（昭和27年11月造船協会秋季講演会に於て講演）

乱流について

正員　理学博士　片　岡　正　治*

On Turbulent Flow

By Masaharu Kataoka, *Rigakuhakushi*, *Member*

Abstract

Problemson turbulent flow were mostfy discussed using the equations of fluid motion in stationary state expressed in terms of mean velocity, because it is difficult to solve the equations of fluid motion in unstationary state. The author found that we can solve the equations of fluid motion in unstationary state, if we modify and generalize the Navier-Stoke's equations as given in the author's paper read at the meeting of applied mechanics last autumn.

Chief results of the solution for the case of turbulent flow and the transition from laminar to turbulent flow are as followings.

1. The ratio of frequency of harmonics of the variation of velocity in a turbulent flow, to that of fundamental one is not integer but a ratio of the zero of the 2nd kind Bessel's function of zero order to the smallest one.
2. The frequency increases to a fixed value from the point of transition and the decreases as the velocity increases.
3. The thickness of boundary layer decreases from laminar flow to the point of transition and then increases as the velocity increases. After the boundary layer becomes completely turbulent, the thickness decreases.
4. The velocity distribution takes the form of mixed type of lamniar and turbulent flow between the point of transition and turbulent flow.
5. The instability of the point of transition relates to the increment of the y-component of velocity v and the limit of this increment determines the limit of the variation of the point of transition. This change of v seems the origin of turbulent flow.

1. 緒　　　言

乱流の現象については実験的に微小変動の測定という実験的困難のため正確な結果を得ることが難かしく理論的には Navier-Stokes の流体運動方程式の解法が得られていない現在では尚幾多の問題が残されている。時間的変動を考慮に入れて Navier-Stokes の流体運動方程式を解くことは難かしいので大部分が平均速度をとつて定常状態の流体運動方程式を取扱つている。Dryden の乱流による球の臨界抵抗係数の研究に基き Karman が高圧風の実験結果と普通風洞の実験結果との差異を乱流の影響であるとしてから現在の理論が示す予想に反する実験結果の説明によく乱流の影響が利用されるようになつた。又 Dryden の有効レイノルズ数の思想に基き高レイノルヅ数に於ける実験結果を得るため乱流格子が利用される。最近水槽主任者会議でも乱流による平板の摩擦抵抗係の変化の研究が取り上げられている。著言の風洞実験に於ける経験では時々この考え方では説明出来ない結果になるものがあつた。そこで理論的研究の必要が痛感されたのと終戦後実験的研究を行うことが出来なくなつたのとで流体運動方程式の検討を初めた。その結果 Navier-Stokes の流体運動方程式を解くのに従来は仮定により簡単化の方向にあつたのに反し一般化する必要のあることが分つた。文時間的変動のある場合には粘性項を出す時の原点の運動による力を加えて考えなければいけないこととなつた。その結果昨秋の第1回応用力学連合講演会に於ける講演のように流れに平行に置かれた平板の乱流の場合が時間的変動を考慮に入れて解けた。その後種々のマッハ数の場合及びその中間の場合を計算して速度零から無限大までの結果が得られた。その中に

* 明治大学工学部教授

は従来考えられていたことと異る結果に到達したものや新しく分つて来た事柄があつた。平板の摩擦抵抗係数に関しては昨秋の当協会講演会に報告した。ここでは乱流境界層及び層流から乱流への遷移について述べたいと思う。

