

特集 「絵画における視覚表現」

絵画における色彩表現と数学モデル

Color Aspects of Painting Arts Deduced from a Mathematical Model

小林 光夫 Mituo Kobayasi

電気通信大学名誉教授 / K-カラーラボラトリ代表

Professor Emeritus, The University of Electro-Communications,
Representative, K-Color Laboratory.

1. はじめに

人は太古の昔から、精神生活の糧として美を求めてきた。人の視覚に訴える絵画は、人類共通の不動の価値の一つである美の、もっとも直接的でコンパクトな表現媒体であり感受媒体であろう。絵画は、その観賞者にとっては美的感情をもたらす刺激の役を演じ、制作者にとっては精神活動の発現であり結果である。言い換えれば、絵画は、われわれの感情や思考の一種の伝達言語と見ることができる。筆者はこれまで、このような絵画の言語的な機能を探るべく、とくに絵画の色彩表現のもつ意味を、科学的な分析手法を用いて明らかにしてきた[1,2,3,4など]。筆者が考案した分析手法のいくつかと、それにより見えてきた美学・美術史上の知見を、すでに本誌[3,4]で紹介したが、本稿では、研究の基になっている数学的な思考に重きを置き、以前に紹介しえなかった手法をいくつか取り上げる。数学的概念を述べる必要性から、大学初年程度の数学の知識を仮定する。

2. 絵画画像の数学モデル

絵画とは、画布や板などの平面上に、物、姿、思い、考えなどを、線や色彩で描き表した物である。何が描かれているかを無視し、さらに表面の凸凹、艶などを無視し、単純化して考えると、絵画画像は、画面上のほとんどのすべての点に対し、色を一意に対応付けた物と言えよう。ほとんどと言ったのは、たとえば、ある色の領域とそれと違う色の領域が隣接しているときに、隣接部分(境界)には色は存在しないと考えるのが普通だからである。(境界には、それを挟む領域の色の色差が存在する、と考えられる。)また、色のギャップ(第一種の不連続)がある境界を除けば、色は連続的に変化していると考えてよいであろう。

上記の考えを数学的に表せば、絵画画像は、2次元の画面 $A \subset \mathbf{R}^2$ を定義域とし、3次元の色空間 $\mathbf{R}^3$ を値域

とする区分的連続写像

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}^3$$

として定義できる。図1参照。

デジタルカメラやプリンタなどで実用される画像では、画面は有限個の画素(ふつう数百万画素)の格子状の集まりであり、色空間は有限個の色(ふつう数千万色)からなる。そこで、写像の定義域も値域も離散集合にとる考え方がある(これが非常に多い)。しかし筆者は、本来アナログ的である絵画画像を直接考察の対象とするべきだと考え、まずは連続モデルによる概念構成をする。実用画像については、連続に対する離散近似の考え方で対応する。

実際の分析では、色数を減らしたり、画面を格子状に分割したりして、取扱いの簡単化を図ることも多い。色空間を分割し、各区画に入るどの色も同じ一つの色で代表させることを、量子化と呼んでいる。画面を分割し、その区分に入る色を一つの同じ色で代表させることを、モザイク化と呼ぶ。分析の事前処理として、必要に応じて量子化やモザイク化を行う。(量子化やモザイク化も、連続画像に対する離散近似である。)

3. 数学モデルから自然に発想される分析手法

本節では、絵画画像を写像(=関数)と見ることから演繹される分析手法を紹介する。

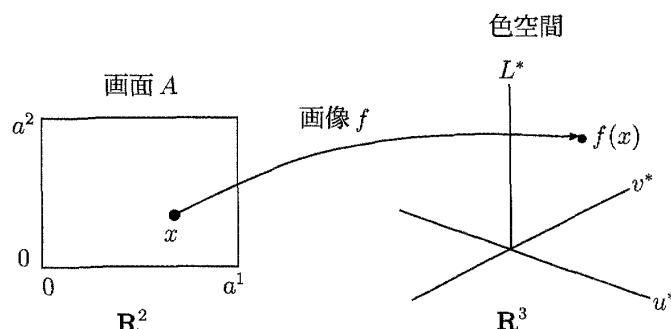


図1. 絵画画像の数学モデル

画面 A の像 $B = f(A)$ は、画像 f のすべての色の集合を表す。これを構成色の色集合と言う。色集合 B の任意の部分集合 V (たとえば草色の集合) を考えると、その逆像 $f^{-1}(V)$ は、 V に属する色をもつ画面上の集合(たとえば草色が存在する画面上の場所)を表す。これを V に属する色の色配置と言う。図2参照。

