(昭和 26 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

乱流境界層に対する新解釈と其の応用 (第3報)

正員 工学士 笹 島 秀 雄*

A New Consideration for Turbulent Boundary Layer and its Applications (III)

By Hideo Sasajima, *Kogakushi*, *Member*

Abstract

The author proposed a new vorticity transfer theory in the previous paper, and as an application the flow in circular pipe was calculated. The present paper is the second application of the theory for the flow along a flat plate.

Usually the velocity distribution along a plane wall is assumed to be similar to that in a circular pipe, but the author adopted here a different one as follows. "Form of shearing stress distribution is determined by the boundary conditions and is independent on the type of boundary layer, i.e. the laminar or the turbulent ones".

The calculated results almost coincide with the formula by Prandtl, and moreover, the solution is flexibly adaptable for any condition of flows before the transition point, e.g. for an artificially stimulated flow in the model experiment. The thickness of laminar sublayer is obtained and this showes that the hydrodynamically smooth surface is influenced mainly by the velocity of plate and scarcely by Reynolds number.

緒 論

著者は第二報**に於て新渦輸送理論を発表し，其の応用例として円管内の乱流に就て計算を行つたが結果は実験と極めてよい一致を示した。その際得られた常数は何れも普遍的なものと考えられるのであるが，本報はこれ等の常数を其のまま使用して平板に沿う流れの計算を行つたものである。

従来平板の計算では乱流の速度分布が普遍性をもつていて円管の分布が他の流れに対しても成立すると仮定しているのであるが，著者は剪断応力分布が境界条件により定まる型をとり層流乱流の種類によつては変らないと仮定して速度分布が円管と同一であると云う従来同様の結果を得た。

計算の結果は実験とよく一致するが従来の理論に比して特に異る点は遷移現象に就て板の先端から乱流が開始されたと考える Prandtl の仮定に対し，著者の解法は理論的に正しく計算され上流の如何なる状態にもそれに応じて夫々個有の摩擦抵抗を求め得ることに在る。本研究は遷移現象により影響される乱流域の事情を明かになし得たものと云えよう。

1. 境界層内の剪断応力分布に関する仮定

従来平板に沿う流れの乱流境界層を解く場合には何れも根本の仮定として円管内の速度分布が其のまま平板に対しても成立つと置いている。結果から判断するとこの仮定による計算が実験に合うのであるから真実からそう遠くはないであろうが方程式の上で見ると矛盾がある。従来の理論では Reynolds 応力の表現の中に壁面の種類により変る項は含まれていないから，速度分布が与えられることは剪断応力が定まることであり円管も平板も直線分布をすることになる。これは明かに誤りである。

本報に於ける著者の計算もやはり一個の仮定から出発するのであるが，直接速度分布に対してではなく剪断応力に対して設けたものである。仮定は次の如し。

---

* 大阪大学助教授

** 造船協会昭和 26 年度春季講演会に於て発表

「一般に境界層内に於ける剪断応力分布の形は境界条件によつて定まるもので流れが層流であるか乱流であるかによつては影響されない。」又次の様に云うことも出来る。「流体の乱動に基く見掛けの応力（Reynolds 応力）分布は粘性に依る応力と合して流体が層流をなす場合の応力分布と相似である。」

円管或は平行板の場合には剪断応力の直線分布なる型は層流乱流を問わず成立し上の仮定と矛盾しない。以下平板に就てもこの仮定が余り無理でないことを説明しよう。

平板に沿うて其の先端より x 軸，直角に y 軸をとり，剪断応力を τ とすると運動方程式は

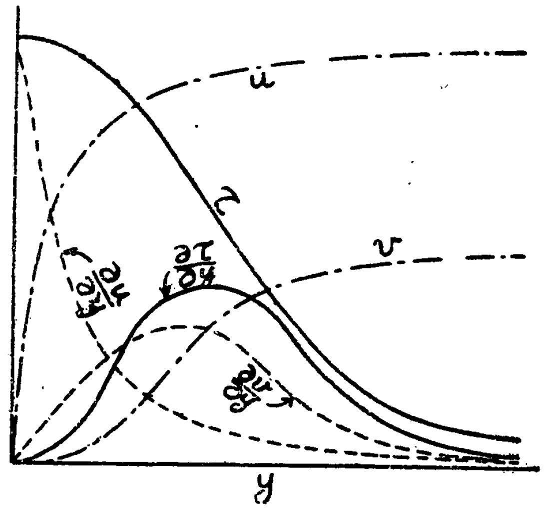
$$-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{1}$$