2. 乱流境界層

総ての量を零デメンションで表わし $\bar{y}$ を境界層の厚さ，Y を境界層の厚さの時間的変動，M をマッハ数，R をレイノルズ数，y_1 を平板後縁に於ける境界層の厚さ，γ を平板の表面の状態及び流体の性質によつて定まる定数とすれば $M=y_1$ の場合

$$\bar{y}=18^{1/4}(1+\gamma)^{-1/4}R^{-1/4}x^{(1+\gamma)/4}(1+Y)$$

となる。

$J_0(x)$，$Y_0(x)$ を零階第一種及び第二種の Bessel 函数とし a_n，α_n を定数とすれば

$$Y=\sum_{n=1}\Big[a_nJ_0[(1+\gamma)\alpha_nx]-\{\alpha_nJ_0'[(1+\gamma)\alpha_n]+J_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}/\{\alpha_nY'_0[(1+\gamma)\alpha_n]$$
$$+Y_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}Y_0[(1+\gamma)\alpha_nx]\Big]\sin(1+\gamma)\alpha_nt/6$$

となる。

x_0 を平板に沿つて速度が前縁から漸次減少して零となる平板上の点，x_n を $Y_0(x)$ の零点とすれば

$$\alpha_n=x_n/\{(1+\gamma)\alpha_nx_0\}$$

となり

$$x_0\leqq\beta_m\leqq1$$

とすれば a_n は

$$\sum_{n=1}\alpha_n a_n\Big[J_0[(1+\gamma)\alpha_n\beta_m]-\{\alpha_nJ_0'[(1+\gamma)\alpha_n]+J_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}/\{\alpha_nY_0'[(1+\gamma)\alpha_n]$$
$$+Y_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}Y_0[(1+\gamma)\alpha_n\beta_m]\Big]=-1/(3\beta_m)\qquad m=1,2,3\cdots\cdots n$$

で定められる。

u,v を x,y 方向の分速度とし

$$\eta=y/\bar{y}$$

とすれば

$$u=4\eta^2(1-3\eta^2/2+\eta^4-\eta^6/4),$$
$$v=2/3(1+\gamma)\bar{y}x^{-(3-\gamma)/4}\eta^3(1-9\eta^2/5+9\eta^4/7-\eta^6/3)(1-3Y)$$

となる。

これから分ることは境界層内の各点に於ける速度の変動は境界層の厚さの変動によるものでその変動の各調波の振動数の基本調波の振動数に対する比は整数ではなく零階第二種の Bessel 函数の零の比になることである。振動数のこの関係が従来考えられているところと異る点であり実験結果の解析に際し注意する必要がある。又 x 方向の分速度の分布は y の偶数べきの項から成り立つている。これは流体運動方程式の左辺に $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ の項があり右辺に $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ の項があるために起るので速度の時間的変動を考えるときには常にそうなる。この場合は境界層外の流れは一様な流れとしてあるので乱流境界層の場合丈けであるが層流境界層の場合でも境界層外の流れに時間的変動がある場合にはこのような分布を考えなければいけない。従つて乱流の影響は層流境界層の場合に著しく乱流境界層の場合には余り影響のないことが想像される。勿論共振により乱流境界層の厚さの増すことは考えられるがこれは γ の変化として現われ速度分布は変化しない。

ρ,μ,a を密度，粘性係数及び音速，ρ_0,μ_0,a_0 を標準状態に於ける密度，粘性係数及び音速 L を平板の長さとし

$$A=\rho_0a_0/\mu_0,\qquad K=\rho a\mu_0L/(\rho_0a_0\mu)$$

とすれば

$$x_0=2^{-4/3}K^{4/\{5(1+\gamma)\}},\qquad R=18^{1/5}(1+\gamma)^{-1/5}(AK)^{4/5}=R_3$$

となる。

粘性の影響は温度，圧力の外に長さによつて変化する。これらの影響は K によつて表わされる。Froude の

実験結果の長さの影響はこの K を取り入れることによつて説明が出来る。

上の u 式で η が小さくなれば第1項以外の項は省略出来る。この場合の y の値を y_s とすれば y_s の内を一つの境界層と考えることが出来る。これを亜境界層とする。亜境界層内では Y による影響は省略出来るので定常な流れと考える。然るときは w を亜境界層境界に於ける速度とし $\eta_s=y/y_s$ とすれば