いろいろな絵を比較するために、画面の面積 $|A|$ を基準にして考えることにし、 $|A| = 1$ とする。(どの絵も等面積に見えるような位置から見ることを想定している。) このとき、色集合 B に属する色 y と、その色配置の面積 $w = |f^{-1}(\{y\})|$ との対 (y, w) を考える。すべての $y \in B$ についての w の和は1 (全面積) となるので、このような色とその面積の対の集合 $\{(y, w) | y \in B\}$ は、(確率分布のような) 分布を表すことになる。これを構成色分布あるいは単に色分布と言う。色集合は、重みをすべて均等にした色分布と考えて良いから、分析においては色分布のみを対象とすれば十分である。以下色分布と色配置についてのみ考察を進める。

色分布は、画像とは独立に考えることができる(たとえば、画像の構成色のみに着目し、色配置は考えない場合)。そこで、画像(写像)の構造から自然に発想されるのは、まず、値域(色空間)における分析(色分布のみに関する分析)である。つぎに、定義域(画面)についての分析であるが、定義域のほとんどの点には色が付随しているので、画面上の点と色との関係についての分析になる。すなわち、画面上の色配置や色変化に関する分析となる。この分類に従って、これまでに考案した色彩分析の手法をつぎに挙げる。

(a) 色空間における色分布の分析

a1 種々の絵画における配色形式と色分布：補色配色、三色配色、多色配色などの従来の配色形式が、色分布にどう反映されるかを、種々の絵画について調べた[1]。似た色使いの絵画は似た色分布をもつことが分かった。

a2 色分布間の距離を用いた絵画の分類、作風の類似

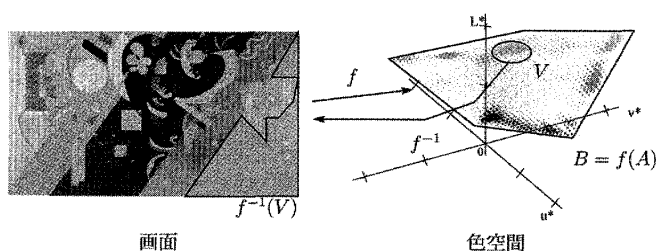


図2. 構成色の色集合と色配置

性：4.1節にのべる[1,2,4].

a3 色空間の分割に基づく色分布の情報量による絵画の分類：色空間を有彩6区分、無彩1区分に分割し、各区分に入る色の重みを確率とみて情報量を計算すると、その大小により色使いの偏りがあるかないかがわかる。形態画家の P. Picasso と色彩画家の H. Matisse を比べたところ、Matisse は Picasso に比べ豊富な色使いをしていることが分かった[4].

a4 色分布のフラクタル次元(情報量次元)による色使いの複雑さの分析：4.2節に述べる[5].

a5 色分布の統計量による配色の分析：色分布の平均と分散共分散から偏差楕円体を作ることができる。この形状と色空間における位置から、コントラストの大小、配色タイプ(明暗配色か色彩配色かなど)が分かる。20作家約200作品について調べたところ、印象によく合う結果が得られた[1,4].

(b) 画面上の色配置の分析

b1 色配置の重心位置と配色のバランス：a3と同様に、色空間をいくつかの区分に分け、各区分に入る色の色配置の重心の位置を調べる。重心が画面中央にあれば色配置がバランスしていると見ることができる。色彩の画家 H. Matisse のいくつかの絵画について、補色対になる色区分に関して、色のバランスが認められた[3].

b2 色配置の統計量による画面構成の分析—バランス、対称性：色配置を画面上の二値分布とみて、平均、分散共分散から偏差楕円を作り、その形状から色配置の対称性について調べた。20作家約200作品について調べたところ、P. Klee はとくに対称性が良いことが分かった[1,4].

