

# 船の上下動揺並びに縦動揺に於ける減衰力及び附加質量について

正員 田 才 福 造\*

On the Damping Force and added Mass of Ships Heaving and Pitching

By Fukuzo Tasai, *Member*

## Abstract

When cylinders of Lewis Form sections heave and pitch on the free surface, their damping force and the added mass were exactly calculated by Ursell's Method. And many figures in this report show the results of the calculation. Then the reporter calculated, applying the results of the above-mentioned calculation and by Strip Method, the damping force and the added mass of the two ships, which were respectively put to test by Golovato and Gerritsuma. The added mass and the added moment of inertia which the reporter gained by Strip Method showed good coincidence with the results of Golovato's and Gerritsuma's experiments. To get better estimation on the damping force by Strip Method, it is necessary to calculate more closely the three dimensional effect, non-linear effect, etc. As to the added mass the three dimensional correction could be negligible except for small  $\xi_1^*$ .

## 1. 緒 言

船の上下動揺並びに縦動揺の減衰力及び附加質量の計算を行う場合、一般に前進速度を有する 3 次元船体について行うことは非常に困難であるので、普通 Strip Method が用いられる。このために船形断面を有する無限長柱状体に対する 2 次元値が必要である。減衰力に関しては、Havelock [1] による Source Method がある。これは可成りの近似を与えるが、Golovato [2] の実験によれば、全体的に実験値との差が大きい様である。円柱に就いては、Ursell [3] によつて厳密な値が求められた。また O.Grim [4] は、別の方法で、種々の断面に対して、割合厳密な値を求め、さらに水面で鉛直な輪かくを有する断面に対して、よい近似方法を発表している。次に附加質量に関しては、Ursell [3] の円柱に対する厳密な計算がある。また O.Grim も数箇の断面について計算を行つているが、その値には疑問がある様である。船の附加質量を計算する時、自由表面の補正係数  $K_A$  が必要であるが、K.Kroukovsky [5] は上下動揺に対して 0.75 縦動揺に対して 1.20 を用いている。また [6] に於ては、Ursell の円柱に対する  $K_A$  を全断面に亘つて使用している。中村彰一助教授 [7] も同様な方法に依て居られる。本論に於ては、Ursell [3] に於て使用された方法を拡張して、水面で鉛直な輪かくを有する諸種の無限長柱状体が強制動揺する時の進行波高並に附加質量の厳密な計算を行つた。この結果を用い船の減衰力及び附加質量を Strip Method で計算し、Golovato [2] 及び Gerritsuma [8] の実験との比較をした。なお減衰力の一層合理的な算定に対して研究が続けられているが、今日迄の結果を一応発表する次第である。

## 2. 柱状体の強制上下動揺によつて生ずる進行波高並に附加質量の計算

### 2.1 境界条件及び基礎条件

Fig. 1 に於て、 $z$ -平面で図の断面を有する無限に長い柱状体が、 $y$  方向に小振幅の単弦上下動揺を行うと、物体からの距離が遠くなるにつれて、急激に振幅を減少する Standing Wave と、規則的な進行波を発生する。さて、水の粘性及び表面張力を無視すると、流れは速度ポテンシャル  $\phi$  及び流れ函数  $\psi$  を有し、Laplace の方程式を満足する。また自由表面条件は一次的に次式の如くなる。