$$y_s=4^{1/3}(1+\gamma)^{-1/3}x^{(1+\gamma)/4},\qquad u=2w\eta_s(1-\eta_s/2)$$

となる。上の仮定から

$$w=4\,y_s^2/\bar{y}^2=4/3\cdot 2^{5/6}(1+\gamma)^{-1/6}R^{-1/6}$$

となる。

上の結果は $x_0\leqq x\leqq 1$ に対し成立するもので $0\leqq x\leqq x_0$ に対しては

$$\xi=x/x_0,\quad S=5\xi^3(1-2\xi^3+2\xi^6-\xi^9+\xi^{12}/5);$$
$$S'=15/x_0\xi^2(1-4\xi^3+6\xi^6-4\xi^9+\xi^{12}),\quad F=S'\xi-2(1+\gamma)S(1-4Y)/(3x_0\xi)$$

とすれば

$$Y=\sum_{n=1} a_n J_0[(1+\gamma)\alpha_n x]\sin(1+\gamma)\alpha_n t/6,$$
$$u=1-S\{1-4\eta^2(1-3\eta^2/2+\eta^4-\eta^6/4)\}$$
$$v=y_1(x_0\xi)^{(1+\gamma)/4}\eta\{S'(1-\eta^2+3\eta^4/5-\eta^6/7)-F/(3\xi)\eta^2(1-9\eta^2/5+9\eta^4/7-\eta^6/3)\}(1+Y)$$

となる。又亜境界層内では

$$u=1-S\{1-2w\eta_s(1-1/2\,\eta_s)\}$$

となる。

これで Blasius の層流境界層理論の前縁に於ける無理が取除かれた。

3. 層流から乱流への遷移

これから以下では簡単のため $x_0\leqq x\leqq 1$ の場合丈けを考えることとする。

$M=y_1^{3/2}$ の場合は

$$\bar{y}=2^{2/3}(1+\gamma)^{-1/3}R^{-1/3}x^{(1+\gamma)/3},$$
$$u=3\eta(1-\eta+\eta^2/3)$$
$$R=2^{2/3}(1+\gamma)^{-1/3}(AK)^{2/3}=R_2$$

となる。これは層流境界層の場合である。

このレイノルズ数よりレイノルズ数が大きくなると境界層の厚さは先ず薄くなり層流から乱流への遷移点に至るとそれから先は反対に厚くなり後縁の方から漸次乱流境界層がかぶさつて来る。

$$\varepsilon_2=R/R_2,\quad \varepsilon_3=R/R_3,\quad \varepsilon_3'=R_2/R_3,\quad \bar{\varepsilon}_3=(R_3-R)/(R_3-R_2),\quad \bar{\varepsilon}_3'=(R-R_2)/(R_3-R_2)$$

とすれば R_2 と R_3 との間では

$$x_0=2^{-4/3-\bar{\varepsilon}_3/3}K^{2\bar{\varepsilon}_3/\{3(1+\gamma)\}+4\bar{\varepsilon}_3'/\{5(1+\gamma)\}}$$

となる。$R_{2,3}'$ を層流から乱流への遷移点に対するレイノルズ数とすれば R_2 から $R_{2,3}'$ の間では

$$\bar{y}=2^{2/3+\alpha_2(1-\varepsilon_2)}(1+\gamma)^{-1/3}R_2^{-1/3}x^{(1+\gamma)/3},$$
$$u=3\eta(1-\eta+\eta^2/3)$$

となる。但 α_2 は $M=y_1^2$ の場合から $M=y_1^{3/2}$ の場合に移る際に定められる定数である。

x_1 を層流境界層の上にかぶさつて来る乱流境界層が層流境界層と交わる点を表わすものとすれば $R_{2,3}'$ より大きいレイノルズ数では $x_0\leqq x\leqq x_1$ に対し

$$\bar{y}=2^{2/3+\alpha_2'(1-1/\varepsilon_3)}(1+\gamma)^{-1/3}R_2^{-1/3}x^{(1+\gamma)/3}=\bar{y}_p,$$
$$u=3\eta(1-\eta+\eta^2/3),$$
$$v=(1+\gamma)^{-1/3+\alpha_2'(1-1/\varepsilon_3)}(1+\gamma)^{-1/3}R_2^{-1/3}x^{-(2-\gamma)/3}\eta^2(1-4\eta/3+\eta^2/2)$$

となる。

$R_{2,3}'$ で $\bar{y}_p$ が前の場合の $\bar{y}$ と等しくなければいけないから

$$\alpha_2'=\alpha_2R_{2,3}'(R_{2,3}'-R_2)/\{R_2(R_3-R_{2,3}')\}$$

となる。

$x_1 \leqq x \leqq 1$ に対しては

$$\bar{y}=18^{1/4}(1+\gamma)^{-1/4}R_3^{-1/4}(x-x_0')^{1/4}(1+Y),$$

$$Y=\sum_{n=1} a_n J_0[(1+\gamma)\alpha_n(x-x_0')]\sin(1+\gamma)\alpha_n t/6, \qquad \alpha_n=x_n/\{(1+\gamma)(x_1-x_0')\},$$

$$u=4\eta^2(1-3\eta^2/2+\eta^4-\eta^6/4),$$

$$v=2/3(1+\gamma)18^{1/4}(1+\gamma)^{-1/4}R_3^{-1/4}(x-x_0')^{-(3-\gamma)/4}\eta^3(1-9\eta^2/5+9\eta^4/7-\eta^6/3)(1-3Y)$$

となる。但 a_n は $x_1 \leqq \beta_m \leqq 1$ に対し

$\sum_{n=1}\alpha_n a_n J_0[(1+\gamma)\alpha_n(\beta_m-x_0')]=-1/\{(3(\beta_m-x_0')\}, \qquad m=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ で定められる。

$x_0=\delta x_1$ とすれば x_1 で二つの境界層の厚さが等しいことから

$x_1=2^{-5\{(1+\gamma)-12\alpha_2'(1-1/\varepsilon_3)/(1+\gamma)}3^{6/(1+\gamma)}(1+\gamma)^{1/(1+\gamma)}(1-\delta)^3R_2^{4/(1+\gamma)}R_3^{-3/(1+\gamma)}$ となる。

$R_{2,3}'$ に対しては $x_1=1$ であるから

$$A_2=\alpha_2'+5/12-\{6\log 3+\log(1+\gamma)+3(1+\gamma)\log(1-\delta)+4\log R_2-3\log R_3\}/(12\log 2)$$

とすれば $R_{2,3}'=\alpha_2'/A_2R_3$ となる。

$A_2>\alpha_2'$, $\alpha_2'/A_2R_3>R_2$ であるから

$$1-2^{5/\{3(1+\gamma)\}-}3^{-2/(1+\gamma)}(1+\gamma)^{-1/\{3(1+\gamma)\}}R_2^{-4/\{3(1+\gamma)\}}R_3^{1/(1+\gamma)}<\delta,$$

$$1-2^{5/\{3(1+\gamma)\}+4\alpha_2'(1-1/\varepsilon_3)/(1+\gamma)}3^{-2/(1+\gamma)}(1+\gamma)^{-1/\{(3(1+\gamma)\}}R_2^{-4/\{3(1+\gamma)\}}R_3^{1/(1+\gamma)}>\delta$$

となる。

$x_1=x_0$ に対するレイノルズ数を $R_{2,3}$ とし

$$B_2=A_2-(1+\gamma)/9, \qquad a_2=5(1+\gamma)+7\log K/\log 2,$$

$$a_1=180B_2(R_3-R_2)-5(1+\gamma)R_3+(5R_3-12R_2)\log K/\log 2,$$

$a_0=180\alpha_2'R_2(R_3-R_2)$ とすれば

$R_{2,3}=(-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2a_0})/(2a_2)$ となる。

x_1 に於て二つの境界層の境界に於ける v が等しいという条件から他の場合では δ が定まるのであるがこの場合では乱流境界層の v が大き過ぎて層流境界層の v と等しいと置けば δ が負となり仮定に反することとなるので両方の v を等しいと置けない。そこで上に得られた範囲内の値を δ に与える。これは遷移点が一定でないという実験的事実と一致する。又 x_1 で v が大きくなることが乱流境界層の振動の原因をなすものと考えられる。

$\bar{y}_p \geqq y$ に対しては

$$\bar{\eta}=\bar{y}_p/\bar{y}=2^{5/2+\alpha_2'(1-1/\varepsilon_3)}3^{-1/2}(1+\gamma)^{-1/12}R_3^{1/4}x^{(1+\gamma)/3}(x-x_0')^{-(1+\gamma)/4},$$

$$\bar{\eta}_1=-3\bar{\eta}_4(2-8\bar{\eta}^2+5\bar{\eta}^4), \qquad \bar{\eta}_2=-\bar{\eta}^2(4+18\bar{\eta}^2-60\bar{\eta}^4+35\bar{\eta}^6),$$

$$\bar{\eta}_3=-\bar{\eta}^4(18-40\bar{\eta}^2+2\bar{\eta}^4), \qquad \eta'=y/\bar{y}_p$$

とすれば

$$u=\bar{\eta}_1\eta'-\bar{\eta}_2\eta'^2+\bar{\eta}_3\eta'^3$$

となる。

$R_{2,3} \leqq R \leqq R_3$ に対しては完全に乱流境界層となり

$$\bar{y}=18^{1/4}2^{3/4\alpha_3(1-\varepsilon_3)}(1+\gamma)^{-1/4}R_3^{-1/4}x^{(1+\gamma)/4}(1+Y),$$

$$Y=\sum_{n=1}a_n\Big[J_0[(1+\gamma)\alpha_n x]-\{\alpha_n J_0'[(1+\gamma)\alpha_n]+J_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}/\{\alpha_n Y_0'[(1+\gamma)\alpha_n]$$
$$+Y_0[(1+\gamma)\alpha_n]\}Y_0[(1+\gamma)\alpha_n x]\Big]\sin(1+\gamma)\alpha_n t/6, \qquad \alpha_n=x_n/\{(1+\gamma)x_0\},$$

$$u=4\eta^2(1-3\eta^2/2+\eta^4+\eta^6/4),$$

$$v=2/3(1+\gamma)18^{1/4}2^{3/4\alpha_3(1-\varepsilon_3)/2}(1+\gamma)^{-1/4}R_3^{-1/4}x^{-(3-\gamma)/4}\eta^3(1-9\eta^2/5+9\eta^4/7-\eta^6/3)(1-3Y)$$

となり亜境界層では

$$y_s=4^{1/3}2^{\alpha_3(1-\varepsilon_3)}(1+\gamma)^{-1/3}R_3^{-1/3}x^{(1+\gamma)/4},$$

$$w=4/3.\,2^{5/6+\alpha_3(1-\varepsilon_3)/2}(1+\gamma)^{-1/6}R_3^{-1/6},$$

$$u=2w\eta_s(1-1/2\eta_s)$$

となる。

上の結果の示すように $R_{2,3}' \leqq R \leqq R_{2,3}$ では境界層内の速度分布は混合型となり今日までに得られた理論的のものと異る。実験結果と理論値との比較に際し注意しなければいけない。

乱流境界層内の速度変動の振動数は遷移点から段々大きくなり $R_{2,3}$ からは漸次小さくなる。

追記上記の論文では粘性項を $\mu Y(x, y, t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ としたので速度分布が実験と一致しない点があつたが粘性項を $\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\nu(x, y, t)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\}$ とすれば実験とよく一致する速度分布 $u=1-(1-\eta)^8$ が得られる他はこれに従つて修正されるが結論の大部分はその儘使用出来る.