上式を y に関して微分し連続の条件を用いると

$$-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \tag{2}$$

両式とも層流乱流を問わず成立し境界条件も亦同一であるから壁面及境界層の外側では

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$



第 1 図

境界層内部の詳しい事はわからないが u 及 v は壁面から境界層外の一定値迄単調に増加するから，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$ は形は多少複雑でも符号を変えることはなく，(1) 式の左辺の両項の様に互違いの積を考えると何れも形のよく似た山形の曲線となる。（若し uv 何れも y の冪の項で表わされるならば完全に相似である。）一方 τ も壁面から単調に減少する筈であるから前記山形曲線の差も符号を変える事はなく，やはり山形の曲線であると考えられこれが $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ となる。第 1 図は (3)の条件を併せ考えたものを観念的に示すもので $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ が層流の形と相似であるか否かは不明にしても，全然性質の違う曲線ではないから其の積分曲線である τ は非常によく似たものであることが察せられる。

上の説明は平板に就て行つたのであるが，平板以外の場合 (1) 式に $\frac{\partial p}{\partial x}$ を含んでいてもこれ又境界条件の一つであつて層流乱流には無関係であるから，同様の説明をすることが出来る。従つて著者の仮定は境界層に就て一般的に成立すると考えても大きな誤りはないであろう。

2. 速 度 分 布

著者は第二報に於て次の様な乱流境界層の一般解を与えた。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{k}{y_1^2}\left\{a_1\sqrt{F}\frac{y_1}{y}+a_2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2+a_3\left(\frac{y_1}{y}\right)^3+\cdots\cdots\right\}\\ F&\equiv-2y^2\int\frac{h(\eta)\cdot f(\eta)}{y^3 g(\eta)}dy\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

但し y_1＝層流底層の有効厚さ

$\eta=y$ を表わす無次元表示

$2y\cdot f(\eta)$＝乱動粒子を独立渦と見てこの渦と壁に関する其の鏡像との間の距離。平板では $f(\eta)=1$

$g(\eta)$＝y 方向の乱動速度 v_0' を与えるために考えた無次元函数

$h(\eta)$＝境界層内の剪断応力分布を与える無次元函数

k, a_1, a_2, ……＝壁面の種類には無関係な普遍的常数であるが正確には R 数により僅か乍ら変化すると考えた方がよい。上表は R 数極めて大なる時の値

$\sqrt{k_\infty}/\nu=6.33$	$a_1=0.395$	$a_2=0.378$
$a_3=0.270$	$a_4=0.148$	$a_5=0.065$
$a_6=0.030$		

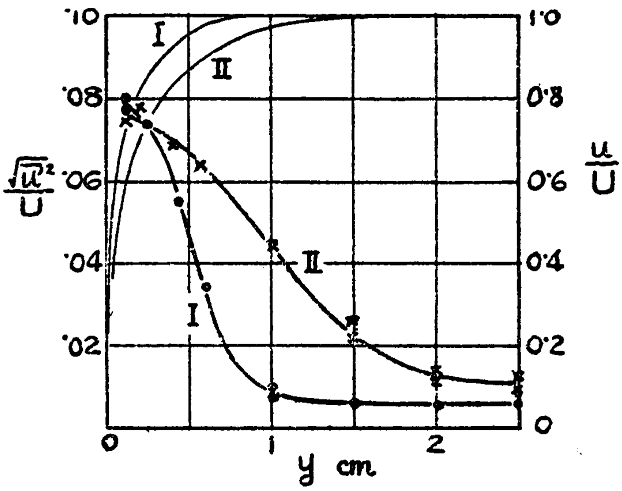
を示す。

i) $g(\eta)$

第二報に於ては $g(\eta)$ を壁からの拘束なる仮定を設けて論じ，円管或は平行板に対しては比較的実験に合う様な結果を得たのであるが，これは単に偶然の一致に過ぎなかつた様で本報に於てこの仮定を取消すことにする。仮定に従えば平板の時には $g(\eta)=1$ となるから乱動速度 v_0' は

$$v_0'=B\sqrt{y(y-y_1)}\sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k}{y^2}\right)}$$

となつて壁の近傍を除けば略一定となる。直接平板に就て v_0' の平均値を計測した例を知らないが推定せしめる例をあげることが出来る。第2図は平行板*に於ける実験であるが測定場所が入口に近いため境界層の厚さが薄くて独立の平板と見做し得る場合の結果である。測定値は u' であるが乱れが等方性に近づく性質より v_0' に対しても壁の近傍を除き大差ないものと見てよかろう。



