（昭和24年11月　造船協会秋季講演会に於て講演）

横動揺に於ける Bilge Keel の作用に就て

（其　の　一）

正員　工学士　笹　島　秀　雄

1. 緒　　論

船体の横動揺に於て Bilge Keel の作用が大きな役割をしていることは経験的にも実験的にも十分確められているが，その理論的解析は殆んど行われていない。只. Froude の paddle experiment 以来板の head resistance 的な観念が暗黙に認められて $R=K\omega^2$ として K を常数とするのが習慣である。又動揺に伴う見掛の慣性 moment に到つては其の order を云々するに止つている。本文は実験結果をまたなければ未だ数値計算をなし得る迄には到らないが，一応 Bilge Keel の深さ及び bilge circle の半径により動揺抵抗が如何様に影響されるかを示す式を得たので，此処に発表して御教示御批判を仰ぐ次第である。

本計算に於ける仮定は

（1）船形は実船の中央切断に近い正方形の四隅を丸めたもので，これに厚さのない Bilge Keel を附したものとし船首尾のことは考えてない。

（2）水の自由表面の影響は考えない。従つて造波現象は起らないとする。

（3）渦は一枚の Bilge Keel に就て一個しかないものとする。

（4）渦の強さは定常運動に対する Joukowski の説により決定されるものとする。又渦の通路は実験から Bilge keel の先端を通る円周上にありとする。

2. Bilge Keel を有する船型を単位円に変換する函数

渡辺恵弘博士* は特異点を巧みに配置する方法により変換函数の求め方を発表された。この方法によると函数の形が簡単になる為め計算には都合がよいが，Bilge Keel と bilge circle の区別がつけられないので，筆者は次の様な方法をとつた。先ず Bilge Keel のない船型を単位円に変換し，次にこの単位円に Bilge Keel を附したものを考えると，船型が対称軸四本をもつ形であるから船型の方にも Bilge Keel が現われる。従つて単位円に Bilge Keel を附した形状のものを新しい単位円に変換する函数を求めればよいのである。

(A) Bilge Keel なき船型を単位円に変換

Bilge Keel なき船型を z 面に，単位円を ζ 面にとる。z 面の図形の外部と ζ 面の円の外部とを 1：1 に対応せしめる函数は一般に次の様に置ける。

$$z=M(\zeta+c_0+c_1\zeta^{-1}+c_2\zeta^{-2}+c_3\zeta^{-3}+\cdots)$$

但し　M＝図形の縮率及方向を規定する係数

c_0＝図形の位置を定める係数

$c_1,\ c_2,\ \cdots$ ＝図形の形状を定める係数

今 z 面の図形を原点を中心として置けば $c_0=0$，図形が2本の対称軸を有する場合には $c_{2n}=0$，更に対称軸4本の場合には

$$z=M(\zeta+c_3\zeta^{-3}+c_7\zeta^{-7}+c_{11}\zeta^{-11}+\cdots) \tag{2.1}$$

ここでは (2.1) で表わされる様な船型を考える。

$$z=x+iy=re^{i\vartheta},\qquad \zeta=\xi+i\eta=\rho^{i\varphi}$$

として z 面の図形を実数の形にすると

$$x=M(\cos\varphi+c_3\cos3\varphi+c_7\cos7\varphi+\cdots)$$

$$y=M(\sin\varphi-c_3\sin3\varphi-c_7\sin7\varphi-\cdots)$$

z 面の図形が与えられた時，これに適する $M,\ c_3,\ c_7,\cdots$ を決めるには図形上の多数の点で $x,\ y$ の値を拾えば

* 造船協会々報第52号 昭和8年10月

方程式の数は何個でも得られる筈であるが，一般には φ を含むため非常に面倒になるので φ の入らぬ条件式で満足せざるを得ない。ここではこれに適するものが2個あつて

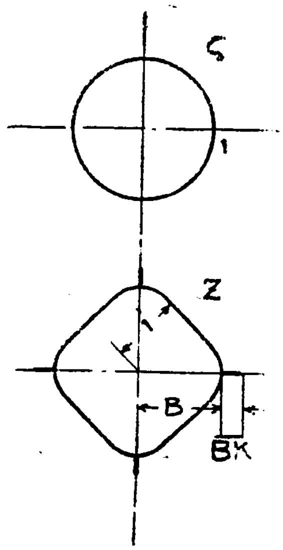
$$\varphi=0: \quad M(1+c_3+c_7+\cdots)=B \tag{2.2}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}: \quad M(1-c_3+c_7-\cdots)=1 \tag{2.3}$$

但し 船の半幅を 1，中心より bilge 迄の距離を B とする。

次に Bieberbach の面積定理* によれば z 面の図形の面積 A は次式で与えられる。

$$M^2\pi(1-3c_3^2-7c_7^3-\cdots)=A \tag{2.4}$$



第 1 図

図形が複雑ならば更に moment, moment of inertia 等に対しても条件式が得られるが，c_n の羃が高くなるから計算は面倒になる。今は (2.2)～(2.4) の3個の条件式で満足することにして解出せば

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{2}\left\{\frac{7}{6}(B+1)-\sqrt{\frac{50}{36}B-\frac{11}{36}(B^2+1)-\frac{2A}{3\pi}}\right\}\\ c_3&=\frac{B-1}{2M}\\ c_7&=\frac{B+1}{2M}-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Bilge Keel の 半径 β を parameter として計算すると (2.5) の数値は次表の様になる。

β	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
M	1.1597	1.1296	1.0937	1.0508	1.0000
c_3	0.1429	0.1100	0.0758	0.0394	0
c_7	0.0052	−0.0047	−0.0099	−0.0089	0

之を見ると c_7 は非常に小さいから之を無視してもよいであろう。従つて (2.1) は次の様に簡単になる。

$$z=M(\zeta+c\zeta^{-3}) \tag{2.6}$$

本式は Bilge Keel ない場合に対して前記の渡辺恵弘博士の発表されたものと同一である。(2.6) による図形を画くと正方形を円孤で結んだものに比較して，彎曲部が少し痩せている位で殆んど一致するからここには示さない。

(B) Kilge Keel を有する円を単位円に変換

川原琢磨助教授が Flap 翼の研究**に使用された方法を modify して次の様な逐次変換を行う。

1) ζ 面の単位円を z_1 面の実軸上長さ 4 なる直線に変換する。これはよく知られている様に

$$z_1=\zeta+\frac{1}{\zeta}$$

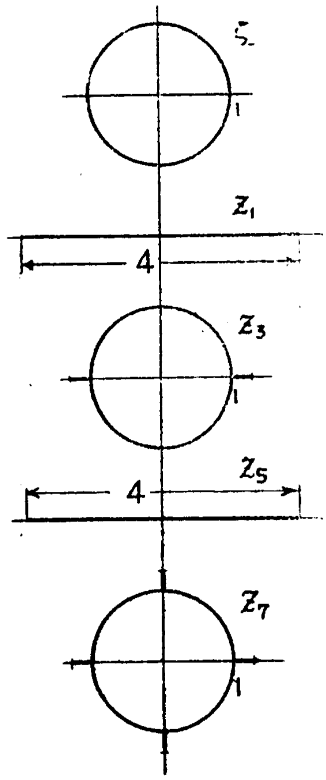
2) $z_2=mz_1 \quad (m>1)$

3) z_2 面の実軸上長さ 4 なる中央部分のみを z_3 面の単位円に変換する。

$$z_2=z_3+\frac{1}{z_3}$$

これによつて ζ 面の単位円は z_3 面の単位円に Bilge Keel 2本を附した形状に写像される。

以下同様の手段を虚軸に対しても行う。



第 2 図

* 例えば小松勇作著 等角写像論上巻

** この項 宮崎守次工学士の御注意による。

4)　$z_4=iz_3$

5)　$z_5=z_4+\dfrac{1}{z_4}$

6)　$z_6=nz_5$　$(n>1)$

7)　$z_6=z_7+\dfrac{1}{z_7}$

以上の変換により ζ 面の単位円は z_7 面の円に4本の Bilge Keel を附した形に写像される。各 Bilge Keel の深さを相等しくするには

$$m^2n^2=2n^2-1\equiv p^2$$

之の関係を用いて直接 ζ と z_7 を結ぶと Rieman 面に適当な注意をして次の様になる

$$z_7=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{p^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+2}+\sqrt{p^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)-2}\right\} \tag{2.7}$$

