

斜面上の Stokes 波の一理論

A Stokes Wave Theory Applied to Waves
on a Slope石田 啓*・山口 登*
HAJIME ISHIDA NOBORU YAMAGUCHI

Abstract

From the view point of the disaster prevention on a beach, it is very important to clarify the dynamics of wave deformations and successive wave breakings because this phenomena are closely related with the occurrence of longshore currents and the generation of breaking wave forces.

This paper theoretically deals with the wave field on a slope including the breaker zone by means of the coordinate transformation from Cartesian coordinate to the elliptic. As the result, a tentative solution of the second order approximation about the wave steepness can be obtained as well as Stokes' wave theory.

The validity of this solution can be ascertained in some extent by comparing with the experimental data obtained by Goda et al. and Iwagaki et al..

1. 緒 論

浅海域における砕波現象を考究することは、海岸災害の軽減・防止のために極めて重要である。特に、海岸侵食や漂砂の原因となる沿岸流は、砕波時の水粒子速度に大きく依存しており、また、防波堤や離岸堤などの海岸構造物に作用する波力や波圧は、砕波時において、最大になると考えられる。このため、従来から砕波に至る斜面上の波の変形とその内部機構について、多くの研究が行われて来ている。

斜面上の波の波高変化については、エネルギーフラックス法が有効であり、Mehaute ら¹⁾ はストークス波理論の適用範囲内の波高変化を、また、岩垣ら²⁾ は主にハイパボリック波理論の適用範囲内の波高変化を検討している。

斜面上の波の波形変化については、非線形長波の方程式を解いた岩垣ら³⁾ の研究や K-d V 方程式を用い

た安田ら⁴⁾ の研究、あるいは、著者ら⁵⁾ による特性曲線法を用いた研究などがあるが、いずれも砕波時の波形が計算できるまでには至っていない。

砕波時の波形は、通常、崩れ波 (spilling breaker) 巻き波 (plunging breaker) および砕け寄せ波 (surging breaker) の 3 形態に分類されるが、Iversen⁶⁾ や速水⁷⁾ は砕波に関する実験的研究を行ない、砕波形態が沖波波形勾配と底面勾配によって決定されることを示しており、また、Galvin⁸⁾ は surging breaker をさらに collapsing breaker と surging breaker の 2 つに分割することを提案している。なお、Michael ら⁹⁾ は Biesel¹⁰⁾ の求めた斜面上の波の速度ポテンシャルを用い、ラグランジュ的方法で砕波時の波形の数値計算を行なっているが、この方法は、波の場をオイラー的に表現できない所に欠点がある。

砕波波高や砕波水深などをまとめたものとしては、合田¹¹⁾ の研究があるが、合田は既往の実験結果に対し、水路側壁及び底面の摩擦による波の減衰効果を考慮した補正を行ない、さらに、Yamada ら¹²⁾ と岩垣ら²⁾ の理論式を併用することにより、新しい砕波指標を提示している。

* 金沢大学工学部

Faculty of Engineering, Kanazawa Univ.

砕波時の水粒子速度については、岩垣ら¹³⁾の実験値と各種の波動理論解とを比較した研究が重要であるが、砕波時の波の内部機構を表わす理論解については、まだ十分に検討されていないと思われる。

以上より、今後、斜面上で砕波する波の波形変化とその内部機構を理論的に表現することが極めて重要であると言えるが、本研究では、その第一段階として、砕波に至る斜面上の波を対象とし、その理論的近似解を求めることとする。

2. 理論

2.1 基礎方程式

水平座標 x ，鉛直座標 y および時間 t を、沖波の波数 k_0 および角周波数 σ を用いて、

$$x' = k_0 x, \quad y' = k_0 y, \quad t' = \sigma t \quad (1)$$

とし、速度ポテンシャル ϕ を、

$$\phi' = (k_0 / \sigma) \phi \quad (2)$$

と無次元化する。座標系は、図-1 に示すように波の

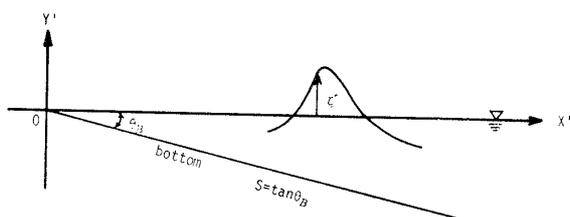


図-1 座標系

進行方向と逆方向に x' 軸を、水面から鉛直上向きに y' 軸をとる。この (x', y') 座標と楕円筒座標 (ξ, η) との対応を図-2 に示すが、両者の関係は、

$$\begin{aligned} x' &= \cosh \xi \cos \eta \\ y' &= \sinh \xi \sin \eta \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。

