# 量子ゲーム理論

全　卓樹（高知工科大学）

**要　旨**

本稿では筆者の研究を中心に，量子ゲーム理論の現状レヴューを行う．量子ゲーム理論とは，通常のゲーム理論の戦略を表現する連結確率を，ヒルベルト・ベクトル（量子波動関数）から生成される量子連結確率で置き換えて拡張したものである．量子連結確率には量子的エンタングルメントに由来して，通常の連結確率にはない環境パラメータが含まれている．量子戦略の内実を精査することで，そのなかに通常の戦略を環境パラメータで変形した修正された擬古典戦略と，量子干渉に由来して古典戦略としては決して表せない純量子的成分との，二つを見出すことができる．前者には例えば利他的戦略が含まれ，これがディレンマ・ゲームの量子的な改善とされるものの物理的説明を与える．後者は多くの場合小さな補正項を提供するだけであるが，ハーサニィ型不完備情報ゲームにおいて擬古典的な寄与を消去すると，ナッシュ均衡利得全体をベル不等式の破れ分だけ与えることが示せる．量子ゲーム理論の数理的進化生物学への適用可能性についても論じる．

キーワード：量子力学，ゲーム理論，エンタングルメント，利他性，ハーサニィ理論

## 1. 序

時たま「量子ゲーム」という言葉を耳にするのだが一体これは何なのか，こういう質問をうけることがある．検索をすると私のウェブサイトの解説が上の方に出てくるためのようだ．すでに5年ほど前のものである．もっとアップトゥデイトな，そしてできたら画面のページを繰らなくても良いまとまった解説はないのか．こういう要望に答えたいと考えていたところ，折よく学会誌からの依頼を受けたので，この解説を書いてみた．本稿の構成は次の通りである．

**2.** 古典ゲーム理論のおさらい
**3.** 懲罰ルール，利他戦略
**4.** 量子戦略と利他性
**5.** ハーサニィとベル：量子的利得の分離
**6.** 量子的進化の可能性

## 2. 古典ゲーム理論のおさらい

社会科学の諸分科を，検証可能でかつ新現象の予言を行えるまで定量化数理化しようというのは，現代の大きな潮流であろう．社会科学の定量化数理化という場合に，そこには二段階が考えられる．その第一段階は統計の導入であって，例えば統計的諸量間の関係をしらべてそれを論ずるマクロ経済学などが代表的である．そして現在進行中の第二段階が，ゲーム理論の導入であって，経済現象を，経済活動を行う要素間のダイナミクスから導こうとするミクロ経済学は，必然的にゲーム理論的な設定を基盤としたものとならざるを得ない．ゲーム理論に基づく社会現象，経済現象，心理現象，生態系の「ミクロ」な第二世代型研究は，通常系の中の二つの個体を取り出して，それらの相互作用を調べる「二体モデル」となっている．ここで一方の個体を系全体の平均で置き換える近似操作を行い，二体間のダイナミクスを直接考えないで済ます「一体モデル」を考えることができる．多くの場合，それがちょうど第一世代の「マクロ」社会科学になっているのである．

ゲーム理論の中心概念は「効用関数の最大化」というものである．今二名の独立した意思決定者 $A$ と $B$（プレイヤーとよぶ）がいて，それぞれに2つの行動の選択肢 $(a_0, a_1)$ と $(b_0, b_1)$ が与えられてあるとする．それぞれは自分にとっての望ましい結果を表す効用関数 $\Pi_A$ と $\Pi_B$ を最大化しようと行動の選択をするというモデルを考える．行動の選択は確定的とも限らない．可能な選択肢を混ぜて取るということも多くある．これはこの行動の選択（ゲームプレイという）が何度も行われる状況を考えている，とも言えるし，または多数のプレイヤーのペアからなる大きな系を考えて，その系全体の様子を見ていると考えても良い．プレイヤー $A$ が選択肢 $(a_0, a_1)$ を選ぶ確率をそれぞれ $p=(p_0, p_1)$ として，プレイヤー $B$ が $(b_0, b_1)$ を選ぶ確率 $q=(q_0, q_1)$ としてみる．この選択を表す確率を単に「戦略」とも呼ぶ．全確率は1となるという確率の性質から $p_0+p_1=1, q_0+q_1=1$ が成り立つ．もし $\Pi_A$ が $A$ の選択肢 $p$ だけに，$\Pi_B$ が $B$ の選択肢 $q$ だけによるならば，おのおのが自分だけの行動で自分の効用関数を最大化すればよく，これは二人を同時に考える必要もないので話は簡単である．問題は $A$ の効用関数 $\Pi_A$ が，$A$ の選択 $p$ と $B$ の選択 $q$ の両方に依存し，$B$ の効用関数 $\Pi_B$ についても同様の場合である．すなわち

$$\Pi_A=\Pi_A(p, q)$$
$$\Pi_B=\Pi_B(p, q) \tag{1}$$

そうすると，それぞれの選択は，次の条件

$$\Pi_A(p, q^*) \text{ maximum at } p=p^*$$
$$\Pi_B(p^*, q) \text{ maximum at } q=q^* \tag{2}$$

で与えられると考えられる．この$\Pi_A$と$\Pi_B$を同時に最大化する選択の組 $\{p^*, q^*\}$ のことを「ナッシュ均衡」と称する．ナッシュ均衡を求めることが「ゲーム理論の解を求める」こととなるが，これは一般にはそんなに単純ではない．上記のプレイヤー二名に各二戦略ある「2×2 型」のゲームは，解が簡単に解析的に求まる例となっている．選択肢が二つではなく $n$ 個ある場合への拡張は $p=(p_0, p_1, ...p_n), q=(p_0, p_1, ..., q_n)$ と考えればよく，上の形式をそのまま維持できるので簡単であるが，解を求めるのは一般に $n$ が大きいほど困難になって行くことは，容易に想像されよう．

**効用関数とゲームテーブル**

結局ゲーム理論は$\Pi_A(p, q)$ と $\Pi_B(p, q)$ の関数形が与えられると問題が定まる訳であるが，この関数形そのもののかわりに，それが「ゲームテーブル」(利得表とも呼ぶ) を通じて間接的に与えられることが多い．両プレイヤーの行動が $\{a_i, b_j\}$ のとき $\Pi_A=A_{i,j}, \Pi_B=B_{i,j}$ だとするとこの $A_{i,j}, B_{i,j}$ をゲームテーブルと呼ぶ．ゲームテーブルは行列表記して，例えば二戦略ゲームだと

$$A=\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書くことにする．選択 $\{a_i, b_j\}$ が行われる連結確率 $P_{i,j}$ は，両プレイヤーの選択が独立なので $P_{i,j}=p_iq=j$ と積で与えられ，その結果効用関数は

$$\Pi_A(p, q)=\sum_{i,j} A_{ij}p_iq_j, \quad \Pi_B(p, q)=\sum_{i,j} B_{ij}p_iq_j \tag{4}$$

で与えられる．こうして選択確率 $p, q$ で効用関数が陽に表現されると，ナッシュ均衡は偏微分条件

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\Pi_A(p, q)\Big|_{(p^*, q^*)}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial q_i}\Pi_B(p, q)\Big|_{(p^*, q^*)}=0 \tag{5}$$

として線形な条件に書き下すことができる．

話が少し抽象的形式的になったので，例を二つばかりあげてみよう．その最初は

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

というゲームテーブルである．ここでは戦略要素は３つある．これはゲームテーブルが $A$ と $B$ で $A_{i,j}=B=j, i$ となっていて，両プレイヤーにとって「対称」であって，これは両者にとって「公平」なゲームであることを意味する．もし $A$ と $B$ の選択 $a_i, b_j$ が同じで $i=j$ なら「引き分け」で両者の効用は 0，もし $i=j+1 \pmod 3$ なら $A$ の効用が 1 で $B$ は $-1$ となって $A$ の「勝ち」，もし $i=j-1 \pmod 3$ なら $A$ の効用が $-1$ で $B$ は 1 となって $A$ の「負け」である．これは何のことはない，じゃんけんである．$A$ の選択効用関数は $A, B$ おのおのの戦略 $p=(p_0, p_1, p_2)$, $q=(q_0, q_1, q_2)$ によって

$$\Pi_A=(1-p_1-p_2)(q_1-q_2)+p_1(-1+q_1+q_2+q_2)$$
$$+p_2(1-q_1-q_2-q_1)$$
$$\Pi_B=(1-p_1-p_2)(-q_1+q_2)+p_1(1-q_1-q_2-q_2)$$
$$+p_2(-1+q_1+q_2+q_1) \tag{7}$$

と与えられ，簡単な計算でナッシュ均衡は

$$p^*=(p_0^*, p_1^*, p_2^*)=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$q^*=(q_0^*, q_1^*, q_2^*)=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{8}$$

