

(昭和27年11月造船協会秋季講演会に於て講演)

造波現象の理論に関する Rayleigh の方法に就て

(非定常造波抵抗理論—其の3)

正員 花岡達郎*

On Rayleigh's System concerning the Theory of
Wave-Making Phenomena,

(Non-uniform Theory of Wave Resistance part 3)

By Tatsuro Hanaoka, *Member*

Abstract

The author has already shown that acceleration field is almost in conformity with the velocity field in wave motion, and he adopted the system to analyse the acceleration field in connection with the velocity field.

In this paper he introduces the same conception in Rayleigh's system and analyses the velocity and acceleration fields concerning the general motion of waves due to a moving ship, applying Heaviside's operational method.

は し が き

水上を航走する船舶は一般に縦に長い流線型物体であるが、この吃水が非常に深い場合又は非常に浅い場合の様に極めて極端な船型に就て、各別個に船を表わす流場の特異点分布が与えられ、そして解析が行われるのが常である。然し水上船舶は一般にこの両極端の中間の船型を採るものであるから、船幅、吃水両者の影響を合理的に合成させる必要がある。この様な意図から、筆者は加速度場を基礎とする造波現象の理論を展開して来た。¹⁾これ迄執筆した理論は Rayleigh の方法を用いず、夫々の問題に応じて決定条件を導入した為解析法は非常に複雑な形になった。Rayleigh の方法を用いれば、波動の決定条件を特に考慮する必要もなく、解析は非常に簡単になる。依つて加速度場の解析に Rayleigh の方法を導入した。Rayleigh の方法を用いた場合も、速度場と加速度場とは、その解析的構造が同型になり、その解析法も同一であつて、簡単な演算子の作用に依つて、速度場は加速度場に、又加速度場は速度場に変換される。問題を解くに当つて、Heaviside 演算子法を応用したが、この方法を用いる時に、攪乱源の時間的变化に対する、波動の過渡現象を一層明瞭に知る事が出来る様に思う。

座標系としては、静止自由表面を xy 面とし、 z 軸の正の方向を鉛直上方としたものを用いる。又以下で Rayleigh 流場又は理想流体の流場と云うのは、夫々の線型流場を意味するものとする。

物体が流体中を運動する時、物体は場の特異点分布に依つて置換えられる。この様に物体を直接表現する特異点分布に依る場の攪乱を印加攪乱、更に印加攪乱に誘導されて起る攪乱を誘導攪乱と名付ける事にする。以下で略して単に攪乱と云う時は、印加攪乱を意味するものとする。

§ 1. 速度場と加速度場

自由表面上昇量 ζ 流体圧力 p 及び密度 ρ と

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{p}{\rho} - gz \\ \phi &= -\frac{p}{\rho} - g\zeta, \quad z=0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

の関係にある ϕ を加速度ポテンシャルと呼ぶ事にすれば、Rayleigh 流場の速度ポテンシャル Φ と ϕ とは

* 運輸技術研究所

1) 花岡達郎：造船協会論文集 第 89 号，第 90 号。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \Phi = \phi \quad (1.2)$$

の関係にある。茲に μ は Rayleigh の摩擦係数である。 $t=0$ の時刻に於て、流体が静止しているものとすれば、(1.2) の逆の関係式は

$$\Phi(x, y, z, t) = \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \phi(x, y, z, \tau) d\tau \quad (1.3)$$

である。即ち演算子 $\frac{\partial}{\partial t} + \mu$ 及び $\int_0^t d\tau e^{-\mu(t-\tau)}$ は夫々速度場より加速度場へ、又は加速場より速度場への変換演算子である。 ϕ が Laplace の方程式を満足する時は、(1.2) に依り、 Φ も亦 Laplace の方程式を満足しなければならない。