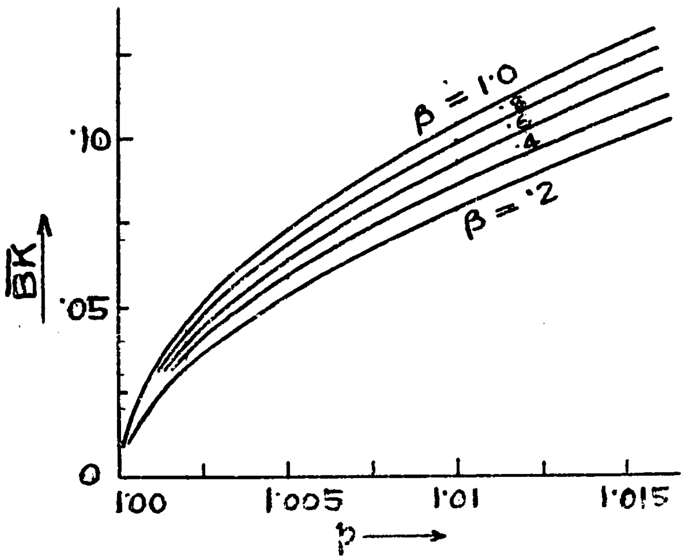
最後に Bilge Keel を有する船型を単位円に対応させるには (2.6) は於ける ζ 面の単位円の代りに (2.7) の z_7 面の Bilge Keel を除いた単位円を用いればよい。即ち

$$z=M(z_7+cz_7^{-3})=\frac{M}{2}\left[\left\{(1-c)+cp^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)\right\}\sqrt{p^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+2}\right.$$
$$\left.+\left\{(1-c)-cp^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)\right\}\sqrt{p^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)-2}\right] \tag{2.8}$$

Bilge Keel の深さを $\overline{BK}$ と書くと

$$\overline{BK}=\frac{M}{2}\left[\{(1-c)+2cp^2\}\sqrt{p^2+1}+\{(1-c)-2cp^2\}\sqrt{p^2-1}-\sqrt{2}(1+c)\right] \tag{2.9}$$

$\overline{BK}$ を β 及び p の函数として計算すると第3図の様になる。



第　3　図

3.　横動揺に対する複素 potential 函数

回転運動に対する複素 potential 函数を $w_r=\phi_r+i\psi_r$ とすれば，ψ_r は次の2個の週辺条件を満足せねばならぬ。

$$\left.\begin{array}{lll}\rho=1 & \text{に於て} & \psi_r=\frac{1}{2}\omega r^2\\ \rho=\infty & \text{〃} & \psi_r=\text{constant}\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

但し ω は回転角速度とする。

(A)　Bilge Keel なき場合

この場合の w_r は Bilge Keel ある場合の特別なものとして出て来る筈であるが，後者の場合は近似方法を採る為め其の誤差の程度を知る手段として求めて置く。

(2.6) より

$$(r^2)_{\rho=1}=(z\bar{z})_{\rho=1}=M^2\left(\zeta+\frac{c}{\zeta^3}\right)\left(\bar{\zeta}+\frac{c}{\bar{\zeta}^3}\right)_{\rho=1}=M^2\{(1+c^2)+2c\cos 4\varphi\}$$

常数項は関係がないから，之れを除くと視察によつて容易に次式を得る。

$$w_r=i\omega M^2c\zeta^{-4} \tag{3.2}$$

本式が (3.1) の第二条件を満足する事は容易に知られる。

(B) Bilge Keel ある場合

(2.8) より絶対値 r を求めることが容易でない。級数展開をしても収斂が非常に悪いから，此処では次の様な近似函数を考えた。(附録1参照)

$$w_r=\frac{i}{2}\omega\frac{z^2}{\zeta^2}=\frac{1}{4}i\omega\frac{M^2}{\zeta^2}\left[p^2(1+2c-3c^2)\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+c^2p^6\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^3\right.$$
$$\left.+\left\{(1-c)^2-c^2p^4\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^2\right\}\sqrt{p^4\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^2-4}\,\right] \tag{3.3}$$

この函数は (3.1) の第二条件は満足するが第一条件は満足せず

$\rho=1$ に於て $\psi_r=\frac{1}{2}\omega r^2\cos 2(\varphi-\vartheta)$

となる。即ち正しい r よりも $\sqrt{\cos 2(\varphi-\vartheta)}$ だけ小さい。この誤差は $(\varphi=0,\ \vartheta=0)$ 及び $\left(\varphi=\frac{\pi}{4},\ \vartheta=\frac{\pi}{4}\right)$ 即ち Bilge Keel の先端と船体中心線では 0 であるが，其他の点では p 及び c が大となる程大きくなる。然し (3.3) なる複素 potential 函数に対応する正確な z を知ることは w_r 正しく求め得なかつたと同様に困難であるから，絶対値 r の減少はわかつても其の偏角が不明で図形に正確に表わすことは出来ない。そこで (3.3) を使うことによる誤差を別の方面から検討する意味で，動揺に伴う見掛けの慣性 moment の増加を計算して見よう。(3.3) に於て $p=1$ とすると (実は $p=1$ は p による誤差のない時であるが)

$$w_r=i\omega M^2\left(c\zeta^{-4}+\frac{1}{2}c^2\zeta^{-8}\right) \tag{3.4}$$

これと (3.2) を比較すると第二項が誤差である。

水による見掛けの慣性 moment の増加を δI とすると，これと水の運動勢力 T との間にはよく知られている様に

$$\delta I=\frac{2}{\omega^2}T=\frac{\gamma}{\omega^2}\int\psi_r d\phi_r=-\frac{i\gamma}{2\omega^2}\int w_r d\bar{w}_r$$

但し γ＝水の密度

$$\left.\begin{array}{lll}(3.3)\ \text{によると} & & \delta I=4\pi\gamma M^4c^2\\ (3.4) & // & \delta I=4\pi\gamma M^4c^2\left(1+\frac{1}{2}c^2\right)\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

$c\doteqdot 0.1$ の程度であるから，δI の誤差は 0.5% 位に止まる。

上述のことから (3.3) の近似函数を使つてもよいものとしよう。

4. 渦運動の実験的分類

渦運動の大体の模様を知る為めに予備実験を行つた。一辺の長さ 30 糎，深さ 50 糎の模型に Bilge Keel を附し，之を垂直にして上端を水面より出し，船の動揺に準じて単振動的に回転させると，其の方向に応じて各 Bilge Keel 背面に渦を生ずる。これを観測した結果は

(1) 渦の位置が Bilge Keel を余り遠去からぬ限り，一枚の Bilge Keel 背面には只1個の渦に限り，Bilge Keel 先端から不連続面は現われない。然し振幅が大きい場合には，動揺後半には渦が相当に Bilge Keel を離れるから次第に不連続面がはつきりして来て所謂死水領域の観を呈し，終には不連続面上に数個の小さい単独渦が認められることもある。又死水領域の出来る時には Bilge Keel 附根附近に船体彎曲に依る剝離が起つて逆方向の二次的な渦が発生している。

(2) 主渦の発生時期は動揺が逆になる瞬間に一致し，しかも始めから相当の強さと見えるものが Bilge Keel 先端から若干離れた位置に来る。この現象は動揺が減速範囲に入れば発生するのではないかと云う予想を裏切るもので入念に観察したが変らなかつた。但し動揺を衝動的に停止すると逆転しなくても反対側に発生する。

(3) Bilge Keel の深さが或る値(予備実験では $p \doteqdot 1.015$) より大きいか小さいかによつて動揺終期に於ける渦の運動は全く変つて来る。大きい場合には外見的に渦の強さは殆んど衰えずに動揺逆転迄持続され逆転後は急に半径方向の速度を得て diagonal の方向に流去る。又渦以外の流体も船体中心線附近は内向き,彎曲部では外向の一般流となつているが,これは渦の誘導によるものか側壁の影響に依るものか不明である。流去る渦はしばらく其の勢力を維持するから4個位迄同時に存在し,其の配列は Kàrmàn の渦列様の場合もあるし2個宛が渦対の形をとることもある。前者の配列の時は正しく diagonal に進行するが後者の時には両者が強さが異る為め曲線を画く。斯様に流去り方が別れるのは振幅に関係があるらしく,大体に於て大振幅の時は Kàrmàn 渦型となり易いが,確定的なものではなく僅かの攪乱によつても型が反対に変ることがある。

(4) Bilge Keel が或る特定値よりも小さい場合には動揺の終りには渦は非常に衰弱し,其の附近には逆方向の渦もあつて其の形が崩れ勝ちとなり,動揺反転後間もなく新しい主渦に巻込まれて消滅する。この場合は一般流の方向が (3) の場合と逆になり diagonal 方向から流込み中心線方向に流出している。一般の実船の Bilge Keel の大きさは皆この (4) の場合に入る。

(5) 渦の通路は (3), (4) 何れの場合も逆転迄は略同様で,大体 Bilge Keel 先端を通る円周上にあつて,初期には殆んど停止しているが,次第に船と同一方向に進行する。異る点は逆転後の運動で一方は半径方向に速度を増すに対し他方は新しい渦に巻込まれること前述の通りである。