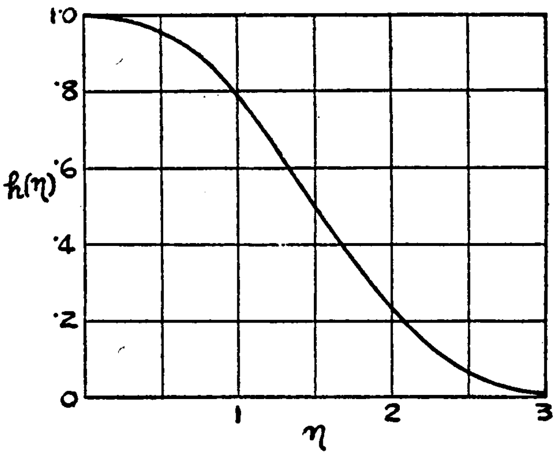
第 2 図

この例に見る様に v_0' は平板に於ても決して一定ではなく $g(\eta)$ の算出に関する第二報の仮定の誤りであることが知られる。それ故本報に於ては $g(\eta)$ は実験より定めるべき函数と改める。

扨て第2図に於て境界層の外と見られる部分にも u' が存在しているがこれは流れに存在する乱れによるもので問題にしなくてもよい。又壁の近傍では u' よりも v_0' は幾分小さくなると思われる。これ等の事情を考慮すると $g(\eta)$ は次に述べる $h(\eta)$ とよく似ていることに気付くであろう。従つて F の積分では両者が互に消合つて影響がなくなると見ても大なる誤りはない。

ii) $h(\eta)$

第一章の仮定により層流解が知れている時には $h(\eta)$ が求められる。平板に対しては Blasius の解から計算され第3図に示す如くなるが，大体 $\eta=3$ 位で $h(\eta)=0$ と見做し得るから以後の計算では $\eta=3$ を以つて境界層厚さ δ に対応するものとする。



第 3 図

上述のことから $g(\eta)\fallingdotseq h(\eta)$ であるから

$$F\fallingdotseq-2y^2\int\frac{dy}{y^3}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{k}{y_1^2}\left\{a_1\frac{\eta_1}{\eta}+a_2\left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^2+a_3\left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^3+\cdots\cdots\right\} \tag{5}$$

速度は層流域に対して

$$u=\frac{k}{y_1^2}y=\frac{k}{y_1}\cdot\frac{\eta}{\eta_1}$$

乱流域に対しては

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{k}{y_1}\left\{A+a_1\log\frac{\eta}{\eta_1}-a_2\frac{\eta_1}{\eta}-\frac{a_3}{2}\left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^2-\frac{a_4}{3}\left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^3-\cdots\cdots\right\}\\ A&\equiv1+a_2+\frac{a_3}{2}+\frac{a_4}{3}+\frac{a_5}{4}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

境界層外の速度を U とすればこれは(6)式で $\eta=3$ とすれば得られるが η_1 は極めて小であるから其の自乗以上を無視して

$$U=\frac{k}{y_1}\left(A+a_1\log\frac{3}{\eta_1}-\frac{a_2}{3}\eta_1\right) \tag{7}$$

* Karman ; Proc. 4 Intern. Congr. App. Mech., Cambridge, 1934.

簡単のために

$$[G]\equiv A+a_1\log\frac{3}{\eta_1}-\frac{a_2}{3}\eta_1$$

と置くと

$$\frac{k}{y_1}=\frac{U}{[G]} \tag{7)'$$

となり本式が y_1 と η_1 の関係を与える。

上の諸式は何れも円管の場合と同一で y_1/y の代りに η_1/η, y_1/r の代りに $\eta_1/3$ と書いたに過ぎない。即ち従来の速度分布が円管と同一であるとする仮定に一致した訳である。異る所は出発点を剪断応力に置いて境界条件を満足させ円管とは応力分布を異にしながら速度分布が一致している点である。

然し乍らこの速度分布は決して正しいものでないことは(7)式を見れば容易に知られる。即ち δ に応ずる η を大とすれば U は如何程でも大となり不合理であるが，これは第一報*に述べた様に $\dfrac{\partial u}{\partial y}\ll\dfrac{k}{y^2}$ からは外側層流層になるべき処を無視したためであつて，円管の様に限られた流路の場合には問題にならないが流体が無限に拡つている平板に於て δ の如きものを論ずる場合には量的に問題となり得るであろう。本報では抵抗を主眼としているため次章に述べる様に運動量方程式のみを条件式として計算したのであるが，若しも δ をも詳しく知るためには速度分布に適当な補正項を入れ $y=\delta$ に於ける条件を加える等の手段が考えられる。

3.　運動量方程式の解

上の諸式に入つている未知数は y_1 或は η_1 だけであつてこれを定めるために運動量方程式を用う。平板に対しては

$$\tau_0=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta}\rho(U-u)u\,dy \tag{8}$$