Rayleigh 流場の自由表面条件式を

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z=0 \quad (1.4)$$

とすれば、(1.2) 及び (1.4) より、加速度場の自由表面条件式も亦 (1.4) と全く同型の式が得られる。

即ち Φ も ϕ も共に Laplace の方程式を満足すると共に、同型の自由表面条件式を満足しなければならない。この事は速度ポテンシャルと加速度ポテンシャルは同じ解析的構造を有するものである事を示している。我々が問題を解析するに当つては、速度場も又加速場も共に求める必要のある場合が多いが、攪乱源の性質に依つて速度場が先に求められる事も、又加速場が先に求められる事もある。それ等を加速度場又は速度場に変換するには、(1.2) 又は (1.3) を用いればよい。

§ 2. 調和振動をする攪乱源

前節で述べた様に、速度場も加速度場も、その解析法は同じであるから、これ等を場のポテンシャル函数と呼び、特に断らぬ限り、場のポテンシャル函数は速度ポテンシャル又は加速度ポテンシャルの何れとを考えても差支えない。

Ω 面上に分布する湧源の強さが振動率 ν で調和振動をしている時のポテンシャル函数は既に求められている。²⁾ 即ち

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) = & -\frac{e^{i\nu t}}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y', z') \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & - \frac{g e^{i\nu t}}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y', z') dS \int_0^{\infty} \frac{k e^{k(z+z')} J_0(kD)}{\nu^2 - gk - i\nu\mu} dk \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{但し } R_1 = \sqrt{D^2 + (z-z')^2}, \quad R_2 = \sqrt{D^2 + (z+z')^2}, \quad D = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

である。茲に σ は湧源の強さの振幅である。攪乱源が複源分布の時は、(2.1) の右辺の σ に乗ぜられた項を x', y', z' を通じて複源の軸の方向に微分すれば、そのポテンシャル函数が求められる。

§ 3. 瞬間的攪乱

$t=0$ に於て瞬間的に場に攪乱が与えられ、直ちに取去られた場合の波動現象を表わすポテンシャル函数を求めてみる。(2.1) に於て $i\nu = p$ と書けば

$$\Phi = \frac{e^{pt}}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS + \frac{g e^{pt}}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} \frac{k e^{k(z+z')} J_0(kD)}{p^2 + \mu p + gk} dk \quad (3.1)$$

となる。この式の右辺の p に就て、Bromwich の積分路に沿つて $\frac{1}{2\pi i} \int_{Br} dp$ の積分を行えば

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \cdot O + \frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} G_0(t, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \quad (3.2)$$

となる。茲に O は $t=0$ に於て 1, $t \leq 0$ に於て 0 なる事を表わす跳躍函数であり、又

$$G_0(t, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{e^{pt}}{p^2 + \mu p + gk} dp$$

である。(3.2) は攪乱が時刻 $t=0$ に於て瞬間的に加えられた時のポテンシャル函数である。 G_0 の p の積分を行えば

2) T. H. Havelock: Proc. Roy. Soc., Vol. 93, 1917, p. 520.

$$G_0(t, k) = \frac{2}{\sqrt{4gk - \mu^2}} e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} t \quad (3.3)$$

となる。

例えば、自由表面上の領域 Ω に $\phi = -\sigma$ なる攪乱が瞬間的に作用した時の加速度ポテンシャルは、(3.2) の σ に乗ぜられた項を z' で微分して、 $z' = 0$ と置けば求められる。即ち

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\sigma z}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2\}^{3/2}} dS \cdot O + \\ & + \frac{g}{\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} t}{\sqrt{4gk - \mu^2}} k^2 e^{kz} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (3.4)$$

である。

§ 4. 持 続 的 攪 乱

時刻 $t=0$ から持続的に、強さ一定の攪乱が場を与えられたときのポテンシャル函数を求めてみる。(3.1) の右辺の p に就て、Bromwich の積分路に沿つて $\frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{dp}{p}$ の積分を行えば

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \cdot 1 + \frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} G_1(t, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \quad (4.1)$$