(c) 画面上の色変化の分析

c1 隣接色の色差による分析：色差は明度差、彩度差、色相差などの成分分解が可能である。画面を格子状に分割し、各区分画に対し隣接区分画との色差を成分ごとに計量する。これにより絵画が主としてどの種の色変化を使って描かれているかが分かる。明暗技法の大家である Caravaggio と Rembrandt の作品各20点あまりを比べたところ、「劇的な」明暗表現とされる Caravaggio の絵画では、明度変化、彩度変化いずれも、「静謐な」明暗表現とされる Rembrandt の絵画より大きいことが分かった[2,3,4].

c2 画像の2次元基底関数展開による画面上の色変化の粗密の分析：絵画画像の画面上の色変化には、構図などによる大まかな変化と、タッチなどによる細

かな色変化がある。画面上の空間的波長による変化を調べるには、三角関数を基底関数とするFourier展開の利用を思いつくが、絵画のように色の急激な変化が多用される場合には、Haar基底というより単純な基底を用いたウェーブレット展開が適切である。この研究では、2次元のHaar基底による展開係数を用い、色変化の粗密が有効に検出されることを示した[2]。

c3 局所色差ベクトルによる画面上の色変化の強度と方向の分析：4.3節に述べる。

4. 三つの分析事例

4.1 色分布間の距離による色使いの類似性の分析

似た色使いの絵は似た色分布をもつ(前節a1)。それでは色分布どうしがどの程度似ているかは、どう測ればよいであろうか。

たとえば、図3の日本国旗Jとフランス国旗Fの違いを測ってみよう。Jは赤14%、白86%からなり、Fは青33%、赤33%、白34%からなるとする。この二つの色分布間の違いは、次のように計算することができるであろう。まずJとFに共通の赤14%分は違い0、つぎにJとFに共通の白34%分も違い0、残りのJの白の部分86-34=52%は、Fの残りの青の部分33%および赤の部分33-14=19%と比較せざるを得ず、青と比較する部分は青と白の色差を掛けて、違いは $0.33 \times 96.9 = 32.0$ となり、赤と比較する部分は赤と白の色差を掛けて、違いは $0.19 \times 151.4 = 28.8$ となる。したがって、JとF全体の違いは、これらの和 $d(J, F) = 28.8 + 32.0 = 60.8$ で与えられる。

同様に、ノルウェー国旗Nが赤61%、紺21%、白18%からなるとして、FとNの違い $d(F, N)$ 、およびNとJの違い $d(N, J)$ を計算すると、図3右に示したよう

になる。

この考えを一般化すると、次のようになる。簡単のため、色空間を適当に量子化し、色分布は有限個の色とその重みの組で表されているものとする。

二つの色分布を

$$a = \{(x_i, u_i) \mid i=1, \dots, M\},$$

$$b = \{(y_j, v_j) \mid j=1, \dots, N\}$$

で表す。ここに、 M, N はそれぞれの色数、 $x_i, y_j \in \mathbf{R}^3$ は色、 $u_i, v_j > 0$ は重みであり、 $\sum_i u_i = 1, \sum_j v_j = 1$ を満たす。このとき、色分布 a と b の違い $d(a, b)$ は、次のように定義できる。色 x_i と y_j の色差を d_{ij} とし、 w_{ij} を、 $\sum_j w_{ij} = u_i, \sum_i w_{ij} = v_j$ を満たす任意の正数(重み)とすれば、

$$d(a, b) = \min \sum_i \sum_j w_{ij} d_{ij}.$$

ただし、 $\min$ は w_{ij} についてとる。 $d(a, b)$ は距離の公理を満たすことに注意する。証明は文献[1]を参照されたい。上の定義は、 $d(a, b)$ がヒッチコック型の輸送問題の解になっていることを述べている。この問題には効率の良い解法があることが知られている。

さて、ここで定義した距離を用いると、たとえば絵画をその作風によって分類することができる。その例はすでに文献[1,2,4]に示した。ここでは、この距離に基づいて、色分布の集合間の類似度および集合内の類似度を図4に示したように定義し、作品群間の類似性を調べてみる。10人の作家 Caravaggio(C), Rembrandt(Rm), C. Monet(Mo), M. Utrillo(Ut), O. Redon(R), F. Marc(Ma), R. Dufy(D), P. Klee(K), 梅原龍三郎(Um), 木村忠太(Ki)の各作品群(各群20~30作品からなる)についての分析結果を、つぎに示す。図5は、類似度の最小値をとる作品群間を実線で、最小から2番目の値をとる作品群間を点線で結んだ類似関係図である。添えた数値は類似度である。図6は、同じ類似度を用いて、階層的クラスタ化法(AV法)に