と求まり，ナッシュ均衡での効用関数の値（利得と呼ぶ）は

$$\Pi_A^*=\Pi_A(p^*, q^*)=0$$
$$\Pi_B^*=\Pi_B(p^*, q^*)=0 \tag{9}$$

となって，我々の経験的によく知っている事実が確認されるのである．すなわち，じゃんけんではグーチョキパーをでたらめに等確率で出すのがベストで，平均的にいうとじゃんけんに勝ち負けはない．

第二の例として戦略要素２の，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

というゲームテーブルを考える．これもまた両プレイヤーにとって「公平」な対称ゲームである．$A$ の選択効用関数は $A, B$ おのおのの戦略 $p=(p_0, p_1), q=(q_0, q_1)$ によって

$$\Pi_A=(1-p_1)(1-q_1+5q_1)+3p_1q_1$$
$$\Pi_B=(1-p_1+5p_1)(1-q_1)+3p_1q_1 \tag{11}$$

と与えられ，簡単な計算でナッシュ均衡は

$$p^*=(p_0^*, p_1^*)=(1, 0) \quad q^*=(q_0^*, q_1^*)=(1, 0) \tag{12}$$

と求まり，ナッシュ均衡での利得は

$$\Pi_A^*=\Pi_A(p^*, q^*)=1 \quad \Pi_B^*=\Pi_B(p^*, q^*)=1 \tag{13}$$

となる．明らかに戦略 $\{p=(0, 1), q=(0, 1)\}$ は両者に公平に利得３をもたらすので，両者ともにとって好ましい結末なのだが，これは相手の裏切り $\{p=(0, 1), q=(1, 0)\}$ または $\{p=(1, 0), q=(0, 1)\}$ を誘発するのでナッシュ均衡ではあり得ず，互いに損なのでどちらも避けたいディフェンシブな戦略 $\{p=(1, 0), q=(1, 0)\}$ がナッシュ均衡となってしまうのである．このゲームは「囚人のディレンマ」と呼ばれる有名なものである．

## 3. 懲罰ルール，利他戦略

先の囚人のディレンマというのは，社会性の動物にとって，孤立した個体の最適な行動選択が，個体の集合体としての社会全体に取って最適な選択とは，往々にして齟齬するという，我々の日常に取ってなじみ深い情景の，わかりやすいモデルになっている．この社会的な最適というのは，平均的に考えれば，社会を構成する個体それぞれにとっても，ある意味で最適な望ましい配置と考えられる．

それゆえ社会的生物は，個体の当面の最適より望ましい社会的最適を実現するためのさまざまな機構を進化の過程で作り上げてきたと考えられる．

それは大きくわけて「外的処罰」によるものと，「内的倫理」によるものにわけることができる．ゲーム理論でこのような機構をどういう風に取り込めるかを考えながら，順に見ていく．

### 3.1 懲罰者のいる不完備情報ゲーム

構成員の中でランダムに組み合わせを行い，囚人のディレンマが繰り返しプレイされる社会を考える．このとき構成員の中に一定数の別のタイプのものを混入させておく．この別なタイプと組み合わさってゲームが行われると，ルールが異なり，「利己的行動」が激しく罰せられるようになっていると考えてみよう．通常のプレイヤーをタイプ$\{0\}$，罰を与えるターミネータのようなプレイヤーをタイプ$\{1\}$と呼ぶことにする．

このゲームでは，各プレイヤーのタイプの組み合わせごとに，違ったルールが設定されてると考えればよいので，ゲームテーブルは$\{0\}\{0\}$間，$\{0\}\{1\}$間，$\{1\}\{0\}$間，$\{1\}\{1\}$間のもの4つ必要になる．それぞれを表す行列$A^{\{0,0\}}, A^{\{0,1\}}, A^{\{1,0\}}, A^{\{1,1\}}$，そして$B^{\{0,0\}}, B^{\{0,1\}}, B^{\{1,0\}}, B^{\{1,1\}}$から

$$A=\begin{pmatrix} A^{\{0,0\}} & A^{\{0,1\}} \\ A^{\{1,0\}} & A^{\{1,1\}} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B^{\{0,0\}} & B^{\{0,1\}} \\ B^{\{1,0\}} & B^{\{1,1\}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

という拡大された行列を構成すれば，この大行列$A, B$がゲームのルールを指定する．相手のプレイヤーのタイプはプレイの結果を見るまで不明だとして，タイプ$\{0\}$と$\{1\}$の混合頻度を$r^{\{0\}}, r^{\{1\}}$（もちろん$r^{\{0\}}+r^{\{1\}}=1$）と書くことにする．戦略はタイプごとの選択肢の集合$p=(p_0^{\{0\}}, p_1^{\{0\}}; p_0^{\{1\}}, p_1^{\{1\}})$，および$q=(q_0^{\{0\}}, q_1^{\{0\}}; q_0^{\{1\}}, q_1^{\{1\}})$で与えられ，このゲームの効用関数は

$$\Pi_A(p,q)=\sum_{t,s}\sum_{i,j} r^{\{t\}} r^{\{s\}} A_{i,j}^{\{t,s\}} p_i^{\{t\}} q_j^{\{s\}}$$
$$\Pi_B(p,q)=\sum_{t,s}\sum_{i,j} r^{\{t\}} r^{\{s\}} B_{i,j}^{\{t,s\}} p_i^{\{t\}} q_j^{\{s\}} \tag{15}$$

と書くことができる．ナッシュ均衡は，形式的には以前同様に

$$\Pi_A(p,q^*) \text{ maximum at } p=p^*$$
$$\Pi_B(p^*,q) \text{ maximum at } q=q^* \tag{16}$$

となり，これで戦略が決定される．実際の計算は以前と同様，$p_i^{\{t\}}$，で効用関数の変分を取って極値を探すことになる．このように情報の一部欠如したままにプレイされるゲームを，ハーサニィ型の不完備情報ゲームと呼ぶ(Harsanyi 1967)．そしてその均衡解を「ベイズ＝ナッシュ均衡」と称するのであるが，これは各プレイヤーが相手のタイプもその出現頻度もわからない中，とりあえず適当な推定からはじめて効用を予想し，それに最善の対応をする戦略を準備してプレイした上で，その結果から相手の出現頻度の予想を修正し，という具合に「ベイズ推定」の過程を経て最終的な均衡に漸次近づくというイメージからの命名である．

前節の囚人ディレンマのゲームのルールに，罰則者のルールを追加したハーサニィ型ゲームとして
プレイヤー$A$のゲームテーブルが

$$A^{\{0,0\}}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad A^{\{0,1\}}=\begin{pmatrix} -19 & -25 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A^{\{1,0\}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A^{\{1,1\}}=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

という例を考えてみる．ゲームは両プレイヤーについて対称にできているとすると，プレイヤー$B$に対しては

$$B^{\{0,0\}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B^{\{1,0\}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B^{\{0,1\}}=\begin{pmatrix} -19 & 0 \\ -25 & 3 \end{pmatrix},\quad B^{\{1,1\}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

である．今プレイヤータイプの混合率を

$$r^{\{0\}}=\frac{9}{10} \quad r^{\{1\}}=\frac{1}{10} \tag{19}$$

すなわち通常タイプのプレイヤー$\{0\}$が9割で懲罰者タイプ$\{1\}$が一割だとする．これのベイズ＝ナッシュ均衡をもとめると，懲罰者タイプ$\{1\}$の混入のため，混入がなかったときのナッシュ均衡値$(p_0^{\{0\}}, p_1^{\{0\}})=(1,0)$は平均的に不利になって，皆が「社会的に良い選択」を行う$(p_0^{\{0\}}, p_1^{\{0\}})=(0,1)$がナッシュ均衡になることがわかる．そのおおよその事情は，通常タイプに取っての実効的ゲームテーブルを，「第一段階のベイズ推計」を行って

$$A_{Bayes1}^{\{0\}}=A^{\{0,0\}}r^{\{0\}}+A^{\{0,1\}}r^{\{1\}}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

と求めてみれば納得できるだろう．このようにして，罰則者の混入によってナッシュ均衡をより社会全体に取って「望ましい」ものに誘導する「警察機構」のメカニズムを，ゲーム理論的に記述することができた．ハーサニィの不完備情報ゲーム理論の威力である．

### 3.2 利他的戦略のあるゲーム

つぎに，人間のような社会性の生物が，社会化されるよう教育（もしくは洗脳）をうけて，社会の中では個体の「本来の効用関数」とは異なった量を最大化するように習慣づけられることがある，と考えてみよう．実際我々自身を振り返っても，生まれつきそうなのか教育の結果かは不明ながら，「他人の利益を思いやる」という習慣は非常に根強いもので，それは「善」「気高い行い」「英雄的行為」として社会的な称揚を受けることで絶えず強化されるようになっている．もちろん自分自身の個体の利益を守るという生物学的な動機も強いので，我々の社会の中での行動の動機は，自分の効用関数と他人の効用関数のある比率での組み合わせとしてモデル化することができるかもしれない(Cheon 2003)．これを2プレイヤーゲームで考えると，「本来の」個体のゲームテーブルが$A_{i,j}, B_{i,j}$で与えられる時，プレイヤー$A, B$はそれぞれ

$$\tilde{A}_{i,j}^{a}=(1-a)A_{i,j}+aB_{i,j}$$
$$\tilde{B}_{i,j}^{a}=(1-a)B_{i,j}+aA_{i,j} \tag{21}$$