と書かれる。茲に 1 は Heaviside の単位函数であり、又

$$G_1(t, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{e^{pt}}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + \mu p + gk} dp$$

である。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{e^{pt}}{p} \cdot \frac{1}{(p+a)(p+b)} dp = \frac{1}{ab} - \frac{1}{a-b} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$$

の公式を用いれば

$$G_1(t, k) = \frac{1}{gk} - T(t, k) \quad (4.2)$$

$$\text{但し } T(t, k) = \frac{e^{-\frac{\mu}{2}t}}{gk} \left\{ \cos \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} t + \frac{\mu}{\sqrt{4gk - \mu^2}} \sin \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} t \right\} \quad (4.3)$$

となる。(4.2) を (4.1) に代入すれば、

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \cdot 1 - \frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} T(t, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \quad (4.4)$$

となる。これが $t=0$ より持続的に攪乱が加えられる時のポテンシャル函数である。

例えば $t=0$ から持続的に自由表面に $\Phi = -\sigma$ なる攪乱が加えられた時の速度ポテンシャルは (4.4) の σ に乗ぜられた項を z' で微分して、 $z' = 0$ と置けば求められる。即ち

$$\Phi = -\frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} T(t, k) k^2 e^{kz} J_0(kD) dk \quad (4.5)$$

である。(4.5) を加速度ポテンシャルと考えれば、これは自由表面に $\phi = -\sigma$ なる攪乱が $t=0$ より持続的に加えられた時のものである。(1.1) に依り $\sigma = \frac{p}{\rho} + g\xi$ と書かれるから、攪乱源としては、強制圧力又は自由表面上昇量の何れとを考えてもよく、又これ等の合成されたものと考えても差支えない。加速度ポテンシャル (3.4) も (4.5) も共に、 $t=0$, $z=0$ に於て $\phi = -\sigma$ となるが、 $t=0$ 以後の攪乱の加え方の相異に依つて、その後の波動現象も異なる。(4.5) を加速度ポテンシャルと考え、(1.3) に依つて、これを速度ポテンシャルに変換すれば

$$\Phi = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \sigma dS \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} t}{\sqrt{4gk - \mu^2}} \cdot k e^{kz} J_0(kD) dk \quad (4.6)$$

となる。(4.5) 及び (4.6) の σ の分布が原点に関して対称の時は、Neumann の加法定理を利用する事に依つて、夫々

$$\Phi = -g \int_0^\infty \sigma(\gamma') J_0(k\gamma') \gamma' d\gamma' \int_0^\infty T(t, k) k^2 e^{kz} J_0(k\gamma) dk \quad (4.7)$$

$$\Phi = -2 \int_0^\infty \sigma(\gamma') J_0(k\gamma') \gamma' d\gamma' \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} t}{\sqrt{4gk-\mu^2}} \cdot k e^{kz} J_0(kD) dk \quad (4.8)$$

と書かれる。これ等の式の μ を 0 と置けば、

$$(4.7) \text{ は, } t=0, \quad z=0, \quad \Phi = -\sigma(\gamma), \quad \xi=0,$$

$$(4.8) \text{ は, } t=0, \quad z=0, \quad \Phi=0, \quad \xi = \frac{\sigma}{g},$$

の境界条件から、既に古くより求められている速度ポテンシャルに等しくなる。初期値を与えて解かれた速度場も、この様にすれば、印加擾乱の時間的経過状態を知る事が出来る。