$$K\phi + \partial\phi/\partial y = 0 \quad (y=0, x > B/2) \quad (1)$$

但し  $K = \omega^2/g$ ;  $\omega$  は円振動数

原稿受付 昭和 34 年 1 月 9 日

\* 九州大学応用力学研究所

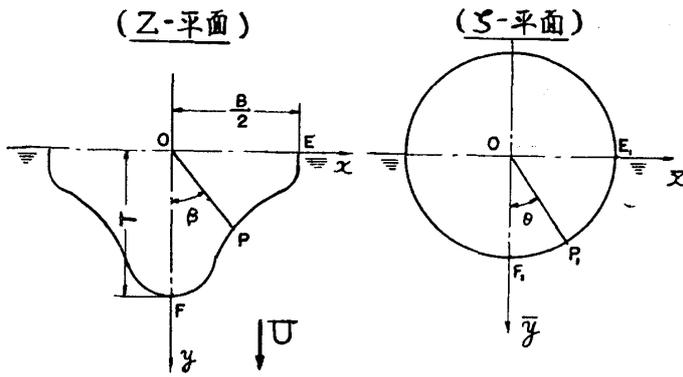


Fig. 1

また運動は  $y$  軸に関して対称である。次に最初自由表面上 ( $y=0$ ) にあつた柱状体の軸が、微小変位  $y_h = h \cos(\omega t + \epsilon)$  を行うものとする。

$$dy_h/dt = -h\omega \sin(\omega t + \epsilon) \equiv U \quad (2)$$

とおけば、 $h$  が小さい時は、柱状体上の境界条件は、その平均の位置 ( $y=0$ ) に於て次式の如くなる。

$$\partial\phi/\partial\nu = U(\partial y/\partial\nu) \quad (3)$$

但し  $\nu$  は境界の外向法線である。

2.2 断面形の数学的表示

Fig. 1 の図形の  $x$  軸に関する鏡像を考え、

この2重図形の外部を  $\zeta$ -平面の単位円の外部に等角写像する函数は次式の如くなる。

$$Z/M = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cdot \zeta^{-(2n-1)} \quad (4)$$

$n=2$  とおけば

$$Z/M = \zeta + a_1/\zeta + a_3/\zeta^3 \quad (5)$$

となり、Lewis [9] 及び Grim [4] が計算に使用した図形である。本論に於ては、Lewis 断面について計算したが、さらに一般の場合にも同様に行うことができる。この Lewis 断面では、

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= ie^\alpha e^{-i\theta} \quad \text{とおけば} \\ x/M &= e^\alpha \sin\theta + a_1 e^{-\alpha} \sin\theta - a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\theta \\ y/M &= e^\alpha \cos\theta - a_1 e^{-\alpha} \cos\theta + a_3 e^{-3\alpha} \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

断面境界は  $\alpha=0$  とおいて

$$\left. \begin{aligned} x_0/M &= (1+a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta \\ y_0/M &= (1-a_1)\cos\theta + a_3 \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

断面の水面上の幅を  $B$ 、吃水を  $T$  とすれば、縮率  $M$  は

$$M = \frac{B}{2} / (1+a_1+a_3) \quad (8)$$

$$\text{また } \frac{B}{2} / T = H_0 = \frac{1+a_1+a_3}{1-a_1+a_3} \quad (9)$$

さらに断面積  $S$  及び断面係数  $\sigma = S/B \cdot T$  は夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{B}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-a_1^2-3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2} \\ \sigma &= \frac{S}{B \cdot T} = \frac{\pi}{4} \cdot H_0 \cdot \frac{1-a_1^2-3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

断面形を Lewis Form で近似する時は、(9)、(10) から  $a_1, a_3$  を決定する事ができる。

2.3 計算

計算法は「附録」に簡単に示されている。先ず、 $H_0=1.5$  の楕円柱について、 $\bar{A}$  及び  $K_4$  を計算して、Grim [4] の Bild.2 の結果と比較すると Fig. 2 の如くなる。 $\bar{A}$  については、Grim の厳密な計算値は、本論の値に非常に近い。[4] の Bild.2 に示された Grim の近似値は上方の点線である。Grim は円断面に対しては、近似式を誘導しているが、他の図形に対しては計算式を示していないの