で与えられるということで表せそうである．ゲームが両プ

レーヤーについて対称にできているときは $B_{i,j}=A_{j,i}$ という関係が成り立つ．ここで $a$ は0と1の間の実数をとる「利他性パラメータ」で，$a=0$ が通常の「利己的」戦略の追求に相当し，$a=1$ が両者ともに，いわば相手と自分を逆に取り違えた「完全に利他的」動機を表している．さしあたってこの $a$ は，社会全体の定数だと考えることにする．この利他的パラメータ $a$ のあるゲームのナッシュ均衡は，利他的に修正された効用関数

$$\tilde{\Pi}_A^a(p,q)=\sum_{i,j}\{(1-a)A_{i,j}+aA_{j,i}\}p_iq_j$$
$$\tilde{\Pi}_B^a(p,q)=\sum_{i,j}\{(1-a)B_{i,j}+aB_{j,i}\}p_iq_j \tag{22}$$

の最大化

$$\tilde{\Pi}_A^a(p,q^*)\ \text{maximum at}\ \ p=p^*$$
$$\tilde{\Pi}_B^a(p^*,q)\ \text{maximum at}\ \ q=q^* \tag{23}$$

で与えられる．結果ナッシュ均衡は利他性を表すパラメータ $a$ の関数になり，社会的生物はこの $a$ を最適化するような「倫理」を進化的に獲得すると考えられる．

例として，囚人のディレンマをまた取り上げるが，今度はゲームテーブルを少しかえて

$$A=\begin{pmatrix}1&7\\0&3\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1&0\\7&3\end{pmatrix} \tag{24}$$

としてみた．このゲームで利他パラメータ $a$ の入った戦略でのナッシュ均衡値を求めて図示したのが Figure 1 である．ナッシュ均衡の利得はパラメータ $a$ の関数として見れば，$a=1/2$ で最大値を取ることが図から見て取れる．これは実は単なる特殊な数値例ではなくて，より一般的な結論である．それはナッシュ均衡の $a\rightarrow 1-a$ 反転に対する対称性からきていて，必然 $a=1/2$ は極値となり，仮に $\tilde{\Pi}^a$ が $a=0$ から $a=1$ の範囲で上に凸な関数ならば，その最大値は $a=1/2$ によって与えらることになる．　つまり，利己的動機と利他的動機を半々にバランスするような「倫理」が，社会全体として最適なものだと言う結論になる．

## 4. 量子戦略と利他性

さていよいよ本題の「量子ゲーム」の話に入るわけであるが，これは10年ほど前，Physical Review Letter 誌に相次いで掲載された量子コインフリップの論文（Meyer 1999）と量子囚人ディレンマの論文（Eisert, Wilkens & Lowenstein 1999）によって，いささか唐突にゲーム理論に量子的確率が持ち込まれたことに端を発する．ゲーム理論の創始者の一人であるフォン・ノイマンが，ヒルベルト空間による数理的量子力学の発見者でもあった事実が，何かの歴史的符合なのかどうかは不明である．

今の時点で考えると，量子力学をゲーム理論に持ち込む理由として二つのことが考えられる．社会的動物の確率的行動を表すのに，古典的確率では不十分であるかもしれない事．Sure-thing principle の破れに見られるように，人間心理を記述するのに，「エンタングルメント」と「位相」という量子的なエキストラの含まれた確率をもって行うのは，原理的にはともかく，現象論的に成功していると考えることもできる．さらには二人のプレイヤーが，何かミクロなスケールの物体を操作して，量子的な状態選択を行うことでゲームをプレイすることが，単なる空想でなく想定できるようになっている現実がある．これは量子暗号通信，量子テレポートなどの過程の一つの自然な拡張である．

### 4.1 量子戦略とエンタングルメント

量子ゲーム理論では，量子戦略と言って，プレイヤーは量子的状態から生成された量子的確率を用いて行動の選択を行うことができると考える．ここでは簡単のために2プレイヤーがいて，それぞれが二つの行動の選択肢を持つ2×2のゲームに限定して考えよう．出発点としてまず，プレイヤー $A$ の行動の選択肢（$a_0, a_1$）を二次元のヒルベルト・ベクトルの二つの基底の組（$|0\rangle_A, |1\rangle_A$）で表し，$B$ の行動選択肢（$b_0, b_1$）を（$|0\rangle_B, |1\rangle_B$）で表す．ここに出てくる基底状態は $A$ を表すベクトル，$B$ を表すベクトルともに「正規直交性」と呼ばれる性質

$$\langle 0|0\rangle=\langle 1|1\rangle=1\quad \langle 0|1\rangle=\langle 1|0\rangle=0 \tag{25}$$

をもつ．（添字 $A, B$ どちらでもよいので取って表記してある．）ここで $\langle 0|, \langle 1|$ は $|0\rangle, |1\rangle$ の共役ベクトルで，上の内積関係によってその性質が定義されていると考えるのがよ

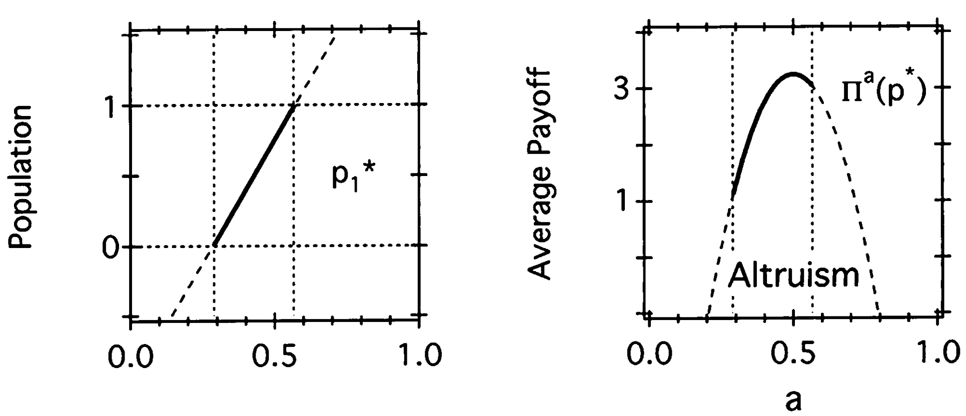


**Figure 1** ゲームテーブル（24）の囚人のディレンマ・ゲームの，利他的戦略（21）によるナッシュ均衡（左図）とその利得（右図）．原著論文（Cheon 2003）より再掲．

い．プレイヤー $A$ は $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1)$ という二つの複素数からなる量子力学変数を制御して，$B$ は $=\beta(\beta_0, \beta_1)$ という二つの複素数からなる量子力学変数を制御して，それぞれヒルベルト・ベクトル

$$|\alpha\rangle_A=\alpha_0|0\rangle_A+\alpha_1|1\rangle_A$$
$$|\beta\rangle_B=\beta_0|0\rangle_B+\beta_1|1\rangle_B \quad (26)$$

で表される量子状態を作ると考えてみよう．ただし力学変数 $\alpha_i, \beta_j$ は $|\alpha_0|^2+|\alpha_1|^2=1$，そして $|\beta_0|^2+|\beta_1|^2=1$ となるよう選ばれているとする．これは例えば，両プレイヤーがしかるべき装置で，電子スピンの方向を操作することで実現できて，その場合は $|0\rangle$ が「上向きのスピン」，$|1\rangle$ が「下向きのスピン」を表し，$|\alpha\rangle$ がその組み合わせとしての任意の向きのスピンを表している．直交関係から明らかなように $\alpha_i=\langle i|\alpha\rangle\,(i=0, 1)$，そして $\beta_j=\langle j|\beta\rangle\,(j=0, 1)$ である．いま $A$，$B$ が，それぞれの行動選択の確率 $p, q$ を

$$p_i=|\alpha_i|^2=|\langle i|\alpha\rangle|^2\,(i=0, 1)$$
$$q_j=|\beta_j|^2=|\langle j|\beta\rangle|^2\,(i=0, 1) \quad (27)$$

で定めるものと決めれば（自明な添字 $A$，$B$ は取って表記して），量子力学変数 $\alpha, \beta$，もしくは量子状態 $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ が，それぞれプレイヤー $A, B$ のゲーム戦略を表しているとみなすことができることになる．これが量子戦略である．