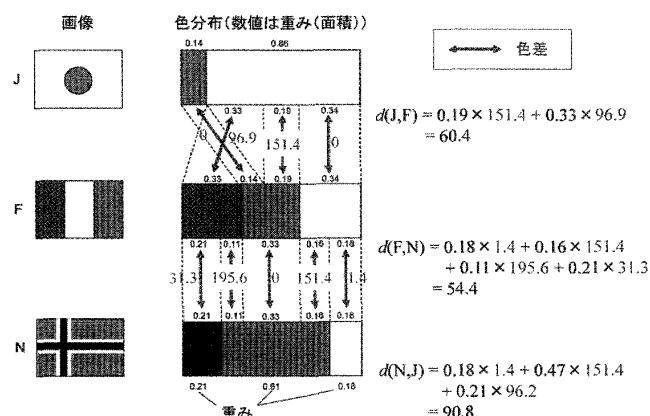
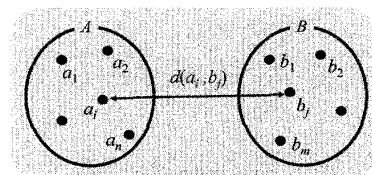


図3. 色分布間の違いの測り方

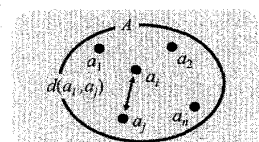
集合 A, B 間の類似度

$$s_{A,B} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(a_i, b_j).$$



集合 A 内の類似度

$$s_{A,A} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d(a_i, a_j).$$



$a_1, \dots, a_n$: 集合 A の色分布, $b_1, \dots, b_m$: 集合 B の色分布.

図4. 色分布の集合間の類似度と、集合内の類似度の図

よる作品群の分類を示す樹形図である。どちらの結果も、作風が似ている二つのグループ、C-Rm-UmおよびMo-Ut-Rがあること、およびその他の作品群は、他のいずれの作品群とも画風が異なることを示した。グループC-Rm-Umは明暗変化の大きい画風を、グループMo-Ut-Rは色彩変化の大きい画風を表していることが、興味深い。

4.2 色分布のフラクタル次元による色使いの複雑さの分析

図7は、W. Kandinskyの作品(a)とC. Marevičの作品(b)のそれぞれの色分布である。作品(a)は、色数も数えられないほど多く構図も複雑である。作品(b)は、背景の白を入れて7色からなるシンプルな絵である。絵画における色使いの複雑さは、その色分布にも表れている。この色分布の複雑さを計量してみよう。

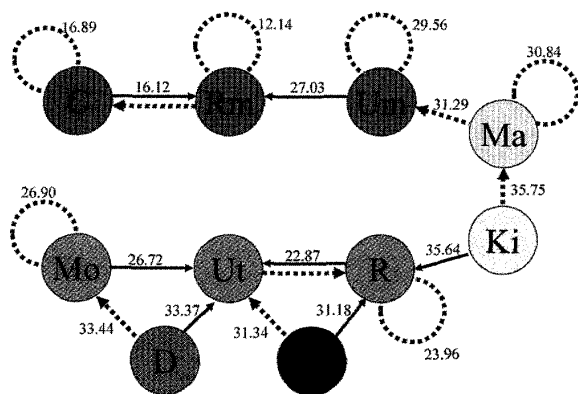


図5. 作品群間の関係(最小類似度間: 実線, 最小から2番目の類似度間: 点線)