以上は予備実験の結果で数量的な関係は今後の実験にまたねばならないが,本計算は (4) の場合を対象としたものである。以下 (4) の現象を計算に便利な次の様な形に仮定することを検討する。

(a) 渦は Bilge Keel 1枚に対し1個のみとする。

このことは (1) に述べた二次的な渦を省略したことになるが,Bilge Keel が浅い時には其の影響は必ずしも小さくないかも知れない。又逆転後小時間の間は前の渦が残つているのであるが,この方は非常に弱いと見られるから影響は殆んどないであろう。元来此の様に二次的な渦を無視し,しかも (2) に述べた様に逆転の瞬間に新しい渦が発生すると考える場合には船体周辺の循環は逆転直前には 0 とならねばならぬから,逆転後に外見的には渦が残つている様に見えても,其の近傍全体を包む循環は0となつて居ると見るのが正しい筈である。

(b) 渦の強さは定常運動に於ける Joukowski の説によつて定められるとする。即ち Bilge Keel 端の速度は連続且つ有限で其の方向は翼面に切線となる。

渦の位置が Bilge Keel から遠くない間は (1) によつてこの条件が満足されていると見られる。従つて振幅の小さい場合若しくは大振幅でも動揺初期にはこの取扱でよいが,不連続面が現われ死水領域が出来る様になれば Wagner* の様に不連続面の渦動を入れるか, Helmholtz 流の不連続流として取扱う可きものであろうが,何れも此の場合計算困難である。それで (b) を死水領域の有無に関せず使うとすれば,主渦の強さを常に大きく取過ぎる代りに不連続面上の渦動は無視したことになる。この影響は量的には不明であるが,主渦が弱過ぎる程不連続面の渦動は強くなる筈で,両者の影響は互に打消す方向にあるから無視出来るものとしよう。

(c) 渦の通路は (5) に述べた円周上にありとする。

以上 (a), (b), (c) 3個の仮定は必ずしも適切ではないかも知れないが,第一近似的には成立すると見てよいであろう。この程度でも計算は可成り面倒なのである。

5. 渦を考慮した時の複素 potential 函数

船が ω なる角速度で回転する時 z 面の一つの Bilge Keel 背面に出来る渦の位置を z_0, 其の強さを $-\kappa$ とすれば,残りの各 Bilge Keel 背面にも夫々 $-z_0$, $\pm iz_0$ なる位置に $-\kappa$ なる渦が存在する。而して系全体としては元来循環が無かつたのであるから,κ の消長如何に拘らず全体としての循環は 0 でなければならぬ。このことを ζ 面の単位円で考えると z_0 に対応する点を ζ_0 とする時やはり $\pm\zeta_0$, $\pm i\zeta_0$ に $-\kappa$ なる渦があり又夫等と鏡像をなす位置 $\pm\zeta_0'$, $\pm i\zeta_0'$ にも $+\kappa$ なる渦があるとすればよい。従つて之等の渦による流体運動の複素 potential 函数 w_v は次の様になる。

$$w_v=-\frac{i\kappa}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0)(\zeta+\zeta_0)(\zeta-i\zeta_0)(\zeta+i\zeta_0)+\frac{i\kappa}{2\pi}\log(\zeta-\zeta_0')(\zeta+\zeta_0')(\zeta-i\zeta_0')(\zeta+i\zeta_0')$$

$$=\frac{i\kappa}{2\pi}\log\frac{\zeta^4-\zeta_0'^4}{\zeta^4-\zeta_0^4} \tag{5.1}$$

* Zeitsch. angew. Math. u. Mech. 5, 1925.

但し　$\zeta_0=\rho_0 e^{i\varphi_0},\quad \zeta_0'=\dfrac{1}{\rho_0}e^{i\varphi_0}$

(3.3), (5.1) 何れも座標軸は船体に固定してあるから，船体の動揺をも併せ考えた全体の複素 potentiai 函数 w は両式を加え合せて

$$w=w_r+w_v=\frac{i}{4}\omega M^2\frac{1}{\zeta^2}\Bigg[p^2(1+2c-3c^2)\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+p^6c^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^3$$
$$+\left\{(1-c)^2-p^4c^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^2\right\}\sqrt{p^4\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)^2-4}\,\Bigg]+\frac{i\kappa}{2\pi}\log\frac{\zeta^4-\zeta_0'^4}{\zeta^4-\zeta_0^4} \tag{5.2}$$

次に渦の強さを定める。第四章 (b) の仮定により

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\zeta=1}=\text{finite}\qquad \text{或は}\quad \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=1}=0$$

計算の結果は

$$\kappa=\frac{\pi\omega M^2}{2}lK \tag{5.3}$$

但し　$l=2p^2(1-c^2)+(p^2-\sqrt{p^4-1})\{4c^2p^4-(1-c)^2\}$

$$K=\frac{(1-\zeta_0'^4)(1-\zeta_0^4)}{\zeta_0'^4-\zeta_0^4}=\frac{(\rho_0^4-1)^2+4\rho_0^4\sin^2 2\varphi_0)}{\rho_0^8-1}$$

上式に於ては M 及び l は c 及び p により余り変化しないから κ を大きく支配するものは渦の位置である。そして ρ_0 が 1 に近い程同一の φ_0 に対し κ が大となるが，渦が一つの円周上にあるとする仮定に従えば これは Bilge Keel が浅い程 κ が大きいことになる。(φ_0 が同一であつても p が変れば渦の実際の角変位は同一ではないが) このことは吾人の経験に矛盾する様であるが，実は後に述べる様に p の小さい時は φ_0 も小さくならねばならぬと予想されるのであつて此処で速断は出来ない。又 $p=1$ として Bilge Keel の無い場合にも $\kappa\neq0$ であるが，これは Joukowski 説に従う限り止むを得ない結果である。

6.　渦の速度及び通路

渦自身の運動に対する複素 potential は例えば z_0 の渦に就ては (5.2) より

$$w_0=w_r+w_v+\frac{i\kappa}{2\pi}\log(z-z_0) \tag{6.1}$$

従つて ζ 面で見た渦の速度の実軸及び虚軸方向の値を夫々 u_ζ, v_ζ とすると

$$-u_\zeta+iu_\zeta=\left(\frac{dw_0}{d\zeta}\right)_{\substack{\zeta=\zeta_0\\ z=z_0}}$$
$$=\left(\frac{dw_r}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}+\frac{i\kappa}{2\pi}\left\{\frac{4\zeta_0^3}{\zeta_0^4-\zeta_0'^4}-\frac{3}{2\zeta_0}\right\}+\frac{i\kappa}{2\pi}\left(\frac{d^2z}{d\zeta^2}\Big/2\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0} \tag{6.2}$$

若し κ が一定であり，且つ渦は z_0 のもののみが自由渦で他は固定渦と考えられる場合には Lagally* の公式によつて積分演算を行わずして渦の通路が求められる。然し此処ではこの様な仮定は許されないから，積分を行わねば通路は求められないが，(6.2) は非常に複雑で演算が困難であるし，又演算出来るとした処で第 4 章 (a) に述べた様に，動揺の終期では渦は最早単独渦と見ることは無理で，只或範囲の閉曲線に沿うてとつた循環が (5.3) で与えられる単独渦と等価であると見る可きであるから，閉曲線の近傍でなければ単独渦としての取扱が許されても渦自体の運動を論ずる場合には用をなさぬと考えられる。これ等の理由によつて (6.2) を解くことは断念する。

然し (6.2) から次の様な事が云える。(6.2) の右辺の各項とも ω が掛つているから，動揺の終期で単独渦と見得ると否とを問わず渦の速度は常に ω に比例する。(6.2) は絶対速度であるが，これに座標系の回転による修正を行つてもこの結論は変らないから，船体に対する関係速度に就ても同様である。従つて渦の通路の形は ω に無関係で船型と動揺振幅が与えられれば一義的に決定される筈である。

之等の性質は実験に於て変数一個が減ることとなり，非常に都合のよいことである。

さて理論的に渦の運動が決定されないので実験に依らねばならぬが，其の第一近似として第四章 (c) に述べた様に渦の通路は Bilge Keel 先端を通る円周上にあるとしよう。勿論これだけでは渦の速度が未定であるが，こ

* Math. Zeitschr. 10. 1921.