さてここまで読んできた読者の頭に，当然浮かぶ疑問はこうであろう．「実際の選択確率が (27) で選ばれるだけなのに，そもそもなぜ電子スピンの操作などというご大層なことまでして，ゲーム戦略を量子状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 実現する必要があるのか」．その答えが個々状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ から，両プレイヤーからなる系全体の状態を作る際の以下の操作にあり，ここが量子ゲーム理論の核心である．二つの量子的対象があって，たとえばプレイヤー $A, B$ おのおのの操作する二つの電子があるとして，その二つのものの状態はどのように表されるだろうか．素朴に考えると個々の状態の直積状態，今の例でいうと量子状態 $|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B$ を考えればいいだけのような気がする．ところが量子論では二つのもののありようは，直積から張られるヒルベルト空間全体で表されるということになっていて，それは任意の直積状態の線形和すべてを含まなければならない．そのなかには直積では決して表され得ない状態があり，例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|1\rangle_B+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A|0\rangle_B \quad (28)$$

などがその具体例である．これは量子的記述にのみ現れる独特なもので，$A$ または $B$ 単体で見ると，$|0\rangle$ と $|1\rangle$ の選択が半々に混じっているのだが，$A$ が $|0\rangle$ を選択したときは $B$ は必ず $|1\rangle$ を選び，また一方 $A$ が $|1\rangle$ を選択したときは $B$ は必ず $|0\rangle$ を選ぶという，二つの対象のそのようなありようを表現しているものである．量子的二体系でのこのような状態の存在が最初に指摘されたのは，1930 年代の Einstein, Podolski, Rosen の連名の有名な論文においてであり，そこでこの種の直積一項では表されないものを EPR 状態と呼んで来た．これをエンタングル状態（もつれ状態）と呼ぶのがより最近の言葉遣いである．

アインシュタインの元々の意図は，互いに独立で相互作用していない二つの電子を考察しても，あたかも二電子がテレパシーで交信し合って状態を調整してるかのような「不自然な」ものが出現するので，量子論は本質的に誤った理論だと示したかったのである．その後の実験の進展で，互いに影響しないほど遠ざけた二つの電子を用いて，このような不思議な「相互作用がないのに相関している」性質が実証されて，アインシュタインの意図とは逆に，エンタングル状態の存在の実証を通じて，量子論の基盤はいよいよ盤石になったのである．ここで振り返ってゲーム理論で扱う二者の意思決定過程をよく考えてみれば，互いの意図の情報交換を直接には行わない場合も，社会心理的文化的倫理的等の了解に基づいて，両者の行動の選択の実質的な調整がありうることは十分想定できる．そのような状況を通常のゲーム理論で記述しようとすれば，前説のハーサニィ型の不定なタイプのあるゲームや利他性を取り入れたゲーム，さらにその組み合わせや発展形などが必要だろうと推測され，その結果得られるものは非常に複雑な理論となるであろう．

人間の思考過程，意思疎通過程，意思決定過程が量子的な現象だという証拠は今のところあがっていない．しかし，複数の意思決定者の複雑な相互作用も含んだ心理過程を確率論的に記述するのに，量子論的確率を用いた理論が，簡明で有効な一種の現象論として機能するかもしれないという希望を，一概に捨て去るべきとは思われない．これがゲーム理論に量子的確率をもちこむ一つの動機である．

さて本筋に戻ると，(26) で表された両プレイヤー戦略から，二体ヒルベルト空間で許されるすべての状態の構成を行わねばならない (Cheon & Tsutsui 2006)．その一つの方法は，二つの実数パラメータ $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2)$ のある相関演算子

$$\begin{aligned} J(\gamma) &= e^{i\frac{\gamma_1 S}{2}}e^{i\frac{\gamma_2 CS}{2}} \\ &= \left(\cos\frac{\gamma_1}{2}+i\sin\frac{\gamma_1}{2}S\right) \\ &\quad \times\left(\cos\frac{\gamma_2}{2}+i\sin\frac{\gamma_2}{2}SC\right) \end{aligned} \quad (29)$$

を用いて，それを直積状態 $|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B$ に作用させてすべての許される二体状態

$$|\Psi(\alpha, \beta; \gamma)\rangle=J(\gamma)|\alpha\rangle|\beta\rangle \quad (30)$$

を創ることである．ここで $S, C$ はそれぞれ，両プレイヤーの戦略の交換と，各プレイヤーの戦略の反転（$|0\rangle\rightarrow|1\rangle$, $|0\rangle\rightarrow|1\rangle$）を行う演算子である．すなわち

$$\begin{aligned} S|i\rangle_A|j\rangle_B &= |j\rangle_A|i\rangle_B \\ C|i\rangle_A|j\rangle_B &= |1-i\rangle_A|1-j\rangle_B \\ CS|i\rangle_A|j\rangle_B &= |1-j\rangle_A|1-i\rangle_B \end{aligned} \quad (31)$$

こうして構成された二体状態が量子的連結確率

$$P_{ij}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma))=|_A\langle i|_B\langle j|\Psi(\alpha,\beta;\gamma)\rangle|^2 \tag{32}$$

をあたえ，これとゲームテーブルを組み合わせて量子的効用関数

$$\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma)=\sum_{i,j}A_{ij}P_{i,j}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma))$$
$$\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma)=\sum_{i,j}B_{ij}P_{i,j}(\Psi(\alpha,\beta;\gamma)) \tag{33}$$

が求まるのである．ここで相関関数のパラメータ $\gamma$ を $\gamma_1=0,\ \gamma_2=0$ と選べば，$J(\gamma)$ は $J(0)=1$ となり，二体状態は $|\Psi(\alpha,\beta;0)\rangle=|\alpha\rangle|\beta\rangle$ と単なる直積に戻る．すると連結確率は $P_{i,j}(\Psi(\alpha,\beta;0))=|\langle i|\alpha\rangle|^2|\langle j|\beta\rangle|^2=p_iq_j$ と単に両プレイヤーの選択確率の積で書けるので，その結果効用関数は

$$\Pi_A(\alpha,\beta;0)=\sum_{i,j}A_{i,j}p_iq_j$$
$$\Pi_B(\alpha,\beta;0)=\sum_{i,j}B_{i,j}p_iq_j \tag{34}$$

となって通常の「古典ゲーム」のものと同一になる．つまり量子ゲーム理論は，量子的相関の消滅する極限で通常のゲーム理論を含んだより一般的な理論になっているわけである．量子戦略にはプレイヤー $A$ にも $B$ にも「属していない」二つの実数 $\gamma_1,\gamma_2$ が出てくるのであるが，ゲームのプレイ環境を定める外的パラメータと考えることも，あるいはゲームを統制する「レフェリー」の働きを表すと考えることもできる．比喩的に言えば，このレフェリーのゲームへの介在のため，両プレイヤーの戦略を表す連結確率 $P_{i,j}$ は，両者がおのおの単独で行う選択 $p_i, q_j$ の積にはならず，それが量子戦略に豊富さをもたらすのである．

### 4.2 量子戦略の物理的内実と利他性

量子的な戦略のあるときのゲームの効用関数は，形式的には (32), (33) で与えられて，これから変数 $\alpha_i,\beta_j$ による変分

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma)\right|_{(\alpha^*,\beta^*)}=0$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial\beta_j}\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma)\right|_{(\alpha^*,\beta^*)}=0 \tag{35}$$

で量子的なナッシュ均衡が与えられるわけであるが，このままでは問題ごとに計算はできても，見通しが悪く一体何が起こっているのかを伺い知ることができない．具体的な量子相関の形 (29) が与えられているので，ここで扱っている 2×2 の量子ゲームについては計算を進めて，量子効用関数を次の形に書き下すことができる．

$$\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma)=\sum_{i,j}A^{PC}_{i,j}(\gamma)p_iq_j+\Pi^Q_A(\alpha,\beta;\gamma)$$
$$\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma)=\sum_{i,j}B^{PC}_{i,j}(\gamma)p_iq_j+\Pi^Q_B(\alpha,\beta;\gamma) \tag{36}$$

ここで $A^{PC}_{i,j}, B^{PC}_{i,j}$ は

$$A^{PC}_{i,j}(\gamma)=\cos^2\frac{\gamma_1}{2}A_{i,j}+\left(\cos^2\frac{\gamma_2}{2}-\cos^2\frac{\gamma_1}{2}\right)A_{j,i}+\sin^2\frac{\gamma_2}{2}A_{1-i,1-j}$$
$$B^{PC}_{i,j}(\gamma)=\cos^2\frac{\gamma_1}{2}B_{i,j}+\left(\cos^2\frac{\gamma_2}{2}-\cos^2\frac{\gamma_1}{2}\right)B_{j,i}+\sin^2\frac{\gamma_2}{2}B_{1-i,1-j} \tag{37}$$

とかける「実効的等価古典ゲーム」を表すゲームテーブルを与え，また

$$\Pi^Q_A(\alpha,\beta;\gamma)=-\sqrt{p_0p_1q_0q_1}\times\{G_+(\gamma)\sin(\xi+\chi)+G_-(\gamma)\sin(\xi-\chi)\}$$
$$\Pi^Q_B(\alpha,\beta;\gamma)=-\sqrt{p_0p_1q_0q_1}\times\{H_+(\gamma)\sin(\chi+\xi)+H_-(\gamma)\sin(\chi-\xi)\} \tag{38}$$