楕円筒座標によるラプラスの式は、デカルト座標の場合と全く同じ形になり、

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = 0 \quad (4)$$

となる。

底面勾配は、 $\tan \theta_B = -y' / x' = -\tanh \xi \cdot \tan \eta$ であるが、 $\tanh \xi \approx 1$ となるような ξ の領域においては、 $\eta \approx -\theta_B$ と見なすことができる。したがって、底面における条件式は、

$$\phi'_{\eta} = 0; \quad \eta \approx -\theta_B \quad (5)$$

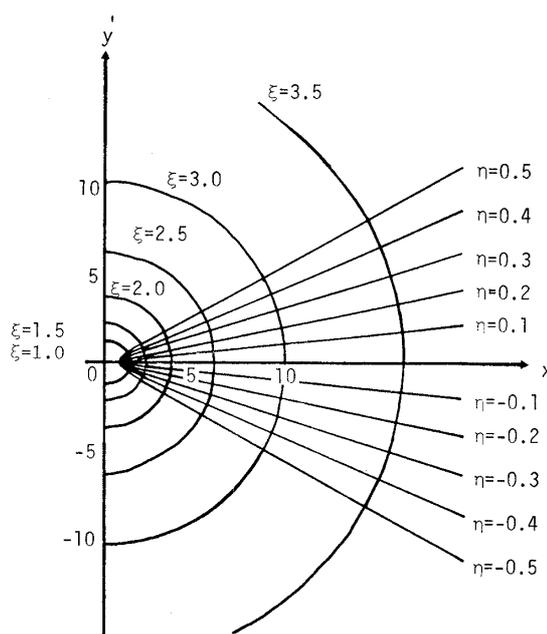


図-2 楕円筒座標

で与えられる。水面における力学的および運動学的条件式は、水面を $y' = \zeta'(x', t')$ と表わすと、

$$\phi'_{t'} + (\phi_{\xi}^2 + \phi_{\eta}^2) / 2R + \zeta' = 0 \quad (6)$$

および

$$\begin{aligned} \zeta'_{t'} + \{ \sin^2 \xi \cos^2 \eta \phi_{\xi} \zeta'_{\xi} + \cos^2 \xi \sin^2 \eta \phi_{\eta} \zeta'_{\eta} \\ - \cos \xi \sin \xi \cos \eta \sin \eta (\phi_{\eta} \zeta'_{\xi} + \phi_{\xi} \zeta'_{\eta}) \} / R^2 \\ - (\cos \xi \sin \eta \phi_{\xi} + \sin \xi \cos \eta \phi_{\eta}) / R = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここに、 $R = \sinh^2 \xi + \sin^2 \eta$ であるが、水面における η の値を $\eta \approx 0$ と近似すると、 $R = \sinh^2 \xi$ となり、したがって、式 (7) は、

$$\zeta'_{t'} + \phi_{\xi} \zeta'_{\xi} / \sinh^2 \xi - \phi'_{\eta} / \sinh \xi = 0 \quad (8)$$

となる。

2.2 摂動法による近似解

定数 $\epsilon \ll 1$ なる適当な ϵ により、速度ポテンシャル ϕ' および水面形 ζ' を、

$$\phi' = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots \quad (9)$$

$$\zeta' = \epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2 + \dots \quad (10)$$

のようにべき級数展開する。式 (4)、式 (5)、式 (6) および式 (8) に式 (9) および式 (10) を代入し、 ϵ の 1 次オーダーの項に関する条件式を求めると、

$$\phi'_{1\xi\xi} + \phi'_{1\eta\eta} = 0,$$

$$\phi'_{1\eta} = 0; \quad \eta \approx -\theta_B,$$

$$\begin{aligned} \zeta'_1 + \phi'_{1t'} &= 0; \quad y' = \varepsilon \zeta'_1, \\ \zeta'_{1t'} - \phi'_{1\eta} / \sinh \xi &= 0; \quad \eta \approx 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となり, ε の 2 次オーダーの項に関する条件式を求めると,

$$\begin{aligned} \phi'_{2\varepsilon\varepsilon} + \phi'_{2\eta\eta} &= 0, \\ \phi'_{2\eta} &= 0; \quad \eta \approx -\theta_B, \\ \zeta'_2 + (\phi'_{1\xi^2} + \phi'_{1\eta^2}) / 2R + \phi'_{2t'} &= 0; \\ y' &= \varepsilon \zeta'_1 + \varepsilon^2 \zeta'_2, \\ \zeta'_{2t'} + \phi'_{1\xi} \zeta'_{1\xi} / \sinh^2 \xi - \phi'_{2\eta} / \sinh \xi &= 0; \quad \eta \approx 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

