(\lambda) \quad (\text{A.7.a})$$

$$G(\lambda) = -\{k_X \bar{x}(\lambda) + k_Y \bar{y}(\lambda) + k_Z \bar{z}(\lambda)\} + s_{mb}(\lambda) \quad (\text{A.7.b})$$

式(A.7.a)はメタメリックブラッグの一般式である。 $G(\lambda)$ を分光スペクトルとした場合、 $G(\lambda)$ は、ファンダメンタルとメタメリックブラッグに分解できることを式(A.7.b)は示している¹⁵。

式(A.7.a)を X 、 Y 、 Z の三刺激値メタメリックブラック条件((A.5.b)，(A.5.c)，(A.5.d))に代入すると、以下の3つの式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda \in R} \tau(\lambda) s_{mb}(\lambda) \Delta \lambda \\
&= \sum_{\lambda \in R} \tau(\lambda) \{k_X \bar{x}(\lambda) + k_Y \bar{y}(\lambda) + k_Z \bar{z}(\lambda) + G(\lambda)\} \Delta \lambda \quad (\text{A.8}) \\
&= k_X C_T^{(1)} + k_Y C_T^{(2)} + k_Z C_T^{(3)} + C_T^{(4)} = 0
\end{aligned}$$

ここで

$$\tau(\lambda) = \bar{x}(\lambda) \quad (X \text{ 刺激値について})$$

$$\tau(\lambda) = \bar{y}(\lambda) \quad (Y \quad // \quad)$$

$$\tau(\lambda) = \bar{z}(\lambda) \quad (Z \rightarrow \mathbb{C}) \quad //$$

$$C_r^{(1)} = \sum_{\lambda} \tau(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta \lambda$$

$$C_r^{(2)} = \sum_{\lambda \in R} \tau(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta \lambda$$

$$C_r^{(3)} = \sum_{\lambda \in R} \tau(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta \lambda$$

$$C_r^{(4)} = \sum_{\lambda \in R} \tau(\lambda) G(\lambda) \Delta \lambda$$

$$\text{式 } k_X C_{\bar{x}}^{(1)} + k_Y C_{\bar{y}}^{(2)} + k_Z C_{\bar{z}}^{(3)} + C_{\bar{x}}^{(4)} = 0$$

$$k_X C_{\bar{y}}^{(1)} + k_Y C_{\bar{y}}^{(2)} + k_Z C_{\bar{y}}^{(3)} + C_{\bar{y}}^{(4)} = 0$$

$$k_X C_{\bar{z}}^{(1)} + k_Y C_{\bar{z}}^{(2)} + k_Z C_{\bar{z}}^{(3)} + C_{\bar{z}}^{(4)} = 0 \quad (\text{A.9})$$

k_X 、 k_Y 、 k_Z の値は線形式(A.9)を解くことで、得られる。

式(A.7.a)は、メタメリックブラックの一般式を記述するものであることを既に述べたが、交点波長は、式(A.7.a)において $s_{mb}(\lambda) = 0$ とすることで得られた以下の式から計算される。

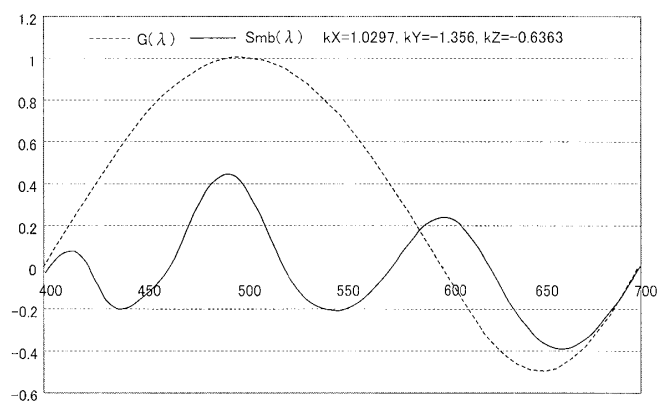
$$k_X \bar{x}(\lambda) + k_Y \bar{y}(\lambda) + k_Z \bar{z}(\lambda) + G(\lambda) = 0 \quad (\text{A.10})$$

式(A.10)において、CIEの標準等色関数を仮定すると、4つの交点がカウントアップされる。

式(A.7.a)の導出において、 $G(\lambda)$ は設定された評価関数から得られたものであり、必ずしも正の値をとる必要はない。 $G(\lambda)$ が負の値をとるか否かにかかわらず、三刺激値についてのメタメリックブラック条件から、式(A.7.a)における k_X 、 k_Y 、 k_Z の解が得られる。そして、与えられた $G(\lambda)$ に対応するメタメリックブラックを定式化することができる(図A1の例参照)。ここで、 $G(\lambda)$ は参考文献15) 16) における分光スペクトルに相当するものであることから、これらの参考文献では $0 \leq G(\lambda)$ 条件を満たした上で、 $G(\lambda)$ をパラメータとするメタメリックブラック式が(A.7.a)と同様の形式で導かれている。

本論文では、設計意図を表現する一般形式の評価関数 f^* から出発し、 $G(\lambda)$ は必ずしも正の値をとる必要のない関数であることを明らかにした。 R 行列は、分光スペクトル $G(\lambda)$ をファンダメンタル成分とメタメリックブラック成分に分解することを目的としている。これに対して、存在し得る全てのメタメリックブラックを記述することを要請する本論文では、 $G(\lambda)$ はメタメリックブラックのモデル記述パラメータであるとい

う立場に立ち、メタメリックブラックの一般式(A.7.a)が導出された。ここで、 $G(\lambda)$ は分光スペクトルである必要はなく、波長領域での関数一般として定義される。 $G(\lambda)$ が波長領域において正(もしくは0)の値をとる場合に、 $G(\lambda)$ は分光スペクトルに相当する。

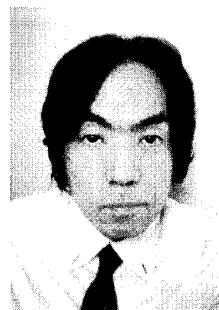


図A1 $G(\lambda)$ が負の値を持つ場合の例.

投稿受付日：2007年5月14日

掲載決定日：2008年3月28日

著者紹介



まつしろう のぶひと
松代 信人

1957年2月27日生

1996年 工学博士(電気通信大学：情報工学)

2006年 学術博士(千葉大学三宅研究室：色彩科学)

現在、千葉大学大学院医学博士課程神経科学・脳科学専攻在学中。米国ロチェスター工科大学Guest Scientist(大田研究室)、沖電気工業株式会社勤務。色彩数理解科学、色彩情報科学、色彩脳科学に興味を持つ。

日本色彩学会、画像電子学会、映像情報メディア学会、電子情報通信学会、情報処理学会、日本生理学会、IS&T各会員。



おおた のぼる
大田 登

1968年富士フイルム足柄研究所入所。1996年千葉大学客員教授。1998年ロチェスター工科大学教授、現在に至る。