§ 5. 任意擾乱

物体が流体中を運動する場合、物体を代表する特異分布の占める空間 $\bar{\Omega}$ は、時間の経過に伴って、位置及び形状を変えるものであるが、 $t=0$ より現在迄の $\bar{\Omega}$ 総和を Ω として、これを特異点の分布する空間、即ち擾乱源の存在する空間と考えれば、 Ω は時間的に変動しない空間である。時間の経過に伴って、任意に変化する擾乱が場に加えられた時のポテンシャル函数を Heaviside 演算子法に依つて求めてみる。

$$A(p) = \frac{1}{p^2 + \mu p + gk}$$

と書けば、演算子方程式は $A(p) = G_1(t)$ である。

重畳定理として知られる Dahmel の積分公式は

$$\left. \begin{aligned} A(p)\sigma(t) &= \sigma G_1(t) + \int_0^t \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} G_1(t-\xi) d\xi \\ A(p)\sigma(t) &= \sigma(t) G_1(0) - \int_0^t \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} G_1(t-\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

である。Heaviside の単位函数に依つて表わされる印加擾乱が場に加えられた時のポテンシャル函数が (4.1) の時は、任意の時間的に変化する印加擾乱が場に加えられた時のポテンシャル函数は、(4.1) に (5.1) を適用する事に依り

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS - \frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(0) dS \int_0^\infty T(t, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \\ &\quad - \frac{g}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} dS \int_0^\infty T(t-\xi, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.2)$$

又は

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(t) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS + \frac{g}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) dS \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} T(t-\xi, k) k e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \quad (5.3)$$

と書かれる。(5.2) 及び (5.3) は任意擾乱に於て、基礎となるポテンシャル函数である。

$$T'(t) = \frac{\partial T(t)}{\partial t} = - \frac{2e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} t}{\sqrt{4gk-\mu^2}} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mu T' = -gkT(t)$$

であるから、(5.3) を速度ポテンシャルと考えれば、これに対応する加速度ポテンシャルは、(1.2) に依り

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mu \sigma \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \\ &\quad + \frac{g^2}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) dS \int_0^\infty T(t-\xi) \cdot k^2 e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。次に (5.3) を加速度ポテンシャルと考えた時、これに対応する速度ポテンシャルを求めてみる。(5.3)

に (1.3) の演算を行えば,

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \iint_{\Omega} \sigma(\tau) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & + \frac{g}{2\pi} \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) dS \int_0^\infty \frac{2e^{-\frac{\mu}{2}(\tau-\xi)} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} (\tau-\xi)}{\sqrt{4gk-\mu^2}} \cdot ke^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.6)$$

と書かれる。Dirichlet 変換を用いれば, (5.6) の右辺第2項の τ に関する積分は容易に行われ, (5.6) は

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) dS \int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{2}(t-\xi)} \left\{ \cos \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} (t-\xi) - \frac{\mu}{\sqrt{4gk-\mu^2}} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} (t-\xi) \right\} \\ & \times e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる。同様にして, (5.2) に対応する加速度ポテンシャル又は速度ポテンシャルを求める事が出来る。(5.2) を速度ポテンシャルと考えた時の加速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS + \frac{\mu}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & + \frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(0) dS \int_0^\infty T(t, k) ke^{k(z+z')} J_0(kD) dk \\ & - \frac{g}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} dS \int_0^\infty T(t-\xi, k) \cdot ke^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\text{但し } T(t, k) = \frac{\partial T}{\partial t} + \mu T = -\frac{2gk-\mu^2}{gk\sqrt{4gk-\mu^2}} e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} t + \frac{\mu}{gk} e^{-\frac{\mu}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} t$$

である。又 (5.2) を加速度ポテンシャルと考えた時, これに対応する速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{4\pi} \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(0) dS \int_0^\infty T'(t) e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} dS \int_0^\infty T'(t-\xi) \cdot e^{k(z+z')} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (5.9)$$