方はもつと精密な実験を必要とするので次回に廻し本報告では通路だけを仮定した結果を求めることにする。

仮定した渦の通路を ζ 面で表わすと次の様になる。(附録 2 参照)

$$\varepsilon=\frac{\varphi_0}{\sqrt{1+A\varphi_0^2}},\quad \vartheta_0=\frac{B\varphi_0^2}{\sqrt{1+A\varphi_0^2}} \tag{6.3}$$

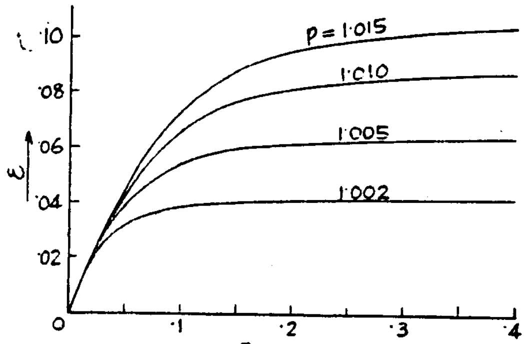
$$\varepsilon=\rho_0-1$$

$$A=\frac{\left\{2\frac{r_0}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}\left\{\frac{r_0}{M}p^{1/2}(1+9cp^2)-16cp^4\right\}}{\frac{r_0}{M}\left\{\frac{r_0}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}^2}$$

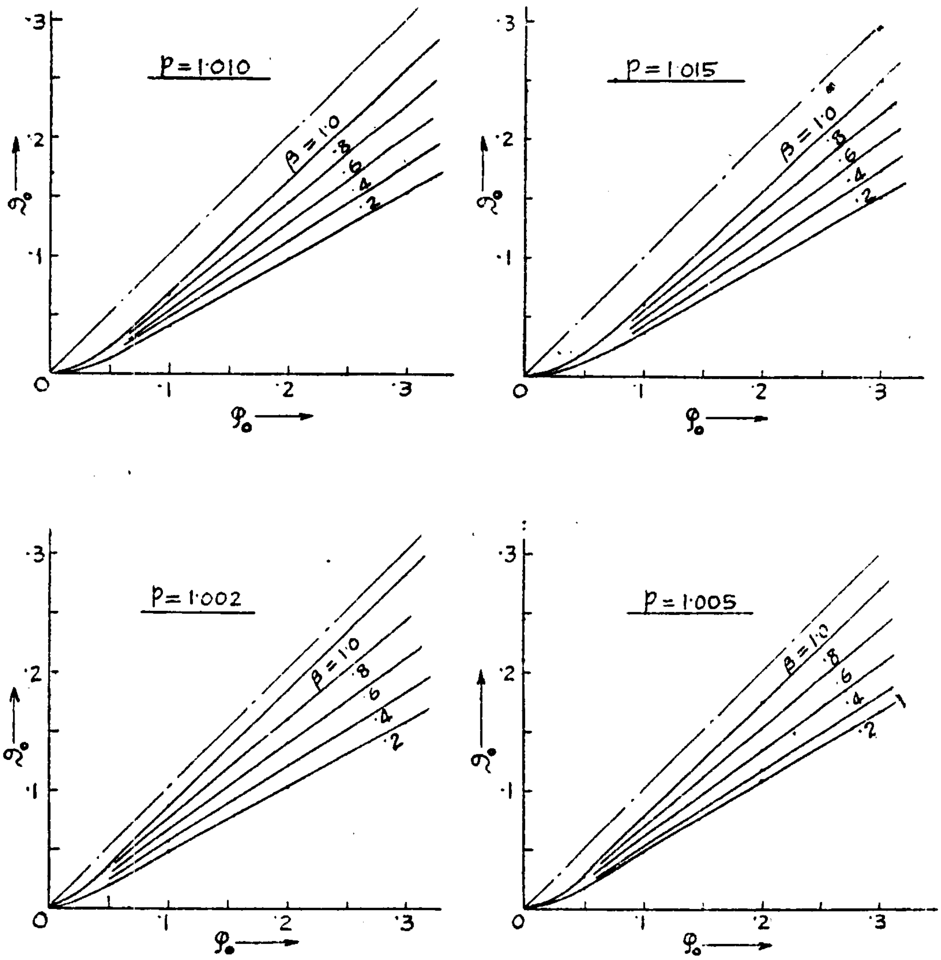
$$B=\frac{\left\{\frac{r_0}{M}p^{1/2}(1+9cp^2)-16cp^4\right\}}{\frac{r_0}{M}\left\{\frac{r_0}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}}$$

$$\frac{r_0}{M}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\{(1-c)+2cp^2\}\sqrt{p^2+1}+\{(1-c)-2cp^2\}\sqrt{p^2-1}\right]$$

但し，この結果は ε, φ_0, ϑ_0 何れも大ならずとした近似値である。数値計算の結果は A は C (即ち β) により殆んど影響を受けず，従つて ε に対しては尚更であるから，爾後は全て $\beta=0.4$ の時の ε を採ることとした。第 4 図は ε を第 5 図は ϑ_0 を示す。



第 4 図



第 5 図

7. 船体の受ける moment

Morris* は二次元運動に関する抵抗の一般式を発表している。それによると回転運動に於ける抵抗 moment は次式で与えられる。即ち moment を M, 函数の実部を $\Re$ なる記号で表わすことにすれば

$$M=\frac{1}{2}\gamma\Re\left[\oint\omega^2\bar{z}^2\bar{z}d\bar{z}-\oint\left(i\omega\bar{z}-\frac{dw}{dz}\right)^2 zdz\right.$$
$$\left.+\oint\left(\frac{\partial w}{\partial\omega}\dot{\omega}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\omega}\dot{\omega}+\frac{\partial w}{\partial z_0}\dot{z}_0+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z_0}\dot{z}_0\right)z\,d\bar{z}\right] \tag{7.1}$$

右辺の第一項及第二項は定常状態に応ずるものであり，第三項は非定常に応ずるものである。積分は船体の周辺を一周する。上式を変形して（附録3参照）

$$M=\gamma\Re\left[-\frac{1}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz+\frac{d}{dt}\oint\phi z d\bar{z}\right] \tag{7.2}$$

但し　$w=\phi+i\psi$

(A) 第一積分

(7.2) の第一項は定常運動に関する Blasius の公式と同じものであるから，Lagally の公式によつて直ちに

$$-\frac{1}{2}\gamma\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 zdz=-4\gamma\kappa z_0(u_z-iv_z)$$

ここで u_z, v_z は z_0 の渦の x 軸及び y 軸方向の分速度で渦の座標 x_0, y_0 の変化と座標系の速度との和で表わされる。即ち

$$u_z=\dot{x}_0-\omega r_0\sin\vartheta_0$$

$$v_z=\dot{y}_0+\omega r_0\cos\vartheta_0$$

$$\therefore\quad u_z-iv_z=\dot{\bar{z}}_0-i\bar{z}_0\omega$$

$$z_0(u_z-iv_z)=r_0\dot{r}_0-ir_0^2(\omega+\dot{\vartheta}_0)$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\gamma\Re\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 zd\bar{z}=-4\gamma\kappa r_0\dot{r}_0 \tag{7.3}$$

(B) 第二積分

(7.2) の第二積分は実函数として取扱わねばならぬので面倒であるが，近似計算の結果は次の様になる。（附録4参照）

$$\oint\phi zd\bar{z}=-4p^2M^2\left[\omega M^2\left\{\pi c^2+\frac{\pi}{8}(1+8c)k^2+\frac{1}{3}k^3\right\}\right.$$
$$+\frac{\kappa}{\pi}\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}(X-Y-Z)\right.$$
$$\left.\left.+2p^4c(4\varepsilon^2+k^2-\sin^2 2\varphi_0)X-p^2cL+p^2c(\pi-2k)N\right]\right]$$

此処で　$k^2=1-\dfrac{1}{p^4}$

$$X=\frac{1}{p^2}\left[\tan^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{4}\right)\tan(k-2\varphi_0)\right\}+\tan^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{4}\right)\tan(k+2\varphi_0)\right\}\right]$$

$$Y=(1+2\varepsilon^2)\cos 2\varphi_0\left[\tan^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{4}\right)\sin(k-2\varphi_0)\right\}+\tan^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{4}\right)\sin(k+2\varphi_0)\right\}\right]$$

$$Z=(2\varepsilon-\varepsilon^2)\sin 2\varphi_0\left[\tanh^{-1}\{(1-2\varepsilon^2)\cos(k-2\varphi_0)\}-\tanh^{-1}\{(1-2\varepsilon^2)\cos(k+2\varphi_0)\}\right]$$

$$L=(2\varepsilon-\varepsilon^2)\sin 4\varphi_0\log\frac{\sin^2(k-2\varphi_0)+4\varepsilon^2\cos^2(k-2\varphi_0)}{\sin^2(k+2\varphi_0)+4\varepsilon^2\cos^2(k+2\varphi_0)}$$

$$N=2(2\varepsilon-\varepsilon^2)\cos 4\varphi_0$$

$$\therefore\quad \gamma\frac{d}{dt}\oint\phi zd\bar{z}=-2\gamma p^2M^2\left[\left[\dot{\omega}\left\{2\pi c^2+\frac{\pi}{4}(1+8c)k^2+\frac{2}{3}k^3\right\}\right.\right.$$
$$\left.+l\dot{\omega}\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}KU+cKV\right]\right.$$