まず, ε の 1 次オーダーの解を求める。式 (11) を満足する ϕ'_1 の形は, 時間項を正弦振動の解に仮定すると,

$$\phi'_1 = A_1 \cosh m(\eta + \theta_B) \sin(m\xi + t') \quad (13)$$

となる。ここに, A_1 および m は定数である。また, 水面形 ζ'_1 は式 (11) および式 (13) より,

$$\zeta'_1 = -A_1 \cosh m(\eta^* + \theta_B) \cos(m\xi + t') \quad (14)$$

となる。ここに, η^* は水面を表わす η 座標であり, $\xi \rightarrow \infty$ では, $\eta^* \rightarrow 0$ となる。定数 A_1 は, 沖波波高と接続することにより定めるが, 沖波の振幅 a_0 に沖波波数 k_0 を乗じた無次元振幅 a'_0 を ε とすれば, すなわち, $\varepsilon = a'_0 = k_0 a_0$ の時,

$$A_1 = 1 / \cosh m \theta_B \quad (15)$$

となる。したがって, 第 1 次近似解は, 式 (13), 式 (14) および式 (15) より,

$$\begin{aligned} \phi'_{1st} &= a'_0 \{ \cosh m(\eta + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \\ &\quad \cdot \sin(m\xi + t'), \\ \zeta'_{1st} &= \\ &= -a'_0 \{ \cosh m(\eta^* + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \\ &\quad \cdot \cos(m\xi + t') \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここに, m は, 式 (11) の水面における条件式より得られる次式

$$\phi'_{1t't'} + \phi'_{1\eta} / \sinh \xi = 0; \quad \eta = \eta^* \approx 0 \quad (17)$$

から決定されるパラメーターである。

次に, ε の 2 次オーダーの解を求める。式 (12) を満足する ϕ'_2 の形を, ϕ'_1 と同様に,

$$\phi'_2 = A_2 \cosh 2m(\eta + \theta_B) \sin 2(m\xi + t') \quad (18)$$

と仮定すると, 水面形 ζ'_2 は式 (12), 式 (13), 式 (15) および (18) より,

$$\begin{aligned} \zeta'_2 &= -2A_2 \cosh 2m(\eta^* + \theta_B) \cos \\ &\quad 2(m\xi + t') - (m / \cosh m\theta_B)^2 \\ &\quad \cos 2(m\xi + t') / 4R \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここに, A_2 は定数であり, ストークス波の第 2 次近似解の沖波波高と接続することにより,

$$A_2 = -1 / (4 \cosh 2m\theta_B) \quad (20)$$

となる。したがって, 速度ポテンシャルの第 2 次近似解 ϕ'_{2nd} は, 式 (13) および式 (18) を式 (9) に代入することにより,

$$\begin{aligned} \phi'_{2nd} &= -a'_0 \{ \cosh m(\eta + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \\ &\quad \sin(m\xi + t') - (a'_0 / 2)^2 \{ \cosh 2m \\ &\quad (\eta + \theta_B) / \cosh 2m\theta_B \} \\ &\quad \sin 2(m\xi + t') \end{aligned} \quad (21)$$

となり, 水面形の第 2 次近似解 ζ'_{2nd} は, 式 (14) および式 (19) を式 (10) に代入することにより,

$$\begin{aligned} \zeta'_{2nd} &= a'_0 \{ \cosh m(\eta^* + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \\ &\quad \cos(m\xi + t') + (a'_0 / 2)^2 \{ 2 \cosh \\ &\quad 2m(\eta^* + \theta_B) / \cosh 2m\theta_B \\ &\quad - (m / \cosh m\theta_B)^2 / R \} \\ &\quad \sin 2(m\xi + t') \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここに, 第 2 次近似解における a'_0 は, 沖波波高 H_0 および沖波波長 L_0 を用いて,

$$a'_0 = \pi (H_0 / L_0) \{ 1 - (3\pi^2 / 8)(H_0 / L_0)^2 \} \quad (23)$$

で与えられる。 m は式 (17) から決定されるパラメーターである。また, 水面における η 座標である η^* は, 水面 y' が

$$\begin{aligned} y' &= \zeta'(x', t') = \zeta'(\xi, \eta, t') \\ &= \zeta'(\xi, \eta^*(\xi), t') = \sinh \xi \sin \eta^* \end{aligned} \quad (24)$$

で与えられることから,

$$\eta^* = \sin^{-1}(\zeta' / \sinh \xi) \quad (25)$$

のように ζ' を用いて表わすことができる。したがって式 (25) の η^* を式 (22) に代入すると, 水面形 ζ' が, $\zeta' = f(\zeta')$ の形で与えられることがわかるが, 実際には ζ' を求めるためには, 式 (22) を $\zeta'_{n+1} = f(\zeta'_n)$ の

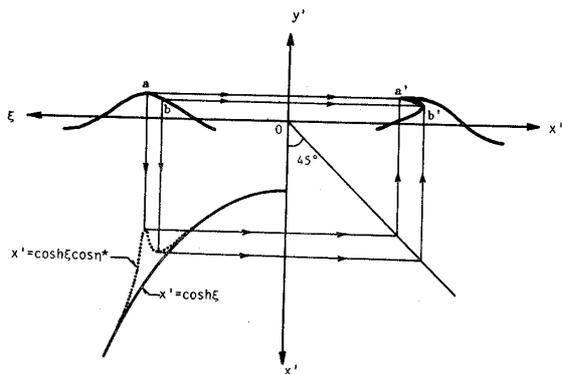


図-3 座標変換による波形の変換

形に変え、右辺に用いた ξ_n と計算された左辺の ξ_{n+1} とが等しくなるまで、計算を繰り返す必要がある。

図-3は、 (ξ, y') 座標で表わした波を (x', y') 座標表示に変換する状況を模式的に示したものである。すなわち、 $y'-\xi$ 平面内の波形が式(22)の波形であり、これを点線で示した式(24)を通して、 $x'-y'$ 平面へ写像したものが、実際の斜面上の波を示す。特に、 $\xi-y'$ 平面での波形は正弦波であるが、 a 点は a' 点に、 b 点は b' 点に対応するため、 $x'-y'$ 平面では、波の前傾や折れ曲りを表わすことが可能となる。