積分の上限は本来ならば∞とする方がよいが前述の様に速度の表現が厳密に正しくはないから適当な有限値で置きかえる必要がある。ここでも $y=\delta$ に応じて $\eta=3$ とする。(8)の積分を η に換え η_1 の自乗以上を無視して次の様になる。

$$\left.\begin{aligned}&\tau_0=\rho U\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{k}{\eta_1}\cdot\frac{[M]}{[G]}\right\}=\rho U\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left\{\frac{k}{\eta_1}\cdot\frac{[M]}{[G]}\right\}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\\&[M]\equiv3a_1^2\left(\frac{A}{a_1}-2+\log\frac{3}{\eta_1}\right)-\eta_1\left(0.381-0.111\log\frac{3}{\eta_1}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8)'$$

k の値は R 数が小なる場合には僅か乍ら増大すると考えた方がよいからここでも其の影響を考慮することにする。円管では

$$\left(1-\frac{y_1}{r}\right)\sqrt{\frac{k}{\nu}}=\sqrt{\frac{k_\infty}{\nu}}$$

であるから y_1/r の代りに $\eta_1/3$ で置換えるものとし，同様の考え方に従つて

$$a_1=a_{1\infty}-0.132\,\eta_1,\quad A=A_\infty-0.043\,\eta_1$$

とする。但し $a_{1\infty}$, A_∞ は k_∞ に応ずる値である。これ等を $[G]$ 及 $[M]$ に入れ簡単の為め改めて $a_{1\infty}$, A_∞ の代りに夫々 a_1, A と書けば

$$\left.\begin{aligned}[G]&=a_1\left(\frac{A}{a_1}+\log\frac{3}{\eta_1}\right)-\eta_1\left(0.169+0.132\log\frac{3}{\eta_1}\right)\\&=a_1\left\{4.01+\log\frac{3}{\eta_1}-\eta_1\left(0.43+0.33\log\frac{3}{\eta_1}\right)\right\}\\ [M]&=3a_1^2\left(\frac{A}{a_1}-2+\log\frac{3}{\eta_1}\right)+\eta_1\left(0.526-0.681\log\frac{3}{\eta_1}\right)\\&=3a_1^2\left\{2.01+\log\frac{3}{\eta_1}+\eta_1\left(1.12-1.46\log\frac{3}{\eta_1}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9)の値を使つて(8)′の微分を実行すると

* 造船協会昭和 25 年度春季講演会に於て発表

$$\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left\{\frac{k}{\eta_1}\cdot\frac{[M]}{[G]}\right\}=\frac{k_\infty[D]}{\eta_1^2[G]^2}$$

$$[D]\equiv 3a_1^2\left[-\left(\frac{A}{a_1}\right)^2+2\frac{A}{a_1}-2-2\left(\frac{A}{a_1}-1\right)\log\frac{3}{\eta_1}-\left(\log\frac{3}{\eta_1}\right)^2\right.$$
$$\left.+\eta_1\left\{-2.16+3.31\frac{A}{a_1}-\frac{2}{3}\left(\frac{A}{a_1}\right)^2+\left(1.81-\frac{2}{3}\frac{A}{a_1}\right)\log\frac{3}{\eta_1}\right\}\right]$$

これに (7)′ を入れ，又 $\tau_0=\mu\frac{k}{y_1^2}$ なることを考慮すると (8)′ は次の様になる。

$$\frac{U}{\nu}=\left(\frac{k_\infty}{\nu}\right)^2\cdot\frac{[D]}{\eta_1^2}\cdot\frac{\partial\eta_1}{\partial x}$$

この微分方程式を解くと

$$\left.\begin{aligned}
&R\equiv\frac{Ux}{\nu}=\left(\frac{k_\infty}{\nu}\right)^2\frac{[R]}{\eta_1}\\
&[R]\equiv 3a_1^3\left[\left(\frac{A}{a_1}\right)^2-4\left(\frac{A}{a_1}\right)+6+2\left(\frac{A}{a_1}-2\right)\log\frac{3}{\eta_1}+\left(\log\frac{3}{\eta_1}\right)^2\right.\\
&\qquad+\eta_1\left\{2.16-3.31\frac{A}{a_1}+\frac{2}{3}\left(\frac{A}{a_1}\right)^2\right\}\log\frac{3}{\eta_1}\\
&\qquad\left.+\eta_1\left(\frac{1}{3}\frac{A}{a_1}-0.91\right)\left(\log\frac{3}{\eta_1}\right)^2\right]+\eta_1\times\text{const.}\\
&=3a_1^3\left[6.03+4.02\log\frac{3}{\eta_1}+\left(\log\frac{3}{\eta_1}\right)^2+\eta_1\left\{\text{const.}-0.42\log\frac{3}{\eta_1}+0.43\left(\log\frac{3}{\eta_1}\right)^2\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

(10) 式は R 数と η_1 との関係を示すものであり積分常数と共に後述する。

局部摩擦抵抗並に其の抵抗係数は

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_0=\mu\frac{k}{y_1^2}=\rho\frac{\nu}{k}\cdot\frac{U^2}{[G]^2}\\
&C'_f=\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}=2\left(\frac{\nu}{k_\infty}\right)\frac{\left(1-\frac{2}{3}\eta_1\right)}{[G]^2}
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