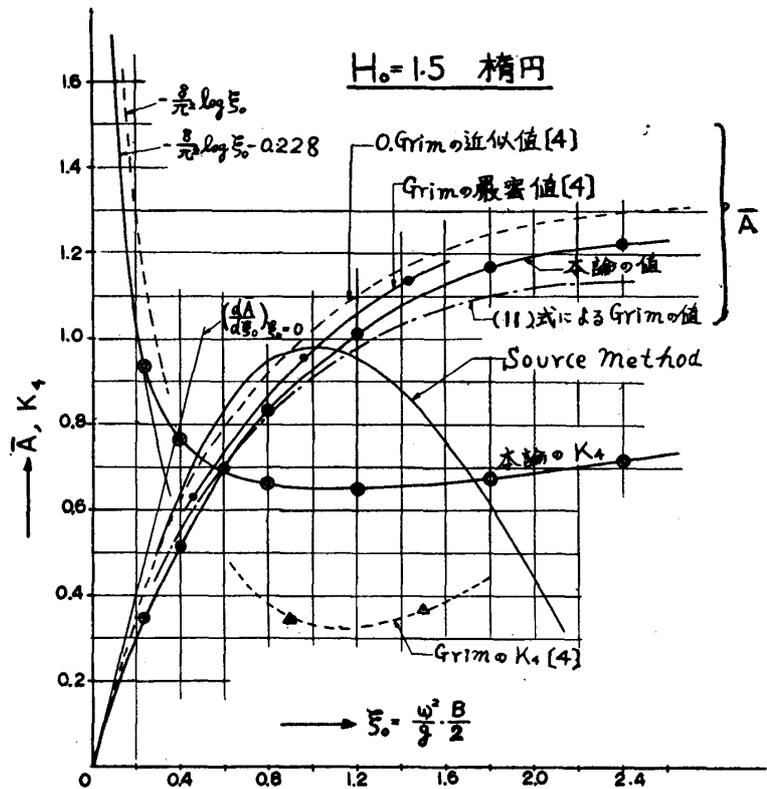


Fig. 2

で、Lewis 断面に対して、Grim の近似方法を適用すれば次式の如くなる。

$$A = 2\xi_0 \int_1^\infty \frac{\left(\frac{1+a_1}{\beta^2} + \frac{3a_3}{\beta^4}\right)}{1+a_1+a_3} \cos\left[\xi_0\left\{\frac{\beta^4+a_1\beta^2+3a_3}{(1+a_1+a_3)\beta^3} - 1\right\}\right] \cdot d\beta \quad (11)$$

円断面の場合は  $a_1=a_3=0$  とおけば  $\bar{A} = 2\xi_0 \int_1^\infty \frac{\cos\xi_0(\beta-1)}{\beta^2} d\beta$  となり、Grim が [4] の附録に示した結果と同じである。この (11) 式で計算すると図の鎖線の如くなる。この値は  $\xi_0 < 2.5$  で 10% 以内の誤差で本論の厳密値に近似している。Source Method による  $\bar{A}$  も図中に示されているが、これは相当誤差が大きい。附加質量の自由表面係数  $K_4$  の計算値は 2 重丸で示されている。Grim [4] の  $K_4$  も図中に示したが、Grim の値は非常に小さい。また Grim [4] は  $\xi_0 \rightarrow 0$  の近傍で  $K_4$  は  $-\frac{8}{\pi^2} \log \xi_0$  に近づく、といっているが、UrSELL