3. 計算結果と考察

3.1 収束計算回数 n の相違による波形の相違

2.2において収束計算の必要性を述べたが、その回数 n の変化に伴い波形が変化する。図-4は、底面勾配が $S = \tan \theta_B = 0.1$ で沖波波形勾配が $H_0/L_0 = 0.1$ の場合に、収束計算回数 n の変化に伴う波形の変化を示したものである。 $n=1$ の場合は、式(22)の右辺

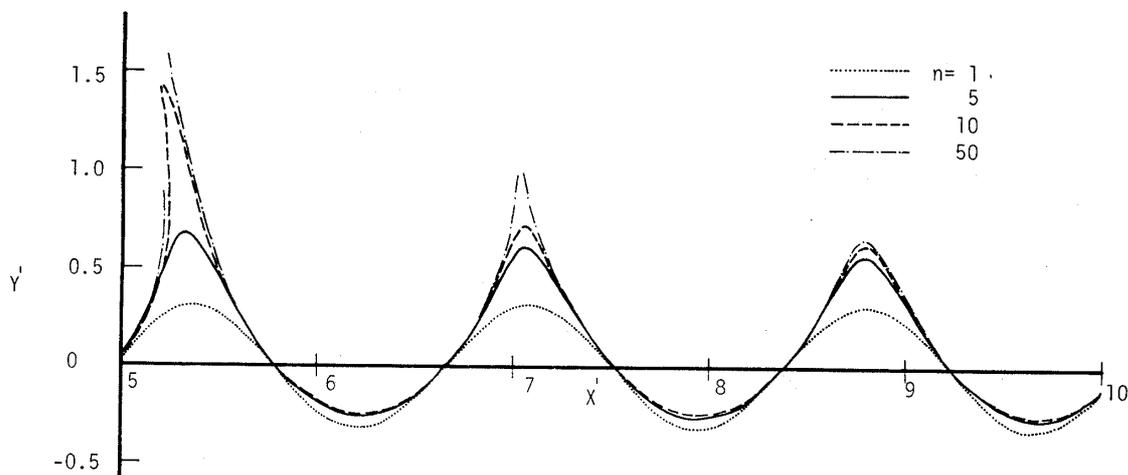


図-4 収束計算回数 n の相違による波形の相違

の η^* を 0 とおくため、波形は正弦波に近いものとなる。 $n=10$ あるいは 50 の場合は、 x' の減少に伴い、すなわち浅くなるにつれ、峰は徐々に大きな値になり、ある x' 以下では、波峰は発散する。すなわち、安定した波峰が存在し得えなくなる。これは、波峰の砕波を示唆するものと考えられる。

3.2 波形変化と砕波位置

本計算方法を用い、まず深海域における水面波形の時間変化を検討する。図-5は、 $h/L_0 = 0.139$ の場合について、 $H_0/L_0 = 0.017, 0.05$ および 0.08 の時の時間波形を計算した結果である。図より、沖波波形勾配が小さい時は正弦波にかなり近く、沖波波形勾配が大きくなるにつれて波峰が先鋭化し、谷が偏平化することがわかる。