である。茲に $T'(t)$ は (5.4) に示す函数である。

§ 6. 直進運動をする強制圧力

前節で求めた式を用いて, 強制圧力が自由表面上を一定速度 V で, x 軸の負の方向に直進運動をする場合の流場を解析してみる。

(5.7) の σ に乗ぜられた項を z' で微分して, $z'=0$ と置けば,

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \sigma(\xi) dS \int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{2}(t-\xi)} \left\{ \cos \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} (t-\xi) - \frac{\mu}{\sqrt{4gk-\mu^2}} \sin \frac{\sqrt{4gk-\mu^2}}{2} (t-\xi) \right\} \\ & \times ke^{kz} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。これは自由表面上の Ω なる領域に, $\phi = -\sigma(\xi)$ なる攪乱が作用している時の速度ポテンシャルである。時間的に一定な攪乱 $\phi = -\sigma$ が自由表面上を x 軸の負の方向に一定速度 V で運動する場合は攪乱 σ と共に運動する座標系に関しては, σ は時間に無関係である。時刻 t の時, 静止座標系の一点 x_1 は, 運動座標系に関しては x に対応し, 又過去の時刻に於ては, 運動座標系の X に対応するものとすれば, $V(t-\xi) = x - X$ の関係がある。

故に (6.1) の x の代りに $x - V(t-\xi)$ と書けば, (6.1) は運動座標系に変換された事になる。(6.1) の $J_0(kD)$ の代りに

$$J_0(kD) = Re \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ik\tilde{\omega}} d\alpha \quad (6.2)$$

但し $\tilde{\omega} = (x-x')\cos\alpha + (y-y')\sin\alpha$
と書き, ξ に関する積分を行えば,

$$\begin{aligned} \Phi = & Re \frac{i}{2\pi^2 V} \iint_{\Omega'} \sigma(x', y') dS \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^\infty \frac{k \sec \alpha \cdot e^{kz + ik\tilde{\omega}}}{k - \kappa' \sec^2 \alpha - i\mu' \sec \alpha} dk \\ & - Re \frac{i}{2\pi^2 V} \iint_{\Omega'} \sigma(x', y') dS \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cdot \\ & \times \int_0^\infty \frac{k \sec^2 \alpha \cdot e^{-\frac{\mu'}{2} V t - ikV \cos \alpha + kz + ik\tilde{\omega}} \left\{ \cos \alpha \cdot (\cos j' V t - \frac{\mu'}{2j'} \sin j' V t) + \frac{i\kappa'}{j'} \sin j' V t \right\}}{k - \kappa' \sec^2 \alpha - i\mu' \sec \alpha} dk \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。茲に Ω' は運動座標系に於て, σ の分布する領域を意味し, 又 $\mu' = \mu/V$, $j' = \sqrt{4\kappa'k - \mu'^2}/2$, $\kappa' = g/V^2$ である。攪乱 σ が無限前時間より運動を続けている時は, $t \rightarrow \infty$ であるから, (6.3) の右辺第 2 項は消失して, 第 1 項のみとなる。

次に圧力積が自由表面上を運動する場合に就て考える。強制圧力が自由表面上を運動する時の流場は又圧力積が自由表面上を運動すると考えて解かれる事がある。この時は (4.7) を基礎式として, 流体運動を時間的に積分している。これを一般的に書いたのが, (5.2) 又は (5.3) であるが, 原理的には (5.2) を用いた事になる。(5.2) の σ に乗ぜられた項を z' で微分して, $z' = 0$ と置けば,

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{g}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(0) dS \int_0^\infty T(t, k) k^2 e^{kz} J_0(kD) dk \\ & -\frac{g}{2\pi} \int_0^t d\xi \iint_{\Omega} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} dS \int_0^\infty T(t-\xi, k) k^2 e^{kz} J_0(kD) dk \end{aligned} \quad (6.4)$$

となる。これは自由表面上 $\Phi = -\sigma(\xi)$ になる攪乱が加えられた時の速度ポテンシャルである。理想流体の線型流場では, $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \phi(\xi)$ であるから, (6.4) の $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$ は (6.1) の σ と同じものになる。従つて (6.4) を運動強制圧力の流場に応用する事が出来る。(6.4) の右辺第 1 項は印加攪乱の初期状態に依つて生じた誘導攪乱の現在に於ける状態を意味するもので, 攪乱開始より有限時間後では有限である。従来の理論では (6.4) の右辺第 1 項は無視されている³⁾ が船が動き出す事によつて圧力積が生じると考えれば $\sigma(0) = 0$ と考えてよい。