* Phil. Mag. 1937, p. 445.

$$+l\omega\dot{\varphi}_0\left[\left\{\qquad\qquad //\qquad\qquad\right\}(K'U+KU')+c(K'V+KV')\right]\qquad(7.4)$$

但し　$U=X-Y-Z$

$V=2p^4(4\varepsilon^2+k^2-\sin 2\varphi_0)X-p^2\{L-(\pi-2k)N\}$

$K',\ U',\ V'=$夫々 φ_0 による微分係数

全体の moment M は (7.3), (7.4) を加えて

$$M=-4\gamma\kappa r_0\dot{r}_0$$
$$-2\gamma p^2M^4\ \dot{\omega}\left\{2\pi c^2+\frac{\pi}{4}(1+8c)k^2+\frac{2}{3}k^3\right\}$$
$$+l\dot{\omega}\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}KU+cKV\right.$$
$$\left.+l\omega\dot{\varphi}_0\left[\left\{\qquad\qquad //\qquad\qquad\right\}(K'U+KU')+c(K'V+KV')\right]\right]\qquad(7.5)$$

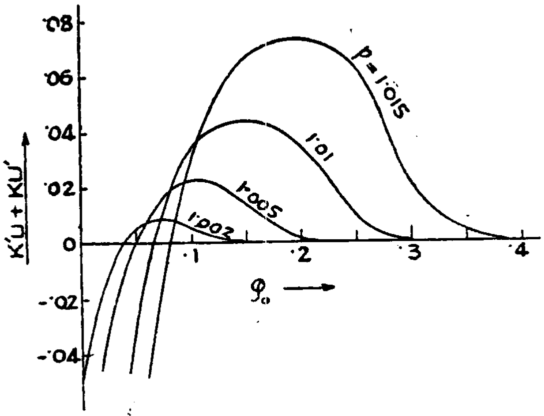
この式の右辺第二項は $\dot{r}_0=0$ として求めたものであるが，仮令 $\dot{r}_0\neq0$ であつても其の量が僅少であるならば其為に起る誤差は無視し得るものと見られるから，第四章(4)の場合には本式は一般的に成立するとしてよい。先ず $\dot{\omega}$ に比例する項は所謂水による見掛けの慣性 moment であるが，其の値は φ_0 に関係があるから船型がきまつても一定にはならない，残余の項は $\dot{r}_0$ 或は $\dot{\varphi}_0$ に比例しているが第六章に述べた様に之等は何れも ω に比例するから，結局 ω^2 に比例する抵抗 moment であつてこれ亦船型だけでは決まらない。以下 $\dot{r}_0=0$ として第一項を省き，残余の項に就て之等の性質を調べる。

8. ω^2 に比例する抵抗 moment

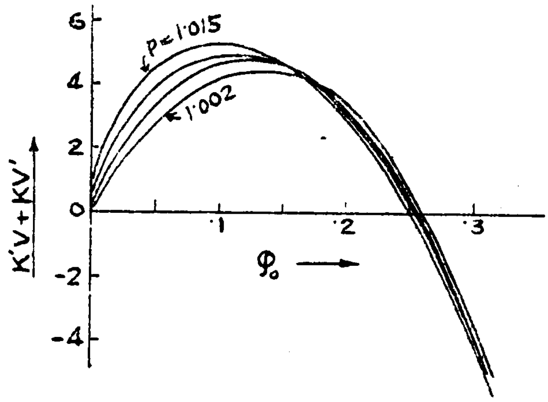
(7.5) に於て ω^2 に比例する項を M_ω と書くと

$$M_\omega=-2\gamma p^2M^4l\omega\dot{\varphi}_0\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}(K'U+KU')+c(K'V-KV')\right]\quad(8.1)$$

この式の右辺第一項は Bilge Keel 両面の圧力差による moment であり，第二項は船体部分の圧力によるものである。第6図及び第7図は夫々 ($K'U+KU'$) 及び ($K'V+KV'$) を示す。之等の図から次の様な推論が出来る。



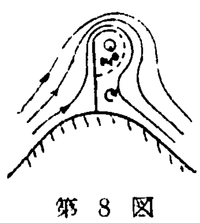
第　6　図



第　7　図

(1) $\dot{\varphi}_0$ を除いて考えると，Bilge Keel の深さが船体部分の圧力に依る moment に及ぼす影響も，逆に bilge circle の半径が Bilge Keel に依る moment に及ぼす影響も共に小さい。即ち互に作用が独立に近い。

(2) 第6図で注目すべき点は φ_0 の小さい部分で負値をとることであつて，これは Bilge Keel による抵抗が運動と同方向に働くことを示す。この現象は次の様に解釈することが出来る。運動の初期に於て φ_0 が小さい間は流線の形は第8図の様になり，Bilge Keel の背面に岐点が存在するが，この点より先端部は圧力が低下しても内側では高くなるから，全体としては抵抗が必ずしも正値をとるとは限らないのである。勿論斯様な時には船体の Bilge 附近も高圧を受けるが，圧力の方向が殆んど船体中心に向う



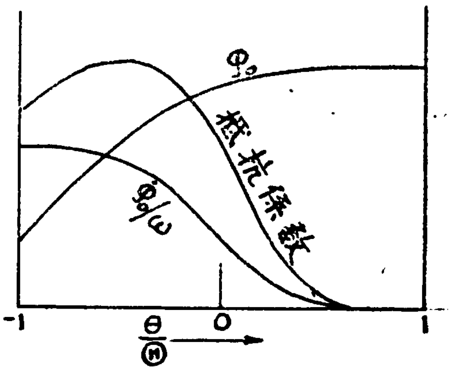
第　8　図

為め moment としては大とならないものと予想され，事実第7図では負値を取る迄には至つていない。

然しこの負抵抗と云う現象は実際には恐らく現われないであろう。第8図点線のすぐ外側の流線は凹部に沿うて流れなければならぬが，これは直ちに剝離を起して図示の様な方向の渦を生じることは日常経験する処である。この新しい渦は元の渦と方向が同一であるから一つに融合して大きな渦となり，Joukowski の条件に合う様な新しい位置に移動するであろう。事実第四章(2)にも述べた様に運動の出発点附近では渦が除々に発達するとは見られず，瞬間的に相当の大きさのものが翼先端から若干離れた位置に発生する様に見えるのである。新しい渦の位置は理論的に求めることは困難であるが，moment$=0$ となる φ_0 よりは若干大きな値となるであろう。

（3） 第7図の特徴は $\varphi_0>.25$ で負値をとることであるが，これも実際には想像出来ない現象である。若し船体部の受ける圧力 moment が負になるとすればそれは $\varphi_0>\dfrac{\pi}{4}$ である筈である。この不合理をなくする為にはに$\varphi_0>.25$ に対して $\dot{\varphi}_0$ が負になるか，或は $\varphi_0\doteqdot .25$ 迄に漸近的に $\dot{\varphi}_0\to 0$ となるかしかない。然るに前者の場合には第6図と比較し見ると p の大なる時には Bilge Keel による moment が負になる結果となり，やはり不合理と考えられ，結局後者の $\dot{\varphi}_0\to 0$ の方を採用すべきであることが知られる。

$\dot{\varphi}_0$ に対する上の予想から φ_0 及び抵抗係数を画くと第9図の様な形となるであろう。此処で横軸の θ は動揺角，Θ は振幅で $\theta/\Theta=-1$ に於て $\dot{\varphi}_0/\omega=1$，φ_0 は(2)に述べた新しい渦の位置である。抵抗係数は動揺の初期には相当の大きさであるが，間もなく減少し振幅がある程度以上になると 0 の状態が存在する。又其の平均値をとつて考えると，ある振幅以上では振幅が増す程抵抗係数が小さくなるとも云える。この性質は加藤　弘博士* の実験結果にも一致している。



第 9 図

（4） Bilge Keel による抵抗 moment と船体部分によるそれとを比較する。この為めに M_ω による勢力損失 E_ω を出すと

$$E_\omega=\int M_\omega d\theta=\int M_\omega\frac{d\theta}{d\varphi_0}d\varphi_0$$

$$\text{然るに}\quad \int\omega\dot{\varphi}_0\frac{d\theta}{d\varphi_0}d\varphi_0=\int\omega^2 d\varphi_0\quad\text{なる故}$$

$$E_\omega=-2\gamma p^2M^4l\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}\int\omega^2(K'U+KU')d\varphi_0\right.$$
$$\left.+c\int\omega^2(K'V+KV')d\varphi_0\right]\tag{8.2}$$