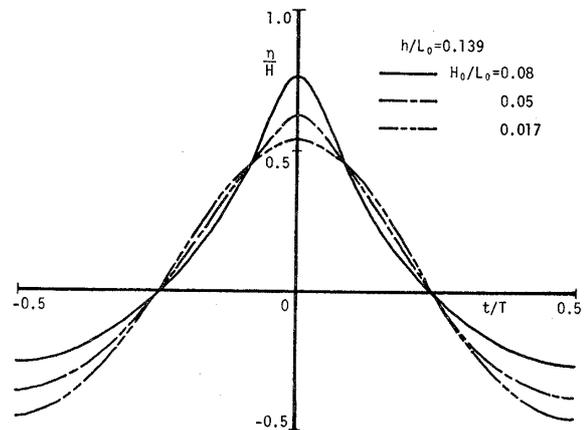
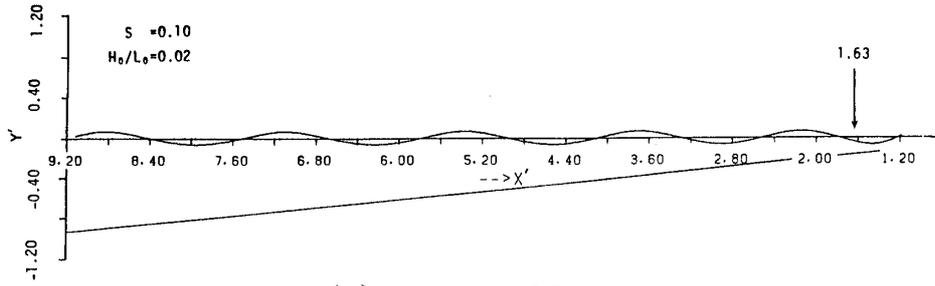
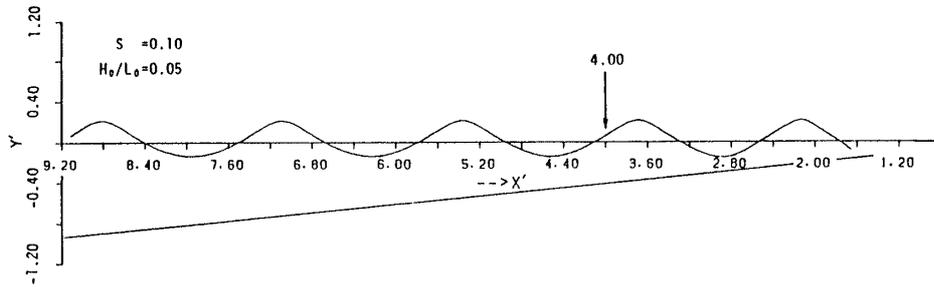


図-5 波形勾配の相違による時間波形の相違

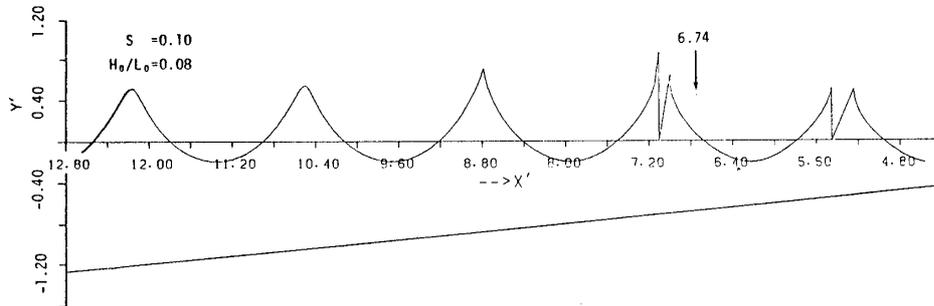
次に、斜面上の波の特性、特に砕波形態および砕波位置について検討する。砕波形態は、沖波波形勾配 H_0/L_0 および底面勾配 S により、図-6に示すよう