は「量子干渉項」を表している．ここで $\xi,\ \chi$ は量子戦略変数を $(\alpha_0,\alpha_1)=(\sqrt{p_0},\sqrt{p_1}^{\,e^{i\xi}})$，$(\beta_0,\beta_1)=(\sqrt{q_0},\sqrt{q_1}^{\,e^{i\chi}})$ と表したときにあらわれる相対位相であり，また $G_\pm(\gamma), H_\pm(\gamma)$ は

$$G_+(\gamma)=(A_{0,0}-A_{1,1})\sin\gamma_1$$
$$G_-(\gamma)=(A_{0,1}-A_{1,0})\sin\gamma_2$$
$$H_+(\gamma)=(B_{0,0}-B_{1,1})\sin\gamma_1$$
$$H_-(\gamma)=(B_{0,1}-B_{1,0})\sin\gamma_2 \tag{39}$$

で与えられる量である．形をみてわかるとおり，この量子干渉項は古典ゲームの変形として理解することができない量子論特有の効果である．この結果を考えると，仮にここで「量子干渉項」が無視できるほど小さい状況があるとすれば，そのときは量子ゲームというのは畢竟「ゲームテーブルを変更した古典ゲーム」と実質同等なことを示している．これを「量子的擬古典ゲーム」と呼ぶこともできるだろう．ここで特に$\gamma_2=0$という選択を行えば，(37) は

$$A^{PC}_{i,j}(\gamma)=\cos^2\frac{\gamma_1}{2}A_{i,j}+\sin^2\frac{\gamma_1}{2}A_{j,i}$$
$$B^{PC}_{i,j}(\gamma)=\cos^2\frac{\gamma_1}{2}B_{i,j}+\sin^2\frac{\gamma_1}{2}B_{j,i} \tag{40}$$

となって，これは前に見た「利他的戦略のもとでプレイしたゲーム」に他ならない．量子戦略の中に入っている演算子 $S$ が「プレイヤーの入れ替え」に相当する効果をもたらしたのである．このときのパラメータ $\gamma_1$ は

$$a=\sin^2\frac{\gamma 1}{2}$$

を通じて実効的利他性パラメータ $a$ を与える．

これから推測されることに次のようなことがある．たとえばもし，古典的な利他戦略があるゲームの「ディレンマの解消」につながるとしてみよう．量子戦略を持って同じゲームをプレイすれば，量子戦略に内在する古典的利他戦略に相当するものが機能して，量子補正項が無視できるという条件さえ成り立てば，同じようにディレンマ解消に有効に働く可能性が高いということである．そのような結果

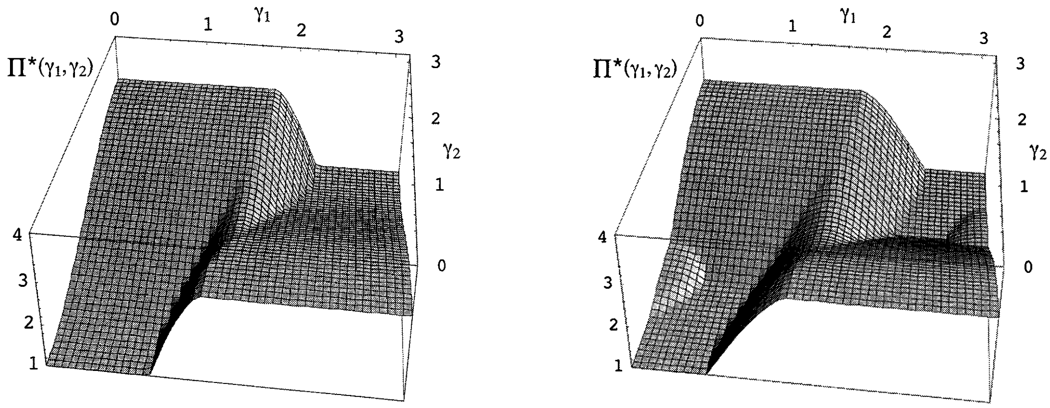


**Figure 2** 囚人のディレンマを量子戦略 (30) でプレイした場合のナッシュ均衡での利得．水平軸は $\gamma_1$，奥行き軸は $\gamma_2$ を，高さは利得の大きさを表している．左はゲームテーブル (41) の中のパラメータ $b$ が $b=0$ の場合で，右に描かれたものは $b=0.2$ の場合である．右の例では量子干渉項の効果が小さな円形の突起として現れている．原著論文 (Cheon & Tsutsui 2006) より再掲．

の数値例を Figure 2 に示してある．これは量子戦略で囚人のディレンマ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ b & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 5 & 3\end{pmatrix} \tag{41}$$

をプレイした結果のナッシュ均衡での利得を $(\gamma_1, \gamma_2)$ の関数として示したものである．左が $b=0$ の結果で右が $b=0.2$ の結果である．両例ともに $\gamma_2=0, \gamma_1\geq\pi/2$ で実効的利他性のために「望ましい」ナッシュ均衡が達成され，利得が3になっていることが見て取れる．左の例では量子補正はいたるところゼロであるが，右の例で $\gamma_1=0$ 付近および $\gamma_1=\pi$ 付近の「丸い突起」として小さいながら観測されることがわかるのも面白い結果である．

実効的利他性の効果と全く平行して，$\gamma_2\neq0$ の場合にあっては，演算子 $C$ の効果で $A_{i,j}\to A_{1-i,1-j}$ で表される「戦略の逆転」の混合が起こる．このような戦略の逆転が，プレイヤー双方の利得の改善に有効なゲームも，実は存在することが知られている (Marinatto & Weber 2000)．その種のゲームにあっては，量子戦略をもってプレイすることで，戦略入れ替え演算子 $C$ の効果が機能して，量子的ナッシュ均衡での利得の改善が起こることが期待されるのである．量子戦略は古典戦略を含み，さらにそれを環境パラメータで拡張して，いわば新たなレパートリーを加えたものとなっている．環境パラメータを最適に選んだ場合，量子的ナッシュ利得が古典的な利得を下回ることはないというのは，容易に理解できるところであろう．

## 5. ハーサニィとベル：量子的利得の分離

前章の量子ゲームの取り扱いの中では，通常のゲーム理論で扱いにくいプレイヤーの相関を素直で簡易な形でゲーム理論に取り込む現象論としての側面を特に強調した．ゲーム理論に量子確率をもちこむもう一つの動機はもちろん，ゲームプレイヤーが電子スピン等の量子状態の操作を実際に用いて，古典的には対応物のないエンタングル状態を作り出して，実際に量子的なゲームプレイを実現することである．それによって通常はあり得ないような新しいナッシュ均衡を実現できるかもしれないという希望が存するからである．それはいずれ実際に社会の中で，たとえば量子的装置を用いた投資市場というようなものとして，実現されることも十分考えられる．その場合は特に，量子戦略のもたらす新しいナッシュ均衡とそこでの利得のうちで，より複雑な古典的戦略の有効理論として得られたものではない部分，量子的な戦略に真に固有な部分に興味があるわけである．前章の数値例を見ると，この真に量子的な利得 $\Pi^Q$ は古典的な利得に対するごく小さな補正として出てきている．これはもちろんゲームテーブルの性質にもよるのだろうが，そのような目を凝らさねば見えない「小さな補正」ではなく，まがいようもない主要な効果として，純量子的な利得を引き出すような設定はないのだろうか．これに対する答えが，ハーサニィの不完備情報ゲームを量子化する中で得られることを，この章で説明する．その際に鍵になるのが量子論のもっとも深遠な定理の一つである「ベルの不等式の破れ」であることが知れるのである．

### 5.1 量子的不完備情報ゲーム

囚人のディレンマのもとにある社会が，より平均利得を高める機構を得る状況のモデルとして，「監視者」の混入した不完備ゲームを第二章で取り扱った．今度はこの不完備ゲームに量子的確率を導入することを考えてみよう．プレイヤー $A$ は $t=0, 1$ で表される二つのタイプ，プレイヤー $B$ は $s=0, 1$ の二つのタイプを取ることができると考え，両方のプレイヤーについて各タイプの出現確率が $r^{[0]}, r^{[1]}$ で与えられるとする．ゲームテーブル $A, B$ は双方のタイプに応じた4つの行列 $A^{[t,s]}, B^{[t,s]}$ の集合と考えることにする．二体の量子的連結確率を作るため，個々のプレイヤーの戦略から二体ヒルベルト空間全体を張る状態を作るのに，ここでは前章と少し違う「シュミット直交状態」を使ったアプローチ (Ichikawa, Tsutsui & Cheon 2008) を採用する．まずエンタングルした二体の「初期状態」

$$|\Phi_{\gamma,\phi}\rangle=\cos\frac{\gamma}{2}|0\rangle_A|0\rangle_B+e^{i\phi}\cos\frac{\gamma}{2}|1\rangle_A|1\rangle_B \tag{42}$$