今仮りに $c=0.1$ として見ると $p\doteqdot 1.01$ で第一項と第二項の値が略等しく，p が小さくなる程又 c が大きくなる程第二項の方が大きくなる。これを実船で云うと $c_{\boxtimes}\doteqdot .95$, $\overline{BK}\doteqdot 0.1$ 位で両者が略等しくなるのであるから普通の商船なら殆んど全部船体部分の受ける moment の方が大きいことになる。従つて Bilge Keel の減揺効果はそれ自身が moment を受持つことは勿論であるが，それよりは寧ろ渦を発生させる道具としての方が重要で，抵抗 moment 自体は船体部の方が其の大部分を荷つているのである。この意味に於て痩せた船が深い Bilge Keel を持つているのは合理的であるが，前進抵抗を最小ならしめる為めには $c_{\boxtimes}$ と $\overline{BK}$ との割合は普通採用されているものとは変つたものであるべきかも知れない。

9. 見掛けの慣性 moment の増加

(7.5) に於て $\dot{\omega}$ に比例する項を M_l，水に依る慣性 moment の増加を δI とすると負符号を除いて

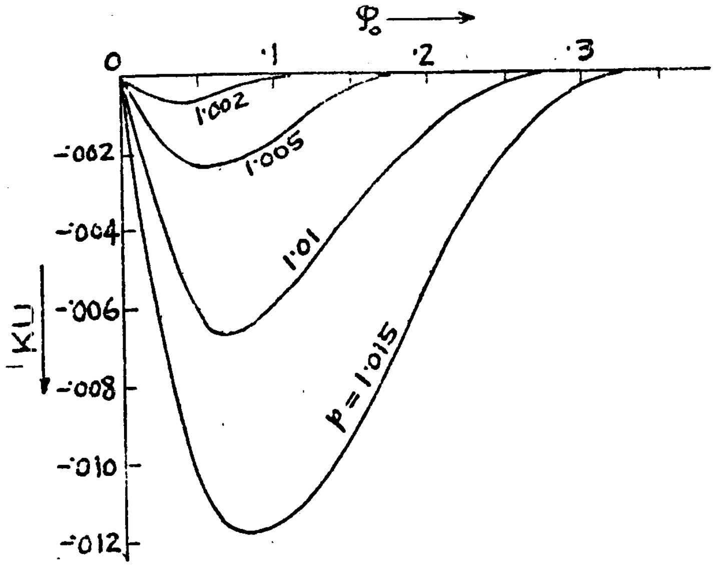
$$M_l=\dot{\omega}\delta I$$

$$\delta I=2\gamma p^2M^2M^4\left[\left\{2\pi c^2+\frac{\pi}{4}(1+8c)k^2+\frac{2}{3}k^3\right\}\right.$$
$$\left.+l\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}KU+cKV\right]\right]\tag{9.1}$$

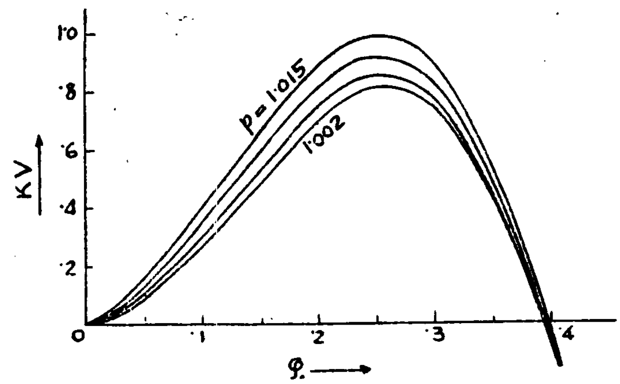
* 造船協会々報 第六十六号 昭.15, 6月

右辺第一項は渦を考えぬ場合に相当するが，更に Bilge Keel の無い場合には $k=0$ であるから，(3.5) の結果と一致している。Bilge Keel による影響は $c=0.1$ の時 $p\fallingdotseq1.01$ で船体部によるものと略等しくなる。

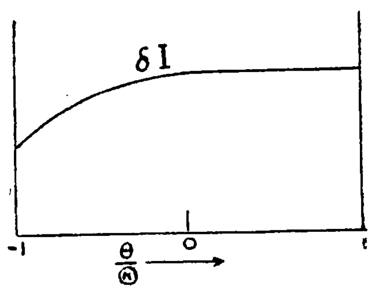
(9.1) の第二項は渦の影響である。第 10 図及び第 11 図に夫々 KU 及び KV を示す。之等の図に於て横軸の φ_0 は第 8 章に述べた様に動揺の初めから或値をもち，又 0.25 以上にもなり得ないのであるから KU, KV 共にφ_0に対して単調に増加する函数と見られる。Bilge Keel と bilge cirle の半径とが殆んど影響し合わないこ



第 10 図



第 11 図



第 12 図

とは第 8 章 (1) の場合と同様である。(9.1) の大体の様子は第 12 図に示す如く動揺の終り程大きくなるが，振幅が或る限度を越えると一定値を取る。c は其の値に略比例して δI を大きくするが，p は其の大小を問わず動揺の前半では δI を減少させるから，δI に対する Bilge Keel の効果は大したものではなく，それの発生させた渦を介して船体部から受ける効果の方が遙かに大きい。

上述の様に δI が動揺角に関して対象でないことは普通に云う慣性抵抗と異つて動揺の半週期毎に勢力の授受が 0 がにならぬ事を示している。今の場合勢力の利得があつて其の大きさを E_i とすると

$$E_i=-\int\dot{\omega}\,\delta I\cdot d\theta=-\int\delta I\cdot\omega\cdot d\omega=-\frac{1}{2}\delta I\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\int\omega^2\cdot\delta I'\cdot d\varphi_0$$

此処で積分の極限を $\theta=-\Theta\sim\Theta$ とすれば第一項は 0 となるから

$$E_i=\gamma p^2M^4l\left[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}\int\omega^2(K'U+KU')d\varphi_0+c\int\omega^2(K'V+KV')d\varphi_0\right]\tag{9.2}$$

$$=-\frac{1}{2}E_\omega$$

即ち抵抗 moment による勢力損失の半分は負の慣性抵抗を通じて船に回収されることがわかる。これを防ぐには Bilge Keel を深くして第 4 章 (3) の様に渦が流去る様にせねばなるまい。

10. 結　　論

緒論に述べた種々の仮定を基とし，しかも数値的には今後の実験に待たねばならぬが，一応渦を考慮に入れて Bilge Keel と bilge circle とが船の動揺抵抗に如何様に影響するかを求めた。其の結果を要約すると

（1） 角速度に関係する抵抗 moment は ω^2 に比例する項のみしかない，抵抗係数は普通に考えられている様な船型にのみ関係する常数ではなく動揺の初期には大きく，終期には小さくなり振幅が或る限度（之は船の形状により定まる）を超える場合には動揺の終期の或る範囲にわたり，抵抗が 0 ともなり得る。従つて半週期の平均を考えると振幅が大きい程抵抗係数は小さくなる。

（2） 見掛の慣性 moment の増加は動揺角と共に増加して或る一定値に接近する。従つて動揺角に対し対称でないから勢力の利得を伴い，其の大きさは ω^2 に比例する抵抗 moment のなす仕事の半分である。これは抵抗による勢力損失が船に回収せられることで動揺制止の見地からは面白くない性質である。

（3） Bilge Keel は特に深くない限り渦の発生装置として重要なのであつて，抵抗 moment に対する寄与は bilge circle の方が大である。この bilge circle の効果は，c に略比例するから bilge circle の半径に対しても略比例すると云える。

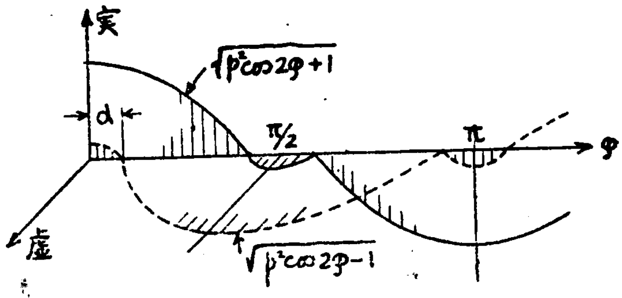
終に色々御援助下さつた浪速大学菱田敬男助教授並に藤永田造船所宮崎守次工学士に厚く御礼を申上げる。

附録 1.