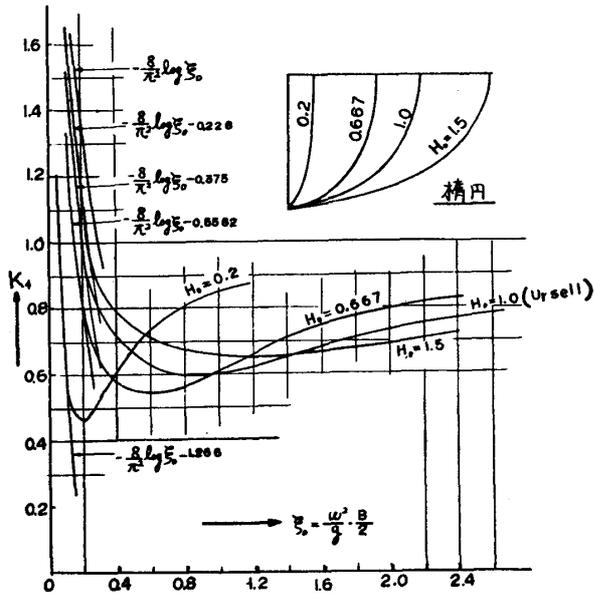


Fig. 3

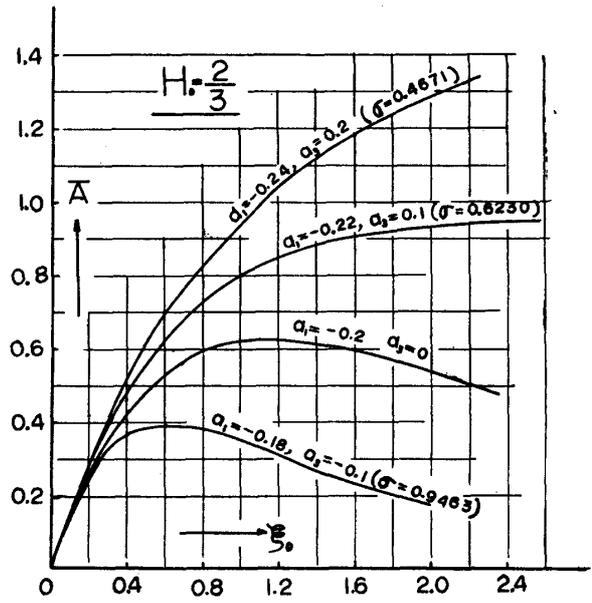


Fig. 4

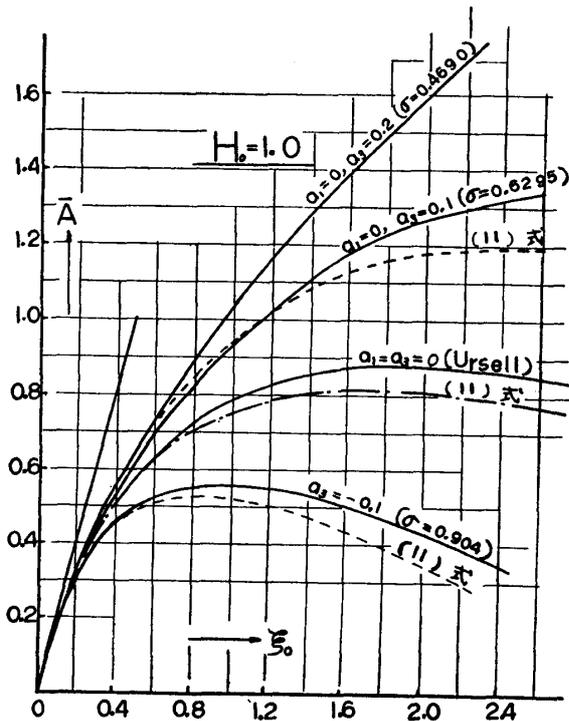


Fig. 5

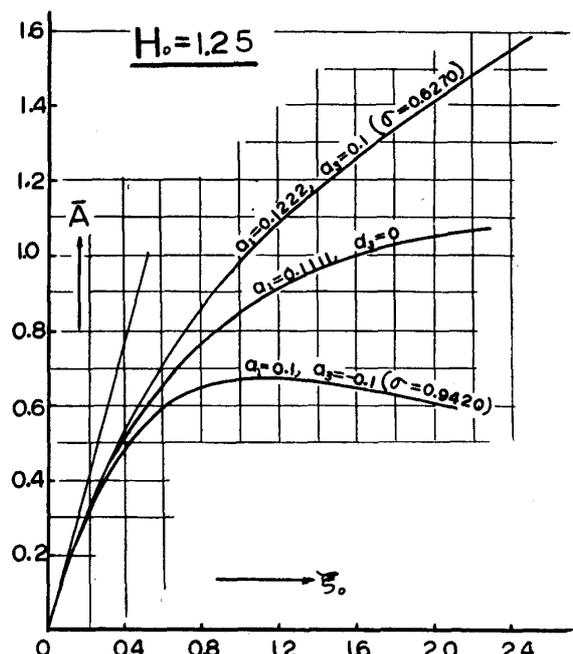


Fig. 6

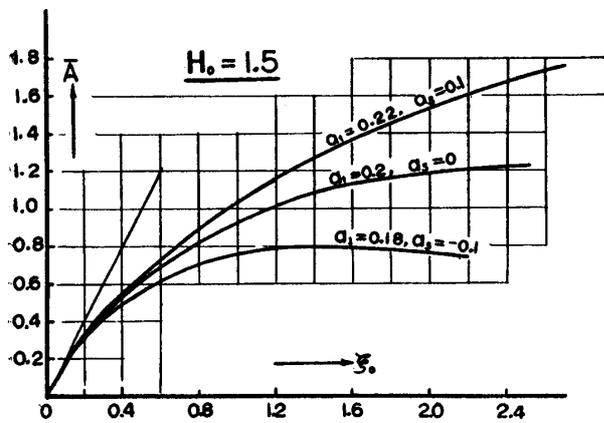


Fig. 7

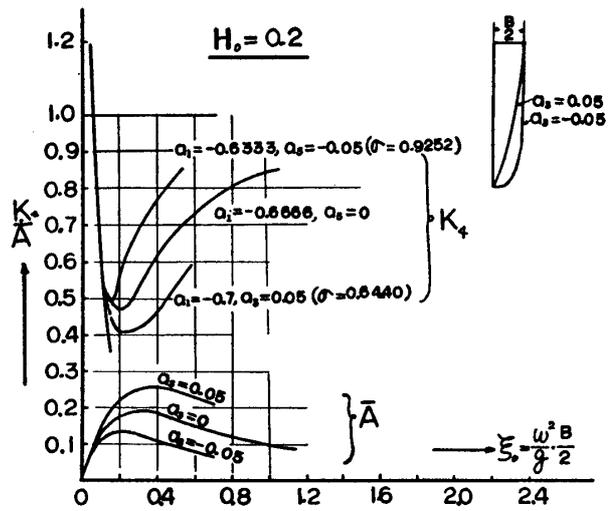


Fig. 8

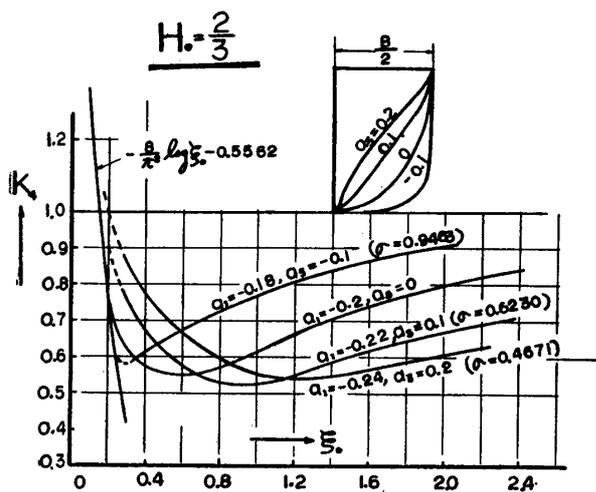


Fig. 9