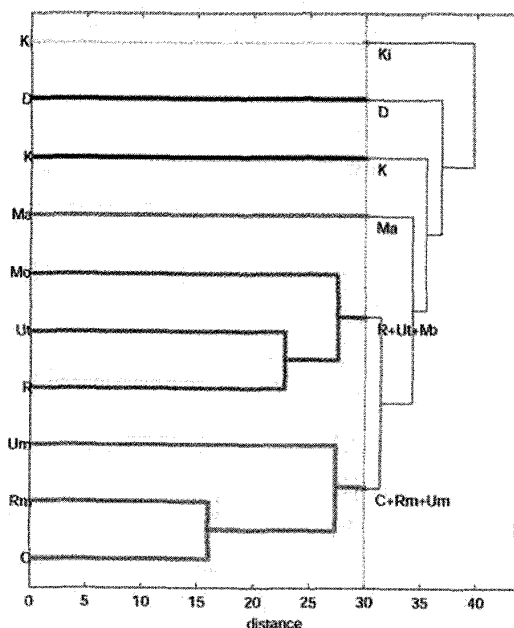


図6. 作品群間の関係(階層的クラスタ化法による樹形図)

均等色空間を一辺 q の立法格子に分割し色集合の量子化を行う。格子の各区画(小立方体)に入る色の重みを確率とみなし、情報量 H を計算する。作品(a)と(b)について、 q を変えながら情報量を計算したところ、図8のグラフのようになった。グラフの横軸(対数目盛)は量子化の尺度 q 、縦軸は情報量 H である。これから二つのことが分かる。一つは、 q が小さくなる(分割が細くなる)と情報量は $\log q$ に対し直線的に増えることである。もう一つは、 q が小さくなるにつれての情報量の増え方が、色使いの複雑な絵の方が急激な(傾きが大きい)ことである。この第二の性質で、絵の色使いの複雑さを計量することができる。

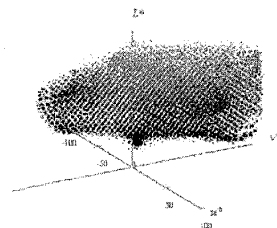
情報量 H と量子化の尺度 q の関係が、 α 、 β を定数として、

$$H = -\alpha \log q + \beta$$

と書けると、 α は $\log q$ に対する H のグラフの傾きを表し、情報量次元と呼ばれる(フラクタル次元の一種)。情報量次元 α は、色空間を細かく分割していくときの、情報量の増え方を表しており、 α が大きいほど、色分布が色空間を一様に充填していく傾向がある。そこで、



(a) W.Kandinsky: *Komposition VII*, 1913.



(b) C.Marevič: *Suprematism. 50*, 1915.

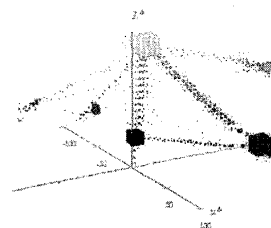


図7. 色使いの複雑な絵(a)と簡単な絵(b), およびその色分布

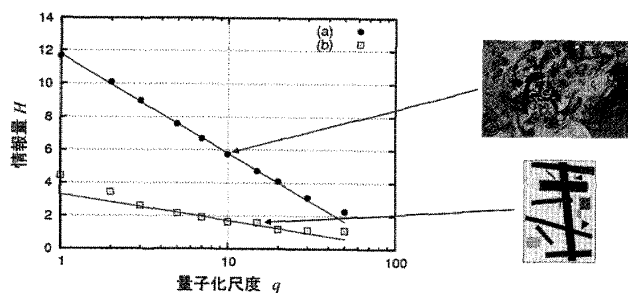


図8. 量子化の尺度 q と情報量 H の関係

α が大きいほど色使いが複雑だと見るわけである。

図9に示すのは、19世紀フランス絵画の100作品について、情報量次元を計算し、作品の制作年順にプロットしたグラフである。プロット点の記号は、様式ごとに同じにしてある。興味深いことに、第一回印象派展の開かれた1874年を境に、情報量次元(色使いの複雑さ)が大きくなっていることが分かる。さらに、様式ごとに作品の情報量次元の平均、最大、最小をプロットしたのが、図10である。この図から、印象主義以前は複雑さが少なく、印象主義(Impressionism, Monet, Renoirら)、続印象主義(Post-impressionism, Cezanne, Goghら)、新印象主義(Neo-impressionism, Seuratら)、総合主義(Synthetism, Gauguinら)の4様式で複雑さが増し、これら4様式と同時期であっても自然主義(Naturalism, Cormontら)、象徴主義(Symbolism, Redonら)、ナビ派(The Nabis, Bonnardら)では若干複雑さが減る。絵画様式の変遷の一面が、このように定量的な指標で述べられることは興味深い。