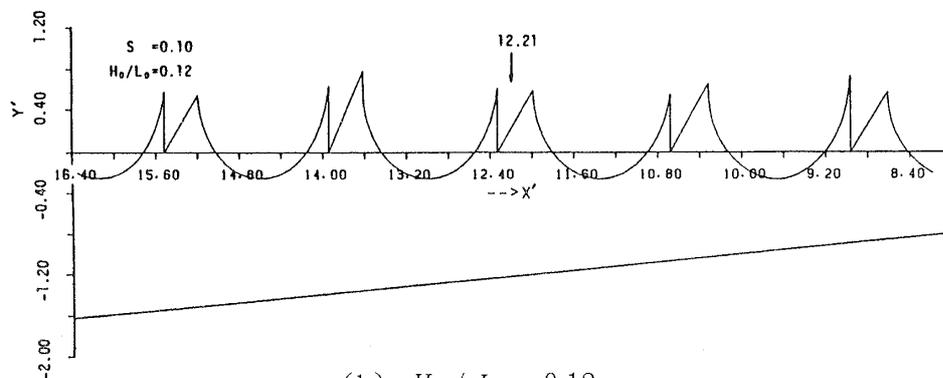
(a) $H_0 / L_0 = 0.02$



(b) $H_0 / L_0 = 0.05$

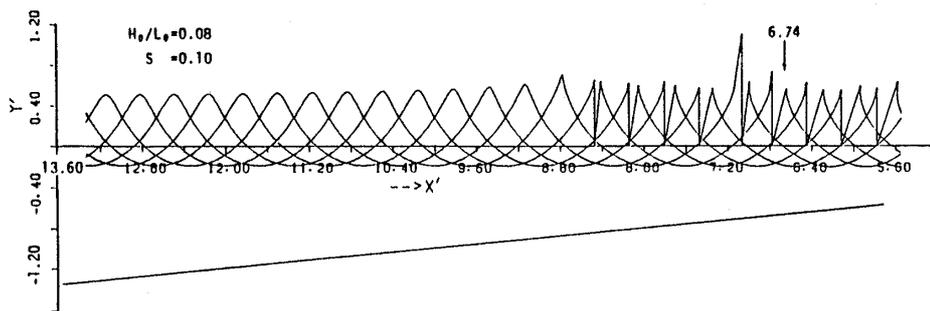


(c) $H_0 / L_0 = 0.08$

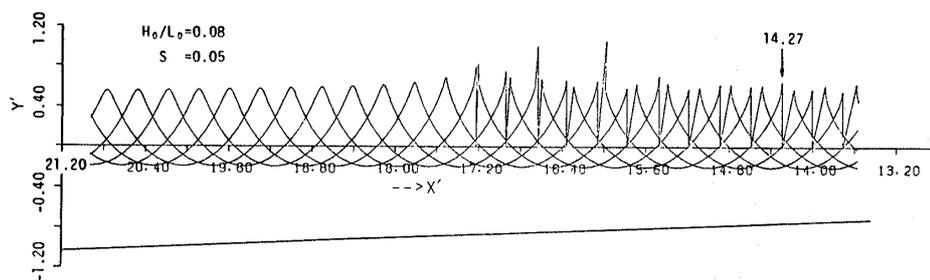


(b) $H_0 / L_0 = 0.12$

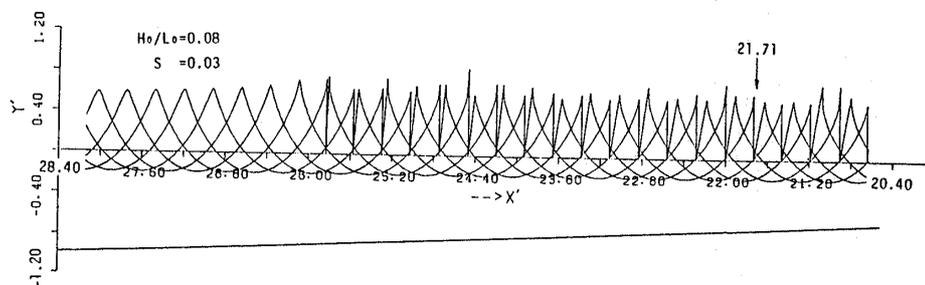
図一七 沖波波形勾配の変化による斜面上の波の変化



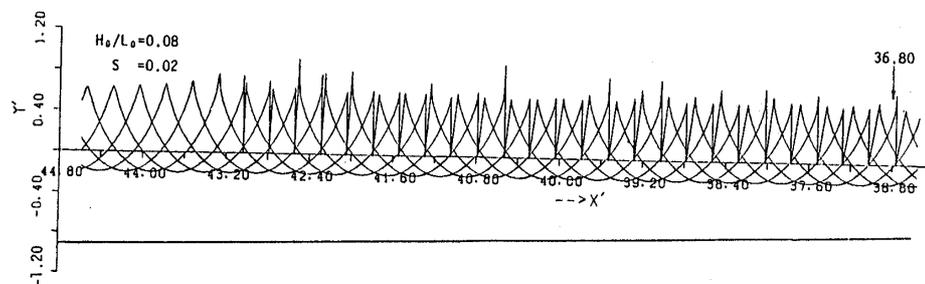
(a) $S = 0.10$



(b) $S = 0.05$



(c) $S = 0.03$



(d) $S = 0.02$

図-8 水底勾配の変化による斜面上の波の時間変化

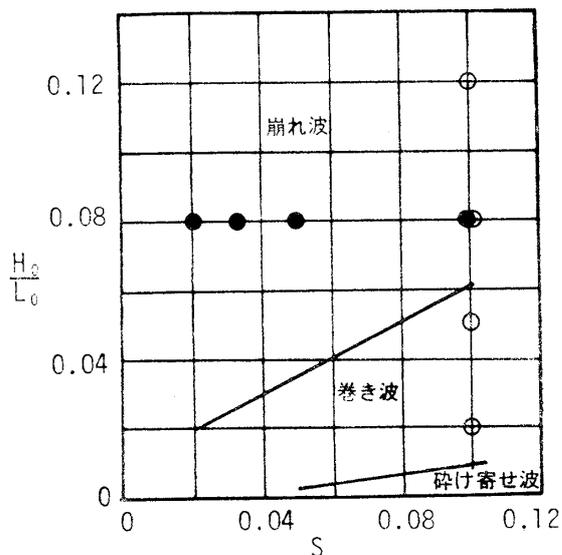


図-6 砕波形態区分 (Iversen⁶⁾より)

に、通常崩れ波、巻き波および砕け寄せ波の三種類に分類される。図中の白丸は、図-7(a)~(d)に用いた波を、黒丸は図-8(a)~(d)に用いた波を示している。すなわち、図-7(a)~(d)には、底面勾配 $S = \tan \theta_B = 0.1$ とし、沖波波形勾配 H_0/L_0 を順次変えた時の波形変化を示す。これらの図は、X-Yプロッターを用いて自動作図したものであるが、水面変動の値が極めて大きくなる時、すなわち $\zeta'/\sinh \xi > 1$ あるいは $y' = \zeta \geq 2$ の時には、プロッターペンは $y' = 0$ に戻るように指示されている。前者の条件は、式(25)の $\eta^* = \sin^{-1}(\zeta'/\sinh \xi)$ が存在するための必要条件であるが、後者の条件は、必然的なものではなく、便宜上定めた条件である。なお、図中の矢印の位置と値は、合田¹¹⁾ の新砕波指標から求めた砕波点 x' とその値である。 H_0/L_0 の小さい(a)および(b)では、計算では波峰の不安定現象は見られず、必ずしも実験と一致しないが、(c)の場合には、合田¹¹⁾ の砕波点近くで波峰が発散し、計算上からも砕波の発生が説明されると言える。(d)のように H_0/L_0 がより大きい場合には、計算波形は合田¹¹⁾ の砕波点よりもより沖側から砕れ始めるが、その波形は波頭が崩れながら進行する崩れ波型砕波を示唆していると言える。