全抵抗及其の抵抗係数は

$$\left.\begin{aligned}
&D=\rho\int_0^\delta(U-u)u\,dy=\rho\frac{k^2}{y_1\eta_1}[M]=\rho\frac{k}{\nu}\cdot\frac{U^2x}{R}\cdot\frac{[M]}{\eta_1[G]}\\
&C_f=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho xU^2}=\frac{k}{\nu}\cdot\frac{2}{R}\cdot\frac{[M]}{\eta_1[G]}=2\left(\frac{\nu}{k_\infty}\right)\left(1+\frac{2}{3}\eta_1\right)\frac{[M]}{[R][G]}
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

(12) 式の全抵抗Dの表現は (8) より考えると積分常数が入りそうであるが其の値は層流，乱流を問わず常に零である。このことは境界層の運動量厚さが連続であると云うのと同意義で，若しも層流範囲では零で乱流になると或る値をもつ等とすれば運動量厚さは連続でなくなる。従来この点に関し疑念を持つやに見える論文もあるが*，附録に示した様に (12) 式の関係は乱流でも厳密に成立しなければならぬ。

次に前に戻つて (10) 式の積分常数と η_1 に就て考える。この常数は R 数と η_1 との関係が知れて居れば決定出来るもので，円管の場合の様に R 数と y_1/r(ここでは η_1 に相当)の関係が唯一に定まるのであれば簡単であるが平板に於てはそうは云えない。Karman も Prandtl も平板の R 数として $U\delta/\nu$ を用うれば円管と同様の関係が成立すると仮定しているがそう無理な仮定ではないであろう。著者はこの仮定を利用する訳ではないが大体の性質として通常の R 数を考える場合には η_1 との関係が唯一ではなく，遷移点の位置や遷移領域の変化或は更に板の先端を粗面にするとか攪乱を人工的に与える等上流に於ける状態に応じて定まるべきものであることが察せられる。それ故 (10) 式の常数を定めるには今一個上流の条件を含む関係式を必要とするが，それには (12) 式を措いて他にはない。結局 (10) と (12) の両式で η_1 と R 数の関係を求めそれから常数が定まると云う順序になる。

従来の理論はこの辺の処に無理がある。普通遷移領域はなくて遷移点から直ちに完全乱流になると考えている

* 例えば Burgers (Proc. 1 Intern. Congr. App. Mech., Delft, 1924) は (8) 或は (12) は乱動速度の自乗を無視した近似式と述べた。

が，それならば遷移点に於ける運動量厚さを層流に連続ならしめるのが正しいのであるが，y_1 或は η_1 を含まぬ理論であるため R 数が大であれば左程ではないが小さい場合には速度分布の形が無理になるので遷移点附近では非常に大きな局部摩擦抵抗を生ずる結果となつて実験に合はない。この矛盾を緩和するために板の先端から開始された乱流を仮定するのが普通であるが，これは単なる方便にしか過ぎず理論的には意味がない。著者の方法では理論的に無理がなくて上流の如何なる状態にも応じ得る特長がある。只残された点は遷移領域内の流れの状態と其の不安定性にあり今後の研究に俟たねばならぬ。

4. 計 算 結 果

前章後半の説明により(10)式の積分常数の決定方法は明かであるが，実際の計算では理論通りに方程式を解いて行くことは困難で近似解で満足しなければならぬ。次に其の方法を述べる。

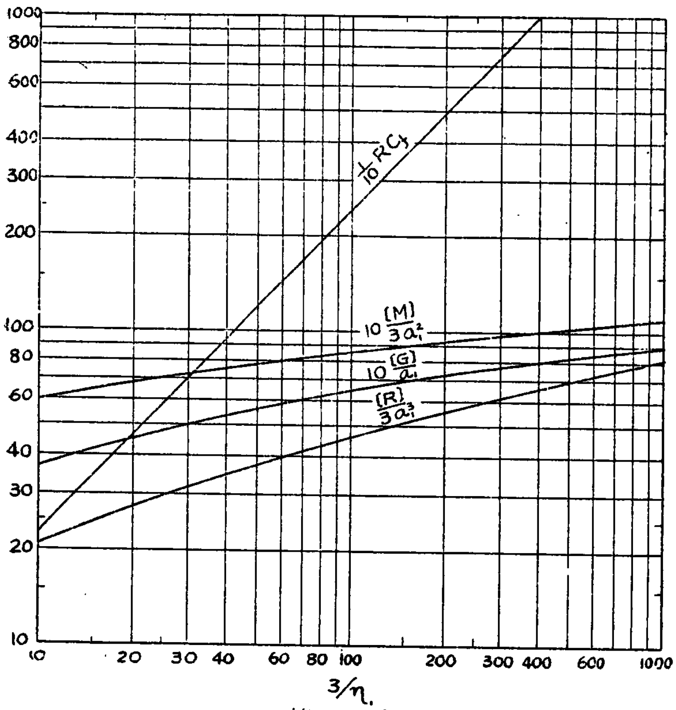
最初積分常数に任意の値を仮定し η_1 に種々の値を入れることにより R 数が出て来るから，これと積分常数に無関係に出る C'_f との関係を画く。層流部分は