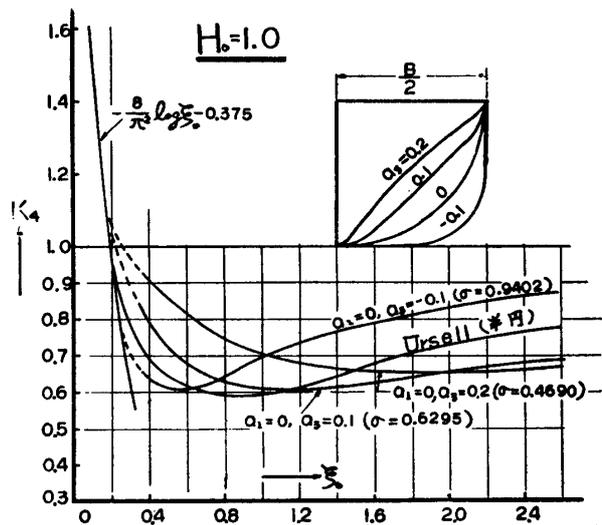


Fig. 10

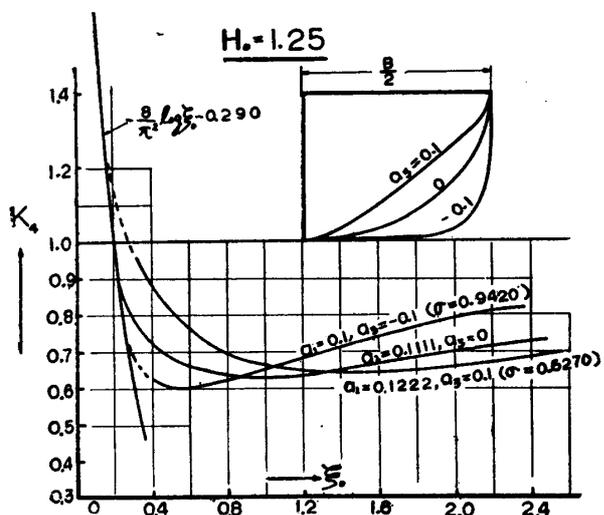


Fig. 11

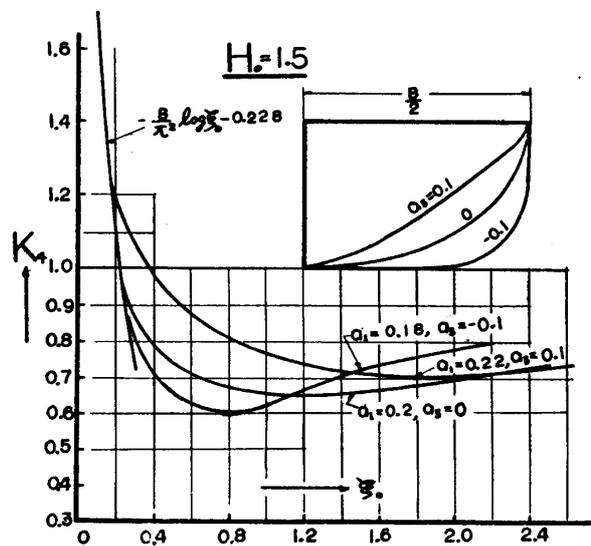


Fig. 12

[10] に示される如く、 $\xi_0 \rightarrow 0$  では、楕円の場合次の如くなる。

$$K_4 = -\frac{8}{\pi^2} \left[ \log \xi_0 + \log \left( 1 + \frac{1}{H_0} \right) - 0.23 \right] \quad (12)$$

これから  $H_0=1.5$  では  $K_4 = -\frac{8}{\pi^2} \log \xi_0 - 0.228$  となる。 $\xi_0=0.24$  に対する本論の計算値は上式の曲線に、非常によく接近している。次に、 $H_0=0.2, 0.667, 1.0, 1.25, 1.5$  に対する種々の Lewis 断面に対する  $A$  及び  $K_4$  の計算値は、Fig. 4 から Fig. 12 に示されている。各種楕円の  $K_4$  が  $H_0$  によつて変る様子を示したのが Fig. 3 である。Fig. 5 には (11) 式の近似値も図示してあるが、 $\xi_0$  の大きい所で、また断面形が肥える程、誤差が大きくなる。Fig. 8~12 の  $K_4$  に於ては、 $a_3 \neq 0$  の場合も、 $\xi_0 \rightarrow 0$  の近傍で、近似的に、同じ  $H_0$  の楕円の  $K_4$  に近づくものとした。