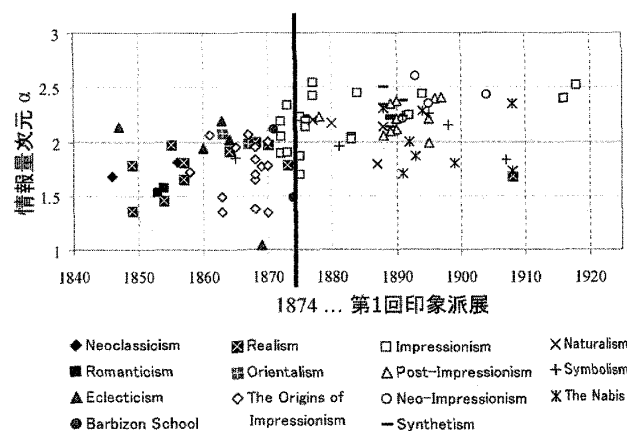


図9. 19世紀フランス絵画における作品制作年と情報量次元(プロットの記号は様式ごとに同じ)

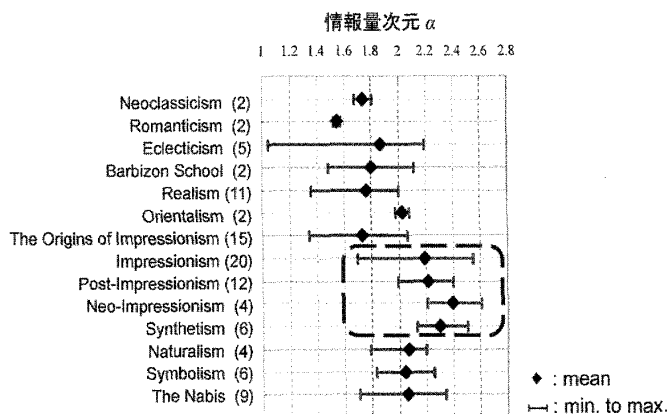


図10. 19世紀フランス絵画における各様式に対する情報量次元の最大、最小、平均

4.3 局所色差ベクトルによる画面上の色変化の強度と方向の分析

前節c1では、画面を正方格子状に分割し、小区画ごとに隣接色との色差を計量し色変化の分析に用いたが、小区画内をさらに縦あるいは横に2分し、その上下、あるいは左右の小区分内における平均色の差を考えることができる(図11左を参照)。つまり、小区画内のタテ色差、ヨコ色差である。小区画内の色変化はこれらの色差に反映されるであろう。縦方向の色変化が急激であればタテ色差が大きく、横方向の色変化が急激であればヨコ色差が大きく、斜め方向の色変化が急激であれば、両色差がともに大きくなるであろう。また、色変化が緩慢ならば、これらの色差は小さい値を取るであろう。そこで、画像 f の一つの小区画におけるタテ色差を $\Delta^V f$ 、ヨコ色差を $\Delta^H f$ とすると、これらから局所色差ベクトル

$$\Delta f = (\Delta^H f, \Delta^V f)$$

を作り、このベクトルの大きさ r と方向 θ を

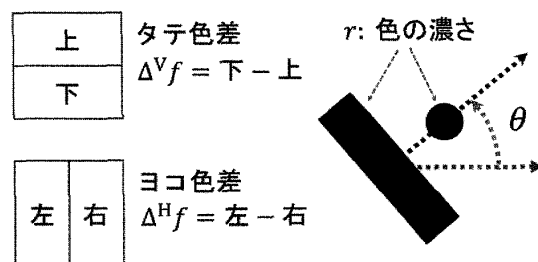
$$\Delta^H f = r \cos \theta,$$

$$\Delta^V f = r \sin \theta$$

を満たすように定めれば、 r は色変化の強度を、 θ は色変化の方向を表す。順序対 (r, θ) は、局所色差ベクトル Δf の極座標表示である。

小区画ごとに、局所色差ベクトルを表示することを考えよう。局所色差ベクトルを、図11右のように、棒(細長い矩形)に小円を添えた記号で表す。棒に対する小円の方向が色変化の方向 θ であり、棒と小円の色の濃さが色変化の強度 r を表す(r が大きいほど色が濃い)。