$$C'_f=0.664\,R^{-1/2}$$

なることが知れているが，遷移領域の C'_f は不明であるから遷移開始点の C'_f と完全乱流開始点の C'_f との間を適当な曲線で結んだものであるとして置こう。これを積分することにより一応乱流開始点迄の C_f を求めることが出来る。扨て $R\cdot C_f$ なる量を考えるとこれは全抵抗に比例するから何処でも連続であるべきで，乱流開始点では上流から求めた値と乱流として求めた値とが一致するを要する。乱流としては

$$R\cdot C_f=2\left(\frac{k_\infty}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{3}\eta_1\right)\frac{[M]}{\eta_1[G]} \qquad (13)$$

となるから η_1 を変数として画いて置けば上流から出した $R\cdot C_f$ より第一近似の η_1 が得られ，従つて(10)より積分常数が計算される。これが初めに仮定した値に等しくなる迄上の操作を繰返せばよいのであるが，実際には第二近似位で十分である。第4図は RC_f, $[M]$, $[G]$ 及 $[R]$ を η_1 に対して画いたものである。



第 4 図

第5図は遷移領域の C'_f を直線と考えて勝手に撰んだ四通りの場合に就て計算した結果である。

同図 A は C'_f で注目される点は各場合に応じて一本の線には乗らないことであろう。この現象は実験*にも現われているが従来の理論では出ない結果である。R 数大なる部分で Kempf** の実測と比較してあるが僅かに著者の方が大きい。