### 3. 模型試験と計算の比較

Golovato [2] 及び Gerritsuma [8] の実験に用いられた船に対して、上述の  $A, K_4$  の計算値を用いて、Strip Method で減衰係数並に見掛質量を計算し、実験値と比較する。船の前進方向に  $x$  軸、重力方向に  $z$  軸、横方向に  $y$  軸をとり、 $L.W.L$  上の  $\square$  に原点をおく。

$L$ =船の長さ、 $B^*$ = $\square$  の船幅、 $\Delta$ =排水量

$B$ = $\square$  から  $x$  の距離に於ける  $L.W.L$  上の船幅

$S$ = $\square$  から  $x$  の距離に於ける  $L.W.L$  以下の断面積

$m = \Delta/g$ =船の質量、 $I$ =船の縦慣性力率

$N$ =柱状体の上下動揺の減衰係数

$N_h, \mu_z$ =船の純粹上下動揺の減衰係数及び附加質量

$N_p, \mu_\varphi$ =船の純粹縦動揺の減衰係数及び附加慣性力率

$N = \frac{\rho g^2}{\omega^3} \cdot A^2$  であるからこれを  $x$  方向に積分して

$$N_h = \int_{-L/2}^{L/2} N dx = \rho g^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{A^2}{\omega^3} dx \quad (13)$$

$$N_p = \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot x^2 \cdot dx = \rho g^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{A^2}{\omega^3} \cdot x^2 \cdot dx \quad (14)$$

あるいは更に non-dimension 化して

$$N_h' = \frac{N_h \cdot \sqrt{gL}}{\Delta}, \quad N_p' = \frac{N_p \cdot \sqrt{gL}}{\Delta \cdot L^2} \quad \text{とおけば}$$

$$N_h' = \frac{1}{C_b \cdot T} \sqrt{\frac{B^*}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\bar{A}^2}{(\xi_1^*)^3} dx \quad (15)$$

$$N_p' = \frac{1}{C_b \cdot T \cdot L^2} \sqrt{\frac{B^*}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\bar{A}^2}{(\xi_1^*)^3} \cdot x^2 dx \quad (16)$$

但し  $C_b$ =block coefficient,

$$\xi_1^* = \omega \sqrt{\frac{B^*}{g}}$$

$\xi_0 = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{B}{2} = \frac{1}{2} (\xi_1^*)^2 \cdot \left( \frac{B}{B^*} \right)$  であるから、 $\xi_1^*$  と各断面の  $B/B^*$  とから  $\xi_0$  がきまり、その  $\xi_0$  に対して  $A$  を図から得れば、各断面の  $\bar{A}^2/(\xi_1^*)^3$  が求まる。次に柱状体の附加質量は  $1/2 \cdot \rho \pi \cdot (B/2)^2 \cdot C_b \cdot K_4$  であるから  $\mu_z$  は

$$\mu_z = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{B}{2} \right)^2 \cdot C_b \cdot K_4 \cdot dx \quad (17)$$

或は K. Kroukovsky [5] が表わした様に、 $S$  を用いれば

$$\mu_z = \rho \int_{-L/2}^{L/2} K_2 \cdot S \cdot K_4 \cdot dx \quad (18)$$

$K_2$  は Lewis Form に対しては、 $K_2 = (1+a_1)^2 + 3a_3^2 / (1-a_1^2 - 3a_3^2)$  となるが一般に Lewis-Prohaska [11] の方法によつて求められる。同様に

$$\mu_\varphi = \rho \int_{-L/2}^{L/2} K_2 \cdot S \cdot K_4 \cdot x^2 dx \quad (19)$$

Golovato [2] は、Weinblum [12] によつて与えられた数学的船型について、実験した。この船型は各断面が Wall-Side であり、上下動揺の振幅が割合小さく、理論計算との比較に適合したものである。 $\square$  に於ける  $H_0$