図-8(a)~(d)には、沖波波形勾配 H_0/L_0 を0.08とし、種々底面勾配 S を変えた時の波形の時間変化を示す。(a)~(d)いずれの場合も、波の進行に伴い波峰が先鋭化し、さらに、合田¹¹⁾ の砕波点より少し深い位置で波峰が発散することがわかる。これらの点の水深と合田¹¹⁾ の砕波水深との比較を、表-1に示す。表よりわかるように、本計算結果は、合田¹¹⁾ の結果より

表-1 砕波水深の比較 ($H_0/L_0 = 0.08$ の時)

S	h_b/H_0 (by Goda ¹⁰⁾)	h_b/H_0 (by Authors)
0.10	1.34	1.68
0.05	1.42	1.70
0.03	1.44	1.71
0.02	1.46	1.72

若干大きい値になるが、底面勾配 S が小さいほど砕波水深・沖波波高比 h_b/H_0 が大きくなるという傾向は一致している。

3.3 斜面上の波の水粒子速度

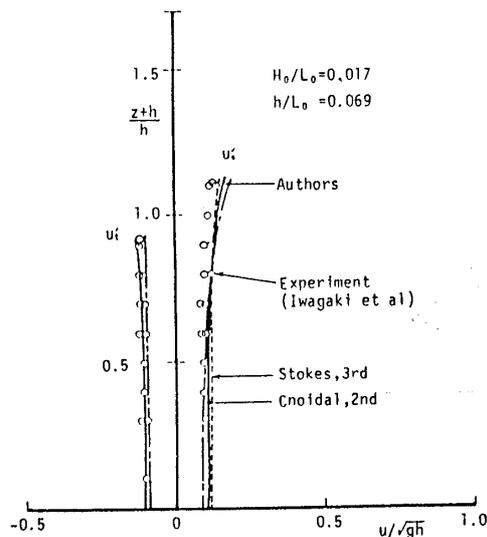
次に、斜面上の波の水平方向水粒子速度の鉛直分布について検討する。 k_0/σ を乗じて無次元化した水平方向水粒子速度 u' および鉛直方向水粒子速度 v' は、式(21)の ϕ を ξ および η で偏微分した ϕ'_ξ および ϕ'_η を用いて、

$$u' = \phi'_x = (\phi'_\xi \sinh \xi \cos \eta - \phi'_\eta \cosh \xi \sin \eta) / R \quad (26)$$

$$v' = \phi'_y = (\phi'_\xi \cosh \xi \sin \eta - \phi'_\eta \sinh \xi \cos \eta) / R \quad (27)$$

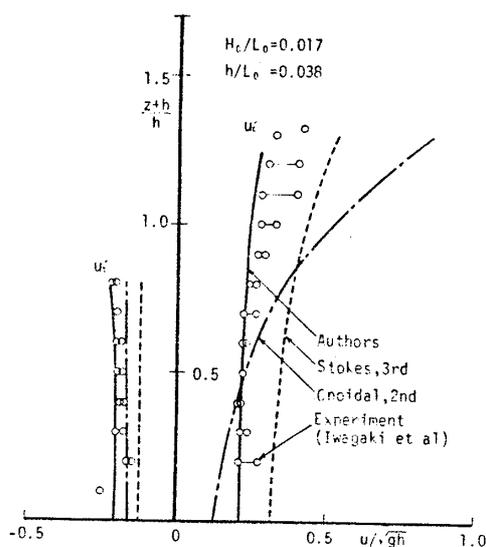
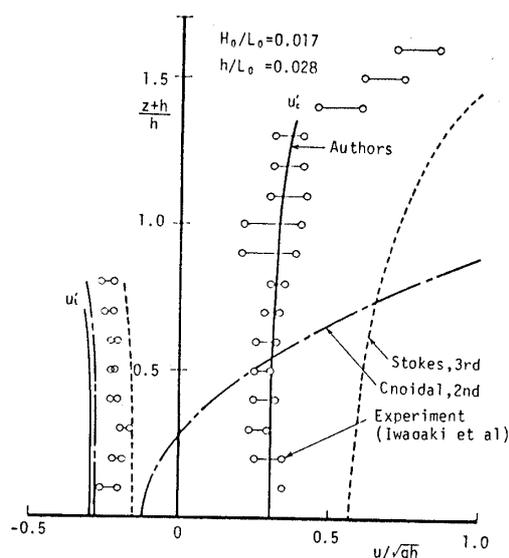
から求めることができる。