同図 B は C_f で周知の式

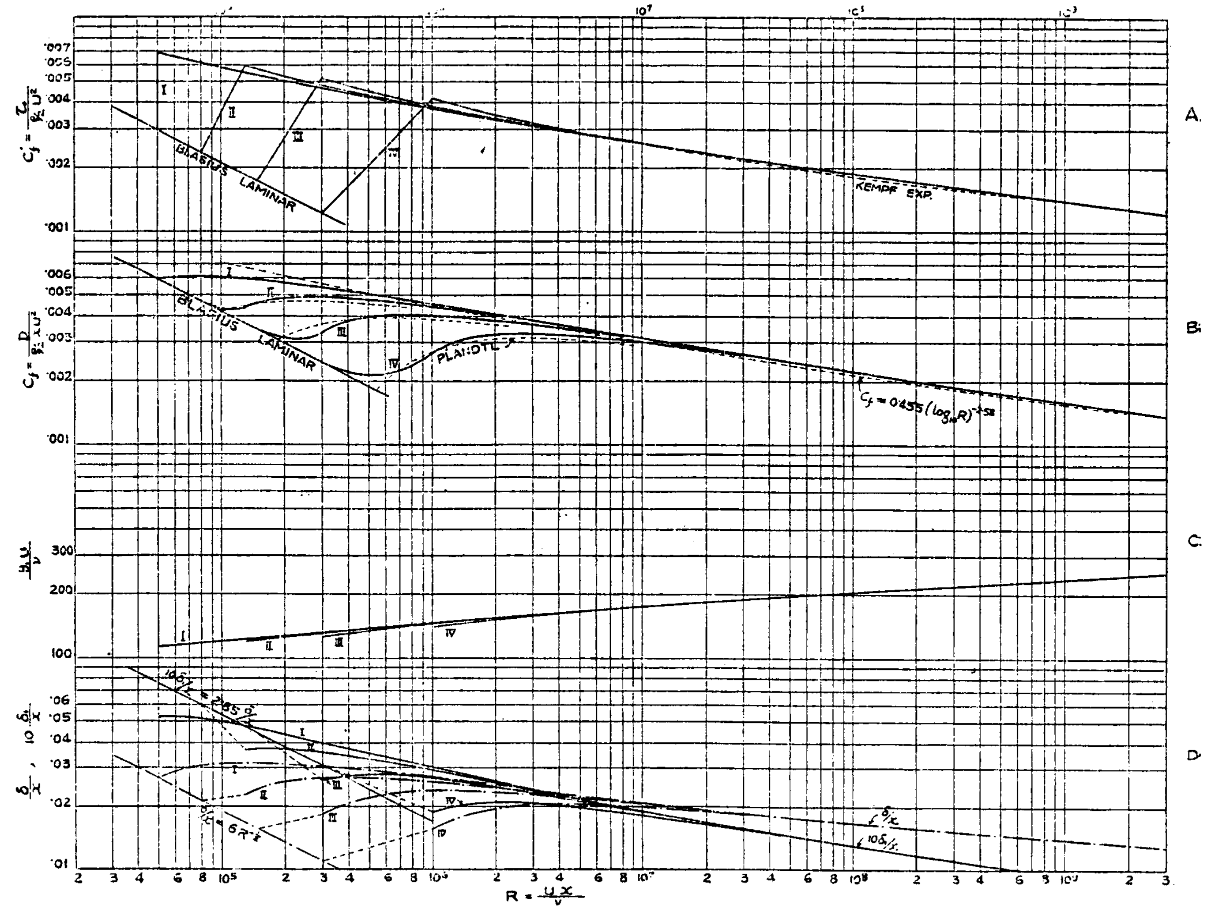
$$C_f=0.455(\log_{10}R)^{-2.58}$$

と比較するとやはり僅かに著者の方が大であるが，第2報に求めた常数を其のまま使用し，平板の実験から出したものでは無いことを思う時著者の結果も良好と云い得るであろう。R 数小なる部分では Prandtl の

$$C_f=0.455(\log_{10}R)^{-2.58}-AR^{-1}$$

と比較してあるが著者の方が曲線の勾配が大きい。尚人工的に攪乱を与えた実験では $R\doteqdot 3\times10^5$ 位迄は大体 I の曲線に乗るが，これとても遷移点は $R=5\times10^4$ としたもので決して板の先端ではなく，それより R 数が減少すると C_f が急に曲線をはずれるのは遷移点の後退を物語るもので，このことは攪乱を与えても板の先端から乱流を発生せしめることは困難であることを示している。

* Burgers : Proc. 1 Intern. Congr. App. Mech., Delft, 1924.
** W.R.H. 10, 1929, p.p. 234～239; 247～253.



第　5　図

第５図 C は層流底層の有効厚さ y_1 を示す曲線である。

$$y_1=\left(\frac{k_\infty}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{3}\eta_1\right)\frac{\nu}{U}[G] \tag{14}$$

図より知る様に y_1 の R 数による変化は少なく $R=10^5$ と $R=10^9$ とを比べても高々２倍以下に過ぎない。従つて一般に云われている様に表面の粗度が層流底層を超えると粗面影響が現われるものとすれば，板の上流と下流とで許し得る粗度の差は少ないことになる。これに反し速度 U の影響は重要であつて高速になる程それに比例して表面を滑かにしなければならぬ。模型実験に当嵌めて云うと表面仕上の程度は関係粗度で論ずるよりも速度比の方を重要視すべきである。例えば Froude 則に従う実験を行う場合縮率を 100 とすれば関係粗度から考える模型の仕上は非常に高級なるを要しそうに感じられるが，実は R 数で 1:1000 であるから其の影響は２倍に達せず，速度は 1:10 であるから全体としては 10/2=5 倍以上も模型の方が粗度が高くてもよいと云う逆の結果になる。この事柄は別に新しいものではなく Prandtl 及 Schlichting* が粗面板の抵抗係数を求めているが，滑面と $UK/\nu=$const.（K は粗面の突起高さ）の C_f 曲線が略平行であることからも察せられるのである。然るに従来層流底層の厚さが不明であつたためか境界層の厚さ δ に比例するかの如き観念が存在し，板の前方程滑かにする必要があると書かれた教科書があるが誤りではないにしても重点の置き処を失していると云えよう。

第５図 D は境界層厚さ δ 並に排除厚さ δ_1 を示す。

$$\left.\begin{aligned}\delta&=3\frac{y_1}{\eta_1}=3\left(\frac{\nu}{k_\infty}\right)\left(1+\frac{2}{3}\eta_1\right)x\frac{[G]}{[R]}\\ \delta_1&=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\frac{\delta}{[G]}a_1\left\{1+\frac{\eta_1}{3}\left(0.21+0.96\log\frac{3}{\eta_1}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

この δ は運動量方程式の積分に使用したものと同一であるから遷移点で連続であるのは当然で，この代りに運動量厚さをとつても同様である。但し第二章で述べた様に速度分布の式は厳密には正しくないから δ の外側にも僅かな速度勾配は存在するであろうが剪断応力或は抵抗の見地からは問題にならぬ程度と考えているのである。若

* W. R. H. 15, 1934, p. 1～4.