を用意する．ここで $\gamma,\phi$ はエンタングルメントの程度と位相を決める角度変数である．両プレイヤーの戦略はこの初期状態上への「自分の状態」への操作と考えることにする．プレイヤー $A$ の戦略を，作用

$$\begin{aligned} U(\alpha^{\{t\}})|0\rangle_A&=\cos\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|0\rangle_A+\sin\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|1\rangle_A \\ U(\alpha^{\{t\}})|1\rangle_A&=-\sin\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|0\rangle_A+\cos\frac{\alpha^{\{t\}}}{2}|1\rangle_A \end{aligned} \tag{43}$$

で定義される操作 $U(\alpha^{\{t\}})$ で，プレイヤー $B$ の戦略は作用

$$\begin{aligned} V(\beta^{\{s\}})|0\rangle_B&=\cos\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|0\rangle_B+\sin\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|1\rangle_B \\ V(\beta^{\{s\}})|1\rangle_B&=-\sin\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|0\rangle_B+\cos\frac{\beta^{\{s\}}}{2}|1\rangle_B \end{aligned} \tag{44}$$

で定義される操作 $V(\beta^{\{s\}})$ で指定することにする．そして量子的連結確率は，初期状態に操作 $U(\alpha^{\{t\}})$ と $V(\beta^{\{s\}})$ を加えた状態から

$$P^{\{t,s\}}_{i,j}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi)=|{}_A\langle i|_B\langle j|U(\alpha^{\{t\}})V(\beta^{\{s\}})\Phi_{\gamma,\phi}\rangle|^2 \tag{45}$$

と求まるとするのである．これとゲームテーブル $A^{\{t,s\}}$，$B^{\{t,s\}}$ から

$$\begin{aligned} &\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma,\phi) \\ &\quad=\sum_{t,s}\sum_{i,j}r^{\{t\}}r^{\{s\}}A^{\{t,s\}}_{i,j}P^{\{t,s\}}_{i,j}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi) \\ &\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma,\phi) \\ &\quad=\sum_{t,s}\sum_{i,j}r^{\{t\}}r^{\{s\}}B^{\{t,s\}}_{i,j}P^{\{t,s\}}_{i,j}(\alpha^{\{t\}},\beta^{\{s\}};\gamma,\phi) \end{aligned} \tag{46}$$

と効用関数が定まり，これから量子的なベイズ＝ナッシュ均衡

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha_i^{\{t\}}}\Pi_A(\alpha,\beta;\gamma,\phi)\bigg|_{(\alpha^*,\beta^*)}=0 \\ &\frac{\partial}{\partial\beta_j^{\{s\}}}\Pi_B(\alpha,\beta;\gamma,\phi)\bigg|_{(\alpha^*,\beta^*)}=0 \end{aligned} \tag{47}$$

が求まるのである．

### 5.2 不完備情報男女の諍いゲームとベル不等式

このような不完備情報ゲームの量子版を一般的に解析することは，いまの2タイプ2プレイヤー2戦略の2×2×2型に制限しても，複雑すぎてなかなか困難である．ここでは，ナッシュ利得の純量子的成分を抜き出すという目的に特化した，きわめて特殊な例を調べることにする．次のようなゲームテーブルを考える（Cheon & Iqbal 2008）．プレイヤー $A$ に対して

$$\begin{aligned} A^{\{0,0\}}&=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}, & A^{\{0,1\}}&=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-1\end{pmatrix} \\ A^{\{1,0\}}&=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-1\end{pmatrix}, & A^{\{1,1\}}&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-3\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{48}$$

そしてプレイヤー $B$ に対しては

$$\begin{aligned} B^{\{0,0\}}&=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}, & B^{\{0,1\}}&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-3\end{pmatrix} \\ B^{\{1,0\}}&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-3\end{pmatrix}, & B^{\{1,1\}}&=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{49}$$

である．今プレイヤータイプの出現率は

$$r^{\{0\}}=\frac{1}{2}\quad r^{\{1\}}=\frac{1}{2} \tag{50}$$

と等確率であるとする．効用関数（46）を計算すると

$$\begin{aligned} \Pi_A=&\frac{3}{4}(P^{\{0,0\}}_{0,0}-P^{\{1,0\}}_{0,0}-P^{\{0,1\}}_{0,0}-P^{\{1,1\}}_{1,1}) \\ &+\frac{1}{4}(P^{\{0,0\}}_{1,1}-P^{\{1,0\}}_{1,1}-P^{\{0,1\}}_{1,1}-P^{\{1,1\}}_{0,0}) \\ \Pi_B=&\frac{1}{4}(P^{\{0,0\}}_{0,0}-P^{\{1,0\}}_{0,0}-P^{\{0,1\}}_{0,0}-P^{\{1,1\}}_{1,1}) \\ &+\frac{3}{4}(P^{\{0,0\}}_{1,1}-P^{\{1,0\}}_{1,1}-P^{\{0,1\}}_{1,1}-P^{\{1,1\}}_{0,0}) \end{aligned} \tag{51}$$

となる．これから量子的ベイズ＝ナッシュ均衡を求めることができて，結果は

$$\begin{aligned} &\gamma=\frac{\pi}{2},\ \phi=0 \\ &\beta^{\{0\}*}-\alpha^{\{0\}*}=\frac{\pi}{4} \\ &\beta^{\{1\}*}-\alpha^{\{0\}*}=\frac{3\pi}{4} \\ &\alpha^{\{1\}*}-\beta^{\{0\}*}=\frac{5\pi}{4} \end{aligned} \tag{52}$$

と求まり，そのときの利得は

$$\Pi_A^*=\Pi_B^*=\frac{\sqrt{2}-1}{2} \tag{53}$$

である．参考のために $\gamma=0$ と制限して，連結確率を $P^{\{t,s\}}_{i,j}p_i^{\{t\}}(\alpha^{\{t\}})q_j^{\{s\}}(\beta^{\{s\}})$ という形に制限した上で，古典的なナッシュ均衡を求めてみると，それには8つの解があって，それは

$$\begin{aligned} &\alpha^{\{0\}*}[cl]=0,\ \beta^{\{0\}*}[cl]=\text{arbitrary}; \\ &\alpha^{\{1\}*}[cl]=0,\ \beta^{\{1\}*}[cl]=\pi \end{aligned} \tag{54}$$

または

$$\begin{aligned} &\alpha^{\{0\}*}[cl]=\pi,\ \beta^{\{0\}*}[cl]=\text{arbitrary}; \\ &\alpha^{\{1\}*}[cl]=\pi,\ \beta^{\{1\}*}[cl]=0 \end{aligned} \tag{55}$$

と，この両者から $\alpha\leftrightarrow\beta$ とプレイヤーを入れ替えたもの，および $\{0\}\leftrightarrow\{1\}$ とタイプを入れ替えたものすべてとなる．そしてそのときの利得は

$$\Pi_A^*[cl]=\Pi_B^*[cl]=0 \tag{56}$$

となっている．

効用関数が（51）で与えられる不完備情報ゲームで，古典利得がゼロとなっていて，正の量となる量子利得は純粋に量子的起源のものだ，というこの事実は決して偶然ではない．実は式（51）はゲーム理論とは全く無関係に，量子的確率事象の局所的因果律の破れ（または量子的確率の非分離性）を示す目的でベルによって考えられた，仮想的な実験の設定に登場する連結確率と全く同様なものなのだ（Bell 1964）．ベルの思考実験では，二価の値 $i=0,1$ または $j=0,1$ をとる量子的な粒子二つを観測者 $A$ と $B$ がそれ

ぞれ観測するのであるが，このとき両者とも観測の設定を $\{t\}=0, 1$ または $\{s\}=0, 1$ と二通りずつ用意する．そして観測ごとにその中から一つをランダムに選択するものとする(これは例えばスピンの向きを観測するための測定器の方向を各観測者が二通り用意して観測ごとにそのうちからランダムに選ぶ，といったことに対応する)．これを何度も繰り返し，観測値を蓄積して $A, B$ の設定がそれぞれ $\{t\}$，$\{s\}$ で観測結果がそれぞれ $i, j$ である確率を $P^{\{t,s\}}_{i,j}$ と書くことにする．常識で考えて $A$ と $B$ ともに，自分の観測結果は相手の設定に依存しない，というのは当然の理屈であろう．これを専門用語で「局所的因果律の仮定」と称するのであるが，この仮定だけから，異なった $P^{\{t,s\}}_{i,j}$ の間に成り立つべき一群の不等式を証明することができる．これがベルの不等式と呼ばれるものである．その一例として，セレセーダによって示された

$$P^{\{0,0\}}_{0,0}-P^{\{1,0\}}_{0,0}-P^{\{0,1\}}_{0,0}-P^{\{1,1\}}_{1,1}\leq 0$$
$$P^{\{0,0\}}_{1,1}-P^{\{1,0\}}_{1,1}-P^{\{0,1\}}_{1,1}-P^{\{1,1\}}_{0,0}\leq 0 \tag{57}$$