図12は、Matisseの切り絵“Les acanthes(アカンサス)”である。この絵をサンプルに、局所色差の強度と方向が上手く検出できるか、調べてみよう。画面の長辺を64等分して画面を正方格子状に分割し、画像の明度(L^*)の局所的変化を色差ベクトルで表した「明度差



$$\text{局所色差ベクトル } \Delta f = (\Delta^H f, \Delta^V f)$$

図11. 局所色差ベクトルとその記号表示

画像」を、図13に示す。図であるアカンサスの葉と白い地との境界で、強い色差が生じていることが確認できる。さらに図14に示した拡大図から、色変化の方向が境界にほぼ直交していることが確認される。

ところで、前節c2でも述べたように、色変化の粗密を調べるためには、画像(=写像=関数)の基底関数展



図12. H. Matisseの切り絵“Les acanthes”

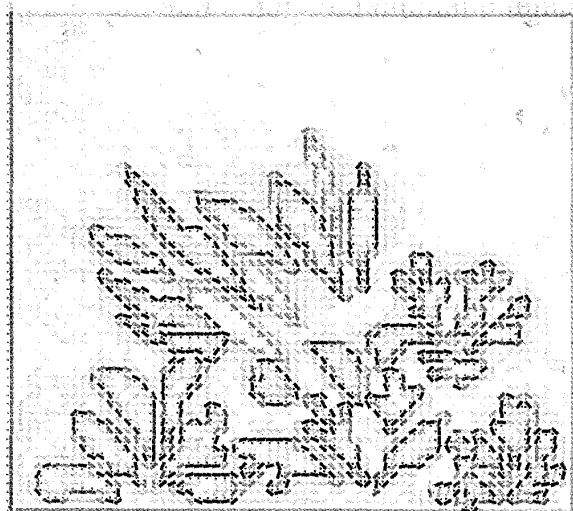


図13. 図12の画像の明度差画像



図14. 図13の右下部分の拡大図

開が有用であった。その際、2次元の基底を用いるのではなく、1次元の基底によるウェーブレット展開を、画面の横方向および縦方向に独立に適用すれば、横方向の展開係数と縦方向の展開係数の組で定義される展開係数のベクトルを作ることができる。じつは、Haar基底を用いた1次元ウェーブレット展開の展開係数ベクトルは、上述の局所色差ベクトルと定数倍を除いて一致することが分かっている[6]。したがって、本節で紹介した方法は、前節c1およびc2の両手法を含んでおり、幅広い応用が考えられる。

5. おわりに

数学モデルから演繹される、画像の色彩分析手法を紹介した。分析結果の意味解釈は、紙幅の都合で残念ながらほとんど省略したが、人の印象や美学・美術史上の知見とよく合う結果を得ている。

4.3節に紹介した分析は緒に就いたばかりであり、構図の分析やマチエールの分析への応用など、今後の発展が期待される。

数学的思考は、美の表現・感受と同じく、万人に共通の脳内活動であろう。それゆえ、数理的手法による分析結果が、人の印象に違わない結果を与えるとしても不思議はないと思われる。

なお、本研究の一部は、科学研究費補助金基盤(C)、課題番号21500160の助成を得て行った。

参考文献

- [1] 小林光夫：絵画における色彩美の数理的分析の研究，東京大学大学院工学系研究科，1999.
- [2] 小林光夫：絵画の色彩美の数理的分析に向けて，電気通信大学紀要，19巻，1・2合併号，pp.57-63(2006).
- [3] 小林光夫：絵画の色彩美と数理的分析の基礎，日本色彩学会誌，Vol.31, No.1, pp.34-41(2007).
- [4] 小林光夫：絵画の色彩表現とその数理的分析手法，日本色彩学会誌，Vol.34, No.1, pp.73-78 (2010).
- [5] M.Kobayasi, Y.Yoshiki: An Application of Information Theory to the Measurement of Complexity of Color Combination in Paintings, Proceedings of AIC2008, Stockholm, 2008.
- [6] 鈴木卓治，小林光夫：画像の局所的な色変化の特徴を検出するためのHaarウェーブレット変換の検討，日本色彩学会誌，Vol.35, suppl., pp.30-31(2011).