しも速度分布が正しければ δ_1 も当然連続になる筈であるが，図を見ると遷移領域の値が層流値よりも大になつたり小になつたりして無理がある。蓋し η_1 が大なる程速度分布の不正確さは増すものと考えられるが図もこれを裏書きしているようである。

結　論

第2報の新渦輸送理論の応用の第2の例として平板の乱流境界層を論じよく実験に一致する結果を得たが，従来の理論と異る点は次の如し。

i) 境界層内の剪断応力分布は層流乱流を問わず境界条件により定まる形をとると仮定して速度分布が円管と同様であることを示した。

ii) 運動量方程式の解を求めるのに乱流が板の先端から始まる等の仮定を用いず理論的に正しく解いた。

iii) 局部摩擦抵抗は遷移状態の変化による影響を受けて R 数によつて唯一に定まるものではない。

iv) 全摩擦抵抗係数に及ぼす上流の影響は Prandtl の仮定による結果よりも稍急である。著者の方法によれば上流の任意の状態に応じて理論的に正しく求めることが出来る。

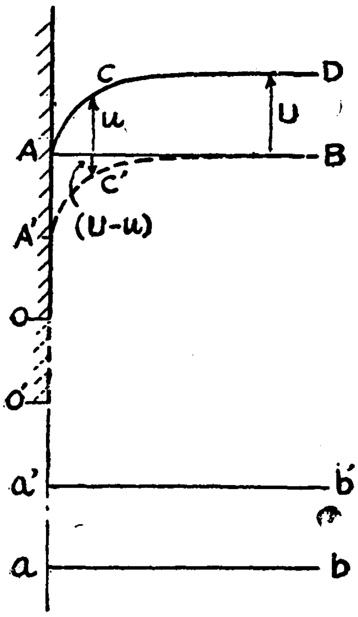
v) 層流底層の厚さを求めて流体力学的滑面は R 数によつては余り変らず主として速度に影響されることを示した。この厚さは今後粗面の研究には種々の便宜を与えるであろう。

本報の研究は平板の遷移現象により影響される乱流境界層の事情を明かにし得たが，遷移現象其のものは未解決であつて殊にその不安定性に関しては今後の研究に俟たねばならない。尚本報は文部省科学研究費によるものであることを附記する。

附　録

層流乱流を問わず(12)の成立する証明を行うがこの方法は Kàrmàn の運動量方程式の別の証明とも見られる。

平板が定常速度 U なる流体の中に置かれたものとし，ある時刻に板の先端から無限上流のある断面 ab と板の側面のある断面 AB との間にある流体を考える。単位時間後にはこの流体は $a'b'$ と ACD との間に存在するが，以前の状態との間の勢力の差は板が仕事をしていないから熱となつて散逸した勢力である。この散逸勢力を H とかくと H は $abb'a'a$ と $ABDCA$ との間の運動勢力の差で計算される。流体の乱動速度を q としその x 及 y 方向の分速度を夫々 u' 及 v' とすれば



第 6 図

$$H=\frac{\rho}{2}\left[U^2\int_0^\infty u\,dy-\int_0^\infty\{(u+u')^2+v'^2\}u\,dy\right]$$

となるがその平均値をとると $\bar{u}'$ の入る項は消えて $\bar{u}'^2$ 及 $\bar{v}'^2$ のみが残るから

$$\bar{H}=\frac{\rho}{2}\left[U^2\int_0^\infty u\,dy-\int_0^\infty(u^2+\bar{q}^2)u\,dy\right]$$

次に上と反対に静止流体中を板が速度 U で x 負の方向に進行するものとすれば，周囲の流体運動は前項の場合に $-U$ を加えたのみで H の大きさは同一である。ab と AB との間の流体は単位時間後には ab と $A'C'B$ の間に来るが，この二つの状態の間の勢力の差は運動勢力の差と H との和であつて板が抵抗に抗つて為した仕事によつて供給されたものである。運動勢力の差を E とするとこれは前項同様に $abb'a'a$ と $ABDCA$ 間の差に引なおして考えることが出来るが，前者のもつ勢力は流体が静止するから零であつて

$$\bar{E}=\frac{\rho}{2}\int_0^\infty\overline{\{(U-u-u')^2+v'^2\}}u\,dy=\frac{\rho}{2}\int_0^\infty\{(U-u)^2+\bar{q}^2\}u\,dy$$

A 点を板の先端から測つて x とし x 迄の板の抵抗を D とすると単位時間になした仕事は UD であるから

$$UD=\bar{E}+\bar{H}=\frac{\rho}{2}\int_0^\infty\{(U-u)^2+\bar{q}^2+U^2-u^2-\bar{q}^2\}u\,dy$$

$$\therefore\quad D=\rho\int_0^\infty(U-u)u\,dy$$

積分の上限は∞の代りに δ としてもよい。乱動を二次元として取扱つたが，三次元としても結果に影響はない。

上の証明に見る様にこの関係は層流乱流を問わず又途中で流れの状態が如何なるものであろうと成立する。