があって (Cereceda 2001)，これは (51) を見ると，正に我々のゲームの効用関数に出てくる組み合わせそのものである．ベルの思考実験の $P^{\{t,s\}}_{i,j}$ と，我々の考察しているハーサニィ型のゲームの戦略を与える連結確率 $P^{\{t,s\}}_{i,j}$ が一対一に対応するものであることが了解できれば，古典的なナッシュ利得 $\Pi^{\star}_A=\Pi^{\star}_B=0$ は，セレセーダ型のベル不等式から予言される限界値であることが理解されるのである．そしてさらに，量子戦略から得られたナッシュ均衡の利得は，$P^{\{t,s\}}_{i,j}$ についてのベル不等式の破れを引き起こすような，古典的には絶対にあり得ない量子的過程に起因したもの，と結論せざるを得ないことになる．実際に我々のゲームでの量子戦略の中身を見るために，利得関数をタイプの組み合わせごとに

$$\Pi_A=\sum_{t,s}r^{\{t\}}r^{\{s\}}\Pi^{\{t,s\}}_A$$
$$\Pi_B=\sum_{t,s}r^{\{t\}}r^{\{s\}}\Pi^{\{t,s\}}_B \tag{58}$$

と分解してみると

$$\Pi^{\{t,s\}}_A=\sum_{i,j}\left(\cos^2\frac{\gamma}{2}A^{\{t,s\}}_{i,j}+\sin^2\frac{\gamma}{2}B^{\{t,s\}}_{i,j}\right)p^{\{t\}}_i q^{\{s\}}_j$$
$$+\cos\phi\sin\gamma\sqrt{p^{\{t\}}_0 p^{\{t\}}_1 q^{\{s\}}_0 q^{\{s\}}_1}\sum_{i,j}(-)^{i+j}A^{\{t,s\}}_{i,j}$$
$$\Pi^{\{t,s\}}_B=\sum_{i,j}\left(\cos^2\frac{\gamma}{2}B^{\{t,s\}}_{i,j}+\sin^2\frac{\gamma}{2}A^{\{t,s\}}_{i,j}\right)p^{\{t\}}_i q^{\{s\}}_j$$
$$+\cos\phi\sin\gamma\sqrt{p^{\{t\}}_0 p^{\{t\}}_1 q^{\{s\}}_0 q^{\{s\}}_1}\sum_{i,j}(-)^{i+j}B^{\{t,s\}}_{i,j} \tag{59}$$

と書ける．これは前の通常のゲームの量子戦略のものと似通った形で，古典的に解釈できる部分と純量子的な部分に分かれている．ナッシュ均衡においてこれの $\{t, s\}$ についての和を取ると，前者の寄与は 0 であり，量子利得 (53) と古典利得 (56) の差はすべて後者の量子的干渉項に由来することが示せる．なおこのようにベル不等式破れを量子ゲームに持ち込んだのは Cleve たちの論文(Cleve, Hoyer, Toner & Watrous 2004)を嚆矢とする．

かくして量子的な不完備情報ゲームによって，古典戦略で置き換えることが決してできない純粋に量子的なナッシュ利得の存在を紛う方なく示し，我々の所期の目標に到達できたわけである．

## 6. 量子的進化の可能性

ここまで述べて来たことを要約すれば，環境パラメータによって拡張された量子戦略の中の，擬古典的成分と純量子的成分をうまく使い分けることで，量子ゲーム理論をいろいろな場面で有効に用いられるのではないか，ということになろう．通常の非量子的スケールのゲームの利他的戦略等を表す数学的便法にも，微視的物体を操作にあたって古典的には得られない量子的効用を得るための解析手法にもなる，というわけである．それでは果たして，どうしても量子ゲーム理論をもってしなければ扱えない事象というものが，自然界にはあるのだろうか．これは量子ゲーム理論に発祥当時からずっとつきまとっていた疑問で，この問いに積極的な答えを与えられない限り，種々興味深い点はあるにしても，量子ゲーム理論は結局のところ，現実の科学というよりは「単なる」数理物理である，というレッテルを剥がせずに終わってしまうであろう．そこで本稿を終えるにあたって，量子ゲーム理論を真に正当化する可能性のある事象として，微視的生物の進化の問題を考察してみよう(Abbott, Davies & Pati 2008)．

生物の進化の解明は科学の中心的課題の一つである．当然それは困難な課題であって，たとえばそれをゲーム理論だけで解決することを望むとすれば，それは過大な期待であろう．現在のゲーム理論で進化が理解できることはないかもしれない．しかし一方ゲーム理論をもって，進化のある側面を記述することはできるだろう．ゲーム理論は自己制御する(もしくは意志を持つ)個体の集合系の進化発展を記述する力学理論の出発点と考えることができ，生命はそのような系の典型である．生命の発生と進化が，ゲーム理論的なダイナミクスで表現される過程だと考えるのは，きわめて自然に思える．

ゲーム理論で扱う進化には二つののタイムスケールのものがある．その一つは，ある集団が与えられた環境パラメータの下で「進化的安定状態」に向かって発展収束する様子の記述であって，これが進化ゲーム理論で扱われる動力学にほかならず，進化的安定状態というのは通常の「静的」ゲーム理論のナッシュ均衡の概念の延長であることはよく知られている．ゲーム理論の記述する進化の第二のものは，環境パラメータの長期的変化によるものである．多くの生物の集団において，集団自身が環境パラメータ自体を制御するなんらかの方法を獲得するということは頻繁に起こることである．知性と政治文化をもつ我々のような複雑な生物だけでなく，例えばバクテリアのような比較的単純な生物の集団でも，コロニーの成長に伴って周りの環境を変え，個体の成長パターンにも変化が見られたりする．

ひとたび環境パラメータの制御が可能になったゲーム理論的集団にあっては，ナッシュ利得を最大にする最適状態へと，パラメータが漸次変化していくであろう．そのような環境パラメータの進化について，これまでの議論でも実は暗黙のうちに仮定されていた．例えば利他性をもった戦略を取る集団を考え，利他性パラメータ $a$ を，社会全体の個体への内面的統制によって長期的に制御できる環境変数だと考えれば，与えられたパラメータごとナッシュ均衡が長期的に変化して，「最大多数の最大幸福」を与える利己行為と利他行為と半々にバランスさせた最適状態の社会が現れる，という訳である．

こうしてみると，ゲーム理論の中のルールを変更修正する多くの環境パラメータが，最初から理論に内在的に含まれている量子ゲームの，進化的な強みが理解されてくる．ベル不等式の破れによって古典戦略を常に上回る利得が保障されている量子的利得の存在は，その強みをさらに補強するであろう．生物がいかにして進化してきたかを，ゲーム理論的な数理モデルで記述することはいずれ可能となるだろう．生命活動を支えるのは細胞の中で進行する生化学反応であるが，これは当然すぐれて量子的なものである．細胞レベルでのミクロな生命の進化を考えると，少なくともその初期の発展段階で，そこにはゲーム理論的な競争の過程が存在して，その競争は量子的スケールで行われたと推測できる．そしてそのとき，量子戦略をもつゲームのもつ二つの強みが，生命により迅速で優位な進化をもたらすことも想像されるのである．もし量子的資源を利用できるミクロな生物があったとして，そのような優位を使わなかったら，むしろそのほうが不自然だともいえるかも知れない．

実証された科学的発見から遠ざかって，話がいささか空想的になったついでに，最後は量子力学の発見と生物進化の理論の不思議な歴史的符合に触れて本稿を終えたいと思う．量子力学の創始者の一人シュレーディンガーが，生命活動の理解を生涯をかけた課題と考えていたのはよく知られている．彼の指摘したのは，熱力学的にみたときの生物の奇妙な特徴であった．生物はエントロピーを局所的に減少させる働き，つまり「負のエントロピーを食べる」活動を行う，それも世代を継いで行うという特異な性質を持っている．時間の進行とともに全体としてエントロピー増大の方向に向かう物質界の一部が，何らかの理由でそのような特異的な進化を遂げてきたのである．生物のこの熱力学的特異性が，「認識」ないし「意識の作用」の問題，すなわち量子力学の根本的難問である「対象と観測者のディコトミー」とも深く関わっているのではないか．シュレディンガーがそのように考えていたことは，そうと明言されてはいないにしても，彼の著書から仄かに立ち上る神秘主義の香りからも明らかである．

## 謝　辞

本稿の論考は，筆者の原著論文の共著者である筒井泉博士，アザール・イクバル博士，市川翼博士との共同研究に基づくものであることを，感謝とともにここに記しておきたい．

## 参考文献

Abbott, D, Davies, P. C., & Pati, A. K. (2008) *Quantum aspects of life*. Imperial College Press.