(2.8) より

$$z_{\rho=0}=\frac{M}{2}\left[\{(1-c)+2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi+2}+\{(1-c)-2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi-2}\right]$$

此処で両平方根は第 13 図に示す様に ±実，±虚を循環的に取らしめねばならぬ。即ち $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$ を中心として $2\alpha\left(\equiv\cos^{-1}\frac{1}{p^2}\right)$ の間は両平方根は共に実或は虚であるが，其他の φ に対しては一方が実他方が虚となる。前者の部分が Bilge Keel に相当し，後者の部分が船体に相当する。今 $\varphi=0$ を中心として考えると



第 13 図

Bilge Keel 部分 $$r=\frac{M}{2}\left[\{(1-c)+2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi+2}+\{(1-c)-2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi-2}\right]$$

船体部分 $$r=\frac{M}{2}\left[\cos\vartheta\{(1-c)+2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi+2}-i\sin\vartheta\{(1-c)-2cp^2\cos 2\varphi\}\sqrt{2p^2\cos 2\varphi-2}\right]$$

となり，$\varphi=\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$ を中心とする附近では船体部分は上と同じ式が出来るが，Bilge Keel 部分では夫々 $-i,\ -1,\ i$ を乗じなければならぬ。これを防ぐ為めに

$$r=\Re\left[\frac{z}{\zeta}\right]_{\rho=0} \tag{i}$$

と置けば，次の様になつて Bilge Keel 部分の方向性はなくなり，代りに全体として若干の誤差が入つて来る。

Bilge Keel 部分 $$r=\frac{M}{2}\left[\{\quad\}\sqrt{\quad+\quad}+\{\quad\}\sqrt{\quad-\quad}\right]\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -i\sin\varphi\end{pmatrix}$$

船　体　部　分 $$r=\frac{M}{2}\left[\cos\varphi\{\quad\}\sqrt{\quad+\quad}-i\sin\varphi\{\quad\}\sqrt{\quad-\quad}\right]$$

今この誤差が小さいとすると（i）より容易に

$$w_r=\frac{i}{2}\omega\frac{z^2}{\zeta^2} \tag{3.3}$$

附録 2.

(2.8) から ζ を z の函数として正確に解出することは困難であるから近似計算を行う。渦の位置は $\zeta=1$ の近傍であるから，

$$\sqrt{p^2\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+2} \doteqdot p^{1/2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$$

之を (2.8) に入れて計算すると

$$\frac{z^2}{M^2}-\frac{z}{M}p^{\frac{1}{2}}\left[\{1+c(p^2-1)\}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+cp^2\left(\zeta^3+\frac{1}{\zeta^3}\right)\right]$$
$$+(1+c^2)+2c(p^4-1)+cp^4\left(\zeta^4+\frac{1}{\zeta^4}\right)=0 \qquad \text{(i)}$$

ここで $z=re^{i\vartheta}$, $\zeta=\rho e^{i\varphi}$, $\rho=1+\varepsilon$ として ε^2 迄とつて計算しこれを実部及び虚部に分けると

$$\frac{r^2}{M^2}\cos 2\vartheta-\frac{r}{M}p^{1/2}[\cos\vartheta\{(2+\varepsilon^2)(1+c(p^2-1))\cos\varphi+cp^2(2+9\varepsilon^2)\cos 3\varphi\}$$
$$-\sin\vartheta\{\varepsilon(2-\varepsilon)(1+c(p^2-1))\sin\varphi+3cp^2\varepsilon(2-\varepsilon)\sin 3\varphi\}]$$
$$+2cp^4(1+8\varepsilon^2)\cos 4\varphi+(1+c^2)+2c(p^4-1)=0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{r^2}{M^2}\sin 2\vartheta-\frac{r}{M}p^{1/2}[\cos\vartheta\{\varepsilon(2-\varepsilon)(1+c(p^2-1))\sin\varphi+3cp^2\varepsilon(2-\varepsilon)\sin 3\varphi\}$$
$$+\sin\vartheta\{(2+\varepsilon^2)(1+c(p^2-1))\cos\varphi+cp^2(2+9\varepsilon^2)\cos 3\varphi\}]$$
$$+4cp^4\varepsilon(2-\varepsilon)\sin 4\varphi=0 \qquad \text{(iii)}$$

又渦が円周上にありとする故 $r=\text{constant}$ で (i) に $\vartheta=0$, $\varphi=0$ を入れた次式を満足せねばならない

$$\frac{r^2}{M^2}-2\frac{r}{M}p^{1/2}\{1+c(2p^2-1)\}+(1-c)^2+4cp^4=0 \qquad \text{(iv)}$$

(iv) を (ii) 及び (iii) に入れ且つ $\cos n\vartheta=1-\frac{1}{2}n^2\vartheta^2$, $\sin n\vartheta=n\vartheta$ 等として φ, ϑ, ε の三次以上を省略すると

$$2\frac{r^2}{M^2}\vartheta^2-\frac{r}{M}p^{1/2}\{(1+cp^2)\vartheta^2+(1+9cp^2)(\varphi^2-\varepsilon^2)\}+16cp^4(\varphi^2-\varepsilon^2)=0$$

$$\frac{r^2}{M^2}\vartheta-\frac{r}{M}p^{1/2}\{\varepsilon\varphi(1+9cp^2)+\vartheta(1+cp^2)\}+16cp^4\cdot\varepsilon\varphi=0$$

両式を解けば

$$\varepsilon=\frac{\varphi}{\sqrt{1+A\varphi^2}}, \qquad \vartheta=\frac{B\varphi^2}{\sqrt{1+A\varphi^2}} \qquad (6.3)$$

但し

$$A=\frac{\left\{2\frac{r}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}\left\{\frac{r}{M}p^{1/2}(1+9cp^2)-16cp^4\right\}}{\frac{r}{M}\left\{\frac{r}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}^2}$$

$$B=\frac{\left\{\frac{r}{M}p^{1/2}(1+9cp^2)-16cp^4\right\}}{\frac{r}{M}\left\{\frac{r}{M}-p^{1/2}(1+cp^2)\right\}}$$

附 録 3.

(7.1) の第二積分の括弧を開き又第三積分は $\frac{dw}{dt}$, $\frac{d\bar{w}}{dt}$ の形であるから

$$M=\frac{1}{2}\gamma\Re\left[\oint(\omega^2z^2\bar{z}\,d\bar{z}+\omega^2\bar{z}^2z\,dz)+2i\oint\omega z\bar{z}\frac{dw}{dz}dz-\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2zdz+\oint\left(\frac{dw}{dt}+\frac{d\bar{w}}{dt}\right)zd\bar{z}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\gamma\Re\left[\frac{1}{2}\omega^2\oint d(z\bar{z})^2+2i\omega\oint z\bar{z}\,dw-\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2zdz+2\oint\frac{d\phi}{dt}zd\bar{z}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\gamma\Re\left[\frac{1}{2}\omega^2\oint d(r^4)+2i\omega\oint r^2d\phi-2\omega\oint r^2d\psi-\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2zdz+2\frac{d}{dt}\oint\phi zd\bar{z}\right]$$

ここで第一項は 0, 第二項は純虚数であるから不必要, 第三項は (5.2) から知られる様に $d\psi$ に cyclic な函数が含まれないから 0 となる。結局残るものは終りの二項だけで

$$M=\gamma\Re\left[-\frac{1}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2zdz+\frac{d}{dt}\oint\phi zd\bar{z}\right] \qquad (7.2)$$

附 録 4.

z 面の積分を ζ 面の積分に転換すれば積分の径路は $\rho=1$ なる円周となるから

$$
\begin{aligned}
\phi &= \Re\left[w_{\rho=1}\right] \\
&= \frac{\omega}{2} M^2 \sin 2\varphi \left\{ p^2(1-c)(1+3c)\cos 2\varphi + 4c^2p^6\cos^3 2\varphi \right\} \\
&\qquad + \frac{\kappa}{\pi}\tan^{-1}\left\{ \frac{\rho_0^4-1}{\rho_0^4+1}\cot 2(\varphi-\varphi_0) \right\} \\
&\qquad + \Re\left[\frac{\omega}{2} M^2 (\sin 2\varphi + i\cos 2\varphi)\left\{(1+c)^2 - 4c^2p^4\cos^2 2\varphi\right\}\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi - 1} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z d\bar{z} &= \Re\left[z d\bar{z}_{\rho=1}\right] \\
&= -\frac{p^2}{2} M^2 \sin 2\varphi \cdot d\varphi \cdot \Re\Bigg[\frac{\sqrt{p^2\cos 2\varphi + 1}}{\sqrt{p^2\cos 2\varphi+1}} \left\{ (1-c)(1+3c) + 8cp^2\cos 2\varphi + 12c^2p^4\cos^2 2\varphi \right\} \\
&\qquad + \frac{\sqrt{p^2\cos 2\varphi - 1}}{\sqrt{p^2\cos 2\varphi - 1}} \left\{ (\;〃\;)(\;〃\;) - \;〃\; + \;〃\; \right\} \\
&\qquad + \frac{\sqrt{p^2\cos 2\varphi - 1}}{\sqrt{p^2\cos 2\varphi + 1}} \left\{ (\;〃\;)(\;〃\;) + 4(1-3c)cp^2\cos 2\varphi - \;〃\; \right\} \\
&\qquad + \frac{\sqrt{p^2\cos 2\varphi + 1}}{\sqrt{p^2\cos 2\varphi - 1}} \left\{ (\;〃\;)(\;〃\;) - \;〃\; - \;〃\; \right\} \Bigg]
\end{aligned}
$$