図-9(a)~(c)は、底面勾配 S を0.05、沖波波形勾配 H_0/L_0 を0.017とし、相対水深 h/L_0 を0.069, 0.038 および0.028 と順次変えた時の水平方向水粒子速度の



(a) $h/L_0 = 0.069$

図-9 斜面上の波の水平方向水粒子速度

(b) $h/L_0 = 0.038$ (c) $h/L_0 = 0.028$

鉛直分布を、岩垣ら¹³⁾の結果と比較したものである。なお、この時の碎波水深・沖波波長比 h_b/L_0 は、合田¹¹⁾の結果では0.027である。図中の丸印、点線および一点鎖線は、岩垣ら¹³⁾が示した結果で、それぞれ実験値、ストークス波の第3次近似解による理論値およびクノイド波の第2次近似解による理論値であり、実線が著者らによる計算値である。なお、 u'_c および u'_i は波の峰および谷における水粒子速度である。(a)は、 $h/L_0 = 0.069$ であり、碎波点よりかなり深い場所での結果であり、それぞれの計算値と実験値は良く一致している。(b)は、 $h/L_0 = 0.038$ であり、(a)より碎波点に近い場所での結果であるが、本計算結果は、ストークス波理論やクノイド波理論に比べて、実験値

と良く一致している。(c)は、 $h/L_0 = 0.028$ であり、碎波時の水粒子速度を示している。本計算結果は、谷側では実験値と若干のずれが生じるが、峰側では、ストークス波理論やクノイド波理論に比べて、実験値と良く一致している。

4. 結 語

本研究は、海岸災害と密接な関係がある碎波の特性を考究するための第1段階として、斜面上を進行して碎波に至る波の理論解を得ようと試みたものである。すなわち、斜面上の波の条件式を楕円筒座標で表示することにより、ストークス波理論と同様の境界値問題に変換し、その第2次近似解を求めた。この近似解は従来の実験結果と比較することにより、その妥当性について若干検討したが、得られた結果を要約すると次のようである。

- (1) 本近似解により、斜面上を進行する波の波峰の先鋭化を表現することができる。特に、沖波波形勾配が大きくなると、崩れ波型碎波になることが説明される。
- (2) 本計算では、波峰の値の発散点を碎波点と呼んだが、この点は、従来の実験による碎波点より若干沖側になる。ただし、底面勾配が小さいほど碎波水深が大きくなる傾向は、従来の実験値と一致している。
- (3) 斜面上の波および碎波点の波の水平方向水粒子速度は、本近似解と従来の実験値とは良く一致する。

最後に本研究を行うに際し、多大の援助を授いた金沢大学工学部 高瀬信忠教授に厚く感謝すると共に、本計算の実施に助力を惜しまなかった田中義人君(現在、北陸コンクリート株式会社)および細沼宏之君(現在、学部生)に謝意を表する。

< 参 考 文 献 >

- 1) Le Mehaute, B. and L. M. Webb: Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, 23 ~ 40, 1964.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波のshoalingについて(2), 第15回海岸工学講演会論文集, 10 ~ 15, 1968.
- 3) 岩垣雄一・酒井哲郎: 一樣勾配斜面上の有限振幅波について, 土木学会論文報告集, 第196号, 65 ~ 744, 1971.
- 4) 安田孝志・山下隆男・後藤真太郎・土屋義人: K-dV方程式による斜面上の波の変形, 第26回海岸工学講演会論文集, 21 ~ 25, 1979.

- 5) 石田啓・中島光浩: 特性曲線法による非線形長波の変形特性について, 第28回海岸工学講演会論文集, 59~63, 1981.
- 6) Iversen, H. W.: Waves and breakers in shoaling water, Proc. 3rd. Conference on Coastal Engineering, 1~2, 1952.
- 7) 速水頌一郎: 碎波の機構(II), 第2回海岸工学講演会論文集, 13~15, 1954.
- 8) Galvin, C. J.: Breaker type classification on three laboratory breakers, Journal of Geophysical Research, Vol. 73, No. 12, 3651~3659, 1968.
- 9) Michael, K. G. and P. D. Komar: The theory of wave propagation in water of gradually varying depth and the prediction of breaker type and height, Journal of Geophysical Research, Vol. 80, No. 21, 2991~2996, 1975.
- 10) Biesel, F.: Study of wave propagation in water of gradually varying depth, Gravity Waves. Circ. 521, Nat. Bur. of Stand., Gaithersburg, Md., 243~253, 1952.
- 11) 合田良実: 碎波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第180号, 39~49, 1970.
- 12) Yamada, H. and T. Shiotani: On the highest water wave of permanent type, Bull. Disaster. Prevention Res. Inst., Kyoto Univ., Vol.18, Pt.2, No.135, 1~22, 1968.
- 13) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島毅: 斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について, 第18回海岸工学講演会論文集, 93~96, 1971.

(1982年2月20日受理)