Bell, J. S. (1964) On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics* 1, 195-200.

Cereceda, J. L. (2001) Identification of all Hardy-type correlations for two photons or particles with spin 1/2, *Found. Phys. Lett.* 14, 401-424.

Cheon, T. (2003) Altruistic duality in evolutionary game theory, *Phys. Lett.* A318, 327-332.

Cheon, T., & Tsutsui, I. (2006) Classical and quantum contents of solvable game theory on Hilbert space, *Phys. Lett.* A348, 147-152.

Cheon, T., & Iqbal, A. (2008) Bayesian Nash equilibria and Bell inequalities, *Phys. Soc. Jpn.* 77, 024801 (6 p).

Cleve, R., Hoyer, P., Toner, B., & Watrous, J. (2004) Consequences and limits of nonlocal strategies, *Proc. 19th Annual IEEE Conf. on Computational Complexity*, 236-249.

Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999) Quantum games and quantum strategies, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3077-3080.

Harsanyi, J. C. (1967) Games with incomplete information played by “Bayesian” players, *Mgt. Sci.* 14, 159-182; *ibid.* 320-334; *ibid.* 486-502. *Mgt. Sci.* 14 (1967) 159; *ibid.* 320; *ibid.* 486.

Ichikawa, T., Tsutsui, I., & Cheon, T. (2008) Quantum game theory based on the Schmidt decomposition, *J. of Phys. A: Math. Theor.* 41, 135303 (29 p).

Marinatto, L., & Weber, T. (2000) A quantum approach to static games of complete information, *Phys. Lett.* A272, 291-303.

Meyer, D. A. (1999 Quantum strategies, *Phys. Rev. Lett.* 82 1052-1055.

## 付録：量子論とゲーム理論における行列

単なるお話だけでなく，実際の活用のために原論文にあたる準備として，技術的詳細まで少し立ち入りたいという読者を想定して，ゲーム理論への適用時に必要な量子論の要点を，行列記法の運用法とともに簡単にまとめてみた．理解しやすいように，2プレイヤーのゲームに特化して考えると，両プレーヤーの戦略の組み合わせを表す連結戦略は 2×2=4 要素からなるヒルベルト・ベクトル

$$|\Psi\rangle=\begin{pmatrix}\phi_{0,0}\\ \phi_{0,1}\\ \phi_{1,0}\\ \phi_{1,1}\end{pmatrix}$$

で表され，$P_{i,j}=|\phi_{i,j}|^2$ がプレイヤー $A, B$ がそれぞれ戦略 $i, j$ を取る事象の生起する確率を示していると考える．要素 $\phi_{i,j}$ は複素数なので，位相を $\kappa_{i,j}$ で表すと $\phi_{i,j}=\sqrt{P_{i,j}}e^{i\kappa_{i,j}}$ と書くことができる．量子論では，状態が $n$ 次元ベクトルのとき，観測量を与える演算子は $n\times n$ 次元の行列で表され，その観測量の期待値は観測量演算子行列を挟んだ状態の内積で表される．量子ゲームの場合の観測量は効用関数 $\Pi_A, \Pi_B$ であり，対応する演算子 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ が

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix}A_{0,0}&0&0&0\\0&A_{0,1}&0&0\\0&0&A_{1,0}&0\\0&0&0&A_{1,1}\end{pmatrix},\quad \mathscr{B}=\begin{pmatrix}B_{0,0}&0&0&0\\0&B_{0,1}&0&0\\0&0&B_{1,0}&0\\0&0&0&B_{1,1}\end{pmatrix}$$

という対角行列で表されると考える．すると効用関数は

$$\Pi_A(\Psi)=\langle\Psi|\mathscr{A}|\Psi\rangle=\sum_{i,j}A_{i,j}P_{i,j}$$

$$\Pi_B(\Psi)=\langle\Psi|\mathscr{B}|\Psi\rangle=\sum_{i,j}B_{i,j}P_{i,j}$$

で表される．いま連結確率 $P_{i,j}$ がプレイヤーそれぞれが戦略を選ぶ確率 $p_i$, $q_j$ の積で与えられ，かつ位相が $\kappa_{0,0}\kappa_{1,1}=\kappa_{0,1}\kappa_{1,0}$ になっている特別な場合を考えてみる．この場合一般性を失わずに $\kappa_{0,0}=0$, $\kappa_{1,1}=\xi+\chi$ と選べて，連結戦略ベクトルは

$$|\Psi\rangle=\begin{pmatrix}\sqrt{p_0}\sqrt{q_0}\\ \sqrt{p_0}\sqrt{q_1}e^{i\chi}\\ \sqrt{p_1}\sqrt{q_0}e^{i\xi}\\ \sqrt{p_1}\sqrt{q_1}e^{i(\xi+\chi)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{p_0}\\ \sqrt{p_1}e^{i\xi}\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{q_0}\\ \sqrt{q_1}e^{i\chi}\end{pmatrix}_B$$

という形にかける．すなわち連結戦略が各プレイヤーの戦略ベクトル

$$|\alpha\rangle_A=\begin{pmatrix}\sqrt{p_0}\\ \sqrt{p_1}e^{i\xi}\end{pmatrix}_A,\quad |\beta\rangle_B=\begin{pmatrix}\sqrt{q_0}\\ \sqrt{q_1}e^{i\chi}\end{pmatrix}_B$$

の直積で表されたわけである．この場合は効用関数が

$$\Pi_A(p,q)={}_A\langle\alpha|_B\langle\beta|\mathscr{A}|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B=\sum_{i,j}A_{i,j}p_iq_j$$

$$\Pi_B(p,q)={}_A\langle\alpha|_B\langle\beta|\mathscr{B}|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B=\sum_{ij}B_{i,j}p_iq_j$$

で表され，これは通常の古典的ゲームのものに一致する．

ちなみにこの古典ゲームの結果を，各プレイヤーの戦略確率で作ったベクトルと，対角要素を並べ直して作った行列とを用いて

$$\Pi_A(p,q)=\begin{pmatrix}p_0 & p_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{0,0} & A_{0,1}\\ A_{1,0} & A_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\end{pmatrix}$$

$$\Pi_B(p,q)=\begin{pmatrix}p_0 & p_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{0,0} & B_{0,1}\\ B_{1,0} & B_{1,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\end{pmatrix}$$

なる形に改めて表記することもできる．これが古典ゲームにおいてもゲームテーブルを行列と同定する我々の表記の根拠を与えているわけである．連結戦略を表す量子状態 $|\Psi\rangle$ が両プレイヤーの状態の直積で表されない一般の場合に戻って考えると，このように直積で表されない部分こそが，まさにエンタングルメントであって，量子戦略特有の効果をもたらすのである．ただしゲーム理論である以上，プレイヤー $A$ の選択 $|\alpha\rangle_A$，プレイヤー $B$ の選択 $|\beta\rangle_B$ という概念はどうしても必要で，そのために直積状態 $|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B$ から一般の状態 $|\Psi\rangle$ を作るための工夫と，その意味づけが必要であって，それが正に相関演算子 $J(\gamma)$ であり，あるいはエンタングルした初期状態 $|\Phi_{\gamma,\phi}\rangle$ なのである．各プレイヤーが2タイプで現れるハーサニィ型の不完備ゲームでは，各プレーヤーの戦略を表すベクトルはタイプの数だけ倍化し 2×2=4 次元，両プレイヤーの連結戦略は都合 4×4=16 次元ベクトルとなり，効用関数を与える演算子 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ は 16×16 次元の対角行列となる．そして対応する古典ゲーム理論の行列表記では，各プレイヤーの古典戦略が 4 次元ベクトル，効用関数演算子の対角要素を並べ直して作るゲームテーブルは 4×4 次元行列になるわけである．

# Quantum Game Theory

Taksu CHEON
*Kochi University of Technology*

We present a review of the quantum game theory seen from the author's perspective. The quantum strategy is an extension of game theoretical strategy in which the classical joint probability representing the choice of players is replaced by quantum joint probability generated from Hilbert vectors or quantum wave functions. The extra environmental parameters appear in quantum strategies, because of the inherent entanglement present in the quantum wave functions. A detailed examination of the contents of quantum strategy reveals the existence of two components, the first of which is the pseudo-classical strategy that is a deformed strategy modified from the original classical strategy by environmental parameters, and the second of which is the purely quantum contribution that originates from the quantum interference effect. The pseudo-classical component is shown to represent the altruistic strategy which is effective in bringing dilemma games to Pareto optimal Nash equilibria. The quantum interference component usually supplies a small correction. In a proper setting of Harsanyi-type game with incomplete information, however, pseudo-classical terms can be made to cancel each other, leaving only quantum effect in the Nash payoffs, to which, a direct link to the quantum breaking of Bell inequality is established. We also discuss possible applications of quantum games to the evolutionary theory of biology.

**Key words**: quantum mechanics, game theory, entanglement, altruism, Harsanyi theory