ここで $\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi - 1}$，$\sqrt{p^2\cos 2\varphi \pm 1}$ 等は φ に応じて第13図の如き値を取る。又 $\sqrt{\quad}$ なる記号は $\sqrt{\quad}$ が虚となる時，其の正負の符号を反対にする意味である。計算の便宜上積分を分けて

$$\oint \phi z d\bar{z} = I_1 + I_2$$

とし，I_1 は被積分函数に $\tan^{-1}$ を含まぬもの即ち渦の影響の入つていないものとし，I_2 は $\tan^{-1}$ を含んだ積分で渦のみの影響を示すものとする。

（A） I_1 の積分

$$
\begin{aligned}
I_1 = -4\omega p^2 M^4 \Bigg\| & p^2 \int_0^{\alpha} \left[(1-c)^2(1+2c+21c^2)\cos 2\varphi + p^2(1-c)^3(1+3c)\cos^2 2\varphi \right. \\
& \quad + 16p^4c^2(1+3c-6c^2)\cos^3 2\varphi - 16p^6c^2(1-c)\cos^4 2\varphi \\
& \quad \left. + 48p^8c^4\cos^5 2\varphi + 48p^{10}c^4\cos^6 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi d\varphi \\
& + \int_0^{\alpha} \left[-(1-c)^3(1+3c) + 2p^4(1-c)(1+c-5c^2+27c^3)\cos^2 2\varphi \right. \\
& \quad \left. - 16p^8c^3(4-9c)\cos^4 2\varphi - 96p^{12}c^4\cos^6 2\varphi \right] \frac{\sin^2 2\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi - 1}} \\
& + 8p^4c \int_{\alpha}^{\pi/4} \left\{ (1-c)(1+3c)\cos^2 2\varphi + 4c^2p^4\cos^4 2\varphi \right\} \sin^2 2\varphi \cdot d\varphi \\
& - 8p^2c \int_{\alpha}^{\pi/4} \sqrt{1-p^4\cos^2 2\varphi} \cdot \cos^2 2\varphi \cdot \sin 2\varphi \cdot d\varphi \Bigg\|
\end{aligned}
$$

但し $\quad \alpha \equiv \cos^{-1}\dfrac{1}{p^2}$

上式第二積分は楕円積分となるが

$$\frac{p^2}{\sqrt{p^4-1}}\sin 2\varphi = x, \qquad k^2 = 1 - \frac{1}{p^4}$$

と置けば容易に標準型に帰着せしめることが出来る。其の結果は

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\alpha} \frac{\sin^2 2\varphi}{\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi - 1}} d\varphi &= \frac{1}{2p^2}\left\{K(k) - E(k)\right\} \\
&\fallingdotseq \frac{\pi}{8p^2} k^2\left(1 + \frac{3}{8}k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\alpha} \frac{\cos^2 2\varphi \cdot \sin^2 2\varphi}{\sqrt{\;〃\;}} d\varphi &= \frac{1}{6p^2}\left\{(1-k^2)K(k) - (1-2k^2)E(k)\right\} \\
&\fallingdotseq \frac{\pi}{8p^2} k^2\left(1 - \frac{3}{8}k^2\right)
\end{aligned}
$$

被積分函数の分子の $\cos 2\varphi$ の次数の高いものは係数が小さいから計算の必要はない，

結局 c^3, k^4 以上で常数係数の特別に大きいものはないから，之等を省略すると

$$I_1 \doteqdot = -4\,\omega^2 p^2 M^4\left\{\pi c^2+\frac{\pi}{8}(1+8c)k^2+\frac{1}{3}k^3\right\}$$

(B) I_2 の積分

$\tan^{-1}\left\{\frac{\rho_0^4-1}{\rho_0^4+1}\cot 2(\varphi-\varphi_0)\right\}$ は φ に対して連続的に変化する一つの branch を取らねばならぬことを念頭に置いて計算すると

$$I_2=-\frac{4}{\pi}p^2M^2\kappa\Big[\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(1-c)(1+3c)+12c^2p^4\cos^2 2\varphi\}\sin 2\varphi\cdot\tan^{-1}\{\quad\}\,d\varphi$$

$$+\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(\ \ //\ \ )(\ \ //\ \ )-\quad //\quad\}\frac{\cos 2\varphi\cdot\sin 2\varphi}{\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi-1}}\tan^{-1}\{\quad\}\,d\varphi$$

$$+8cp^2\int_{-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\cos 2\varphi\cdot\sin 2\varphi\cdot\tan^{-1}\{\quad\}\,d\varphi\Big]$$

然るに上式第二積分は第三種楕円積分となつて計算に不便であるから，近似的に次の様に置く。

$$\sqrt{p^4\cos^2 2\varphi-1}=m\cos 2\varphi-n,$$

m, n を決める条件として

$$\left.\begin{array}{lll}\cos 2\varphi=1 & \text{に於て} & \sqrt{p^4\cos^2 2\varphi-1}=\sqrt{p^4-1}\\ \cos 2\varphi=\dfrac{1}{p^2} & // & \sqrt{\quad //\quad}=0\end{array}\right\}\text{とすれば}$$

$$m=\frac{p^2\sqrt{p^4-1}}{p^2-1},\qquad n=\frac{\sqrt{p^4-1}}{p^2-1}\doteqdot\frac{2}{k}$$

この近似計算は粗雑の感を免れないが，もう一項増すと計算が非常に面倒になるので我慢した。

$$I_2=-\frac{4}{\pi}p^2M^2\kappa\Big[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}(X-Y-Z)$$

$$+\frac{p^4}{2\rho_0^4}cX\left\{(\rho_0^8+1)(\cos^2 2\varphi_0-\sin^2 2\varphi_0)-2\rho_0^4\left(\frac{1}{p^4}-k^2\right)\right\}-p^2cL+p^2c(\pi-2k)N\Big]$$

但し

$$X=-\frac{1}{p^2}\left[\tan^{-1}\left\{\frac{\rho_0^4-1}{\rho_0^4+1}\cot(k-2\varphi_0)\right\}+\tan^{-1}\left\{\frac{\rho_0^4-1}{\rho_0^4+1}\cot(k+2\varphi_0)\right\}\right]$$

$$Y=\frac{\rho_0^4+1}{2\rho_0^2}\cos 2\varphi_0\left[\tan^{-1}\left\{\frac{2\rho_0^2}{\rho_0^4-1}\sin(k-2\varphi_0)\right\}+\tan^{-1}\left\{\frac{2\rho_0^2}{\rho_0^4-1}\sin(k+2\varphi_0)\right\}\right]$$

$$Z=\frac{\rho_0^4-1}{2\rho_0^2}\sin 2\varphi_0\left[\tanh^{-1}\left\{\frac{2\rho_0^2}{\rho_0^4+1}\cos(k-2\varphi_0)\right\}=\tanh^{-1}\left\{\frac{2\rho_0^2}{\rho_0^4+1}\cos(k+2\varphi_0)\right\}\right]$$

$$L=\frac{\rho_0^8-1}{2\rho_0^4}\sin 2\varphi_0\cos 2\varphi_0\log\frac{(\rho_0^4+1)^2\sin^2(k-2\varphi_0)+(\rho_0^4-1)^2\cos^2(k-2\varphi_0)}{(\ \ //\ \ )^2\sin^2(k+2\varphi_0)+(\ \ //\ \ )^2\cos^2(k+2\varphi_0)}$$

$$N=\frac{\rho_0^8-1}{2\rho_0^4}\cos 4\varphi_0$$

$\rho_0=1+\varepsilon$ として略算を行うと

$$I_2=-\frac{4}{\pi}p^2M^2\kappa\Big[\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\Big\}(X-Y-Z)$$

$$+2p^4c(4\varepsilon^2+k^2-\sin^2 2\varphi_0)X-p^2cL+p^2c(\pi-2k)N\Big]$$

X, Y, Z, L, N に於て ρ_0 の代りに ε を用いた結果は本文に記載してある。

$$\therefore\ \oint\varphi z d\bar{z}=I_1+I_2=-4p^2M^2\Big(\Big(\omega M^2\left\{\pi c^2+\frac{\pi}{8}(1+8c)k^2+\frac{1}{3}k^3\right\}$$

$$+\frac{\kappa}{\pi}\Big[\left\{\frac{1}{2}(1+2c+9c^2)+\frac{2}{k}(1+2c-15c^2)\right\}(X-Y-Z)$$

$$+2p^4c(4\varepsilon^2+k^2-\sin^2 2\varphi_0)X-p^2cL+p^2c(\pi-2k)N\Big]\Big)\Big)$$