§ 7. 直 進 振 動 攪 乱

筆者は前の論文¹⁾に於て, 調和振動をしながら, 一定速度で直進する攪乱源に依る流場を解析した。これは, 本論文の基礎式を用いても求める事が出来る。長さ l , 幅無限大の領域に分布する強制圧力が振動率 ν で調和振動をしながら, x 軸の負の方向に一定速度 V で直進する場合を考える。(6.1) の σ が y に無関係であるとするれば, 二次元流となり, y に就ての積分は直ちに行われる。

$\sigma(\xi)$ は $\bar{\sigma} e^{i\nu\xi}$ と書かれるから, x 軸の負の方向に一定速度 V で直進する座標系に就て書けば,

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{e^{i\nu t}}{\pi} \int_{t-\frac{l}{V}}^0 e^{-i\nu\tau} d\tau \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \bar{\sigma}(x') dx' \int_0^\infty e^{\frac{\mu}{2}\tau} \left\{ \cos \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} \tau + \frac{\mu}{\sqrt{4gk - \mu^2}} \sin \frac{\sqrt{4gk - \mu^2}}{2} \tau \right\} e^{kz} \\ & \times \cos k\{(x-x') + V\tau\} dk \end{aligned}$$

となる。 τ に関する積分の下限を $-t \rightarrow -\infty$ として, 積分すれば

$$\Phi = -\frac{i}{2\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \bar{\sigma}(x') e^{i\nu t} dx' \int_0^\infty e^{kz} \frac{\left(k - \frac{\nu}{V}\right) e^{-ik(x-x')}}{\left(k - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k + i\mu' \left(k - \frac{\nu}{V}\right)} dk$$

3) T. H. Havelock; Proc. Roy. Soc., Vol. 93, 1917, p. 240.

$$-\frac{\left(k+\frac{\nu}{V}\right)e^{ik(x-x')}}{\left(k+\frac{\nu}{V}\right)^2-\kappa'k-i\mu'\left(k+\frac{\nu}{V}\right)}\Bigg\}dk \quad (7.1)$$

となる。ここで、 $\mu \rightarrow 0$ にすれば筆者が前論文で求めた式に一致する。

同様にすれば三次元流場の速度ポテンシャルも求められる。結果のみ記せば、

動揺する浅吃水船の速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{ie^{i\nu t}}{4\pi^2\rho V} \iint \bar{p}(x', y') dS \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^\infty k e^{kz} \left\{ -\frac{\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k + i\mu'\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k - i\mu'\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)} \right\} dk \quad (7.2) \end{aligned}$$

深吃水船の対称流場の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{e^{i\nu t}}{2\pi} \iint w(x', z') \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dS \\ & + \frac{\kappa'e^{i\nu t}}{2\pi^2} \iint w(x', z') dS \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^\infty k e^{k(z+z')} \left\{ \frac{e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k + i\mu'\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k - i\mu'\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)} \right\} dk \quad (7.3) \end{aligned}$$

深吃水船の非対称流場の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{e^{i\nu t}}{4\pi V} \iint \hat{\phi}(x', z') dS \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu'(x-X) - \frac{i\nu}{V}(x-X)} \left\{ \frac{y}{R_1^3} + \frac{y}{R_2^3} \right\} dX \\ & + \frac{e^{i\nu t}}{4\pi^2 V} \iint \hat{\phi}(x', z') dS \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^\infty k e^{k(z+z')\sin\alpha} \left[\frac{\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k + i\mu'\left(k\cos\alpha - \frac{\nu}{V}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa'k - i\mu'\left(k\cos\alpha + \frac{\nu}{V}\right)} \right] dk \quad (7.4) \end{aligned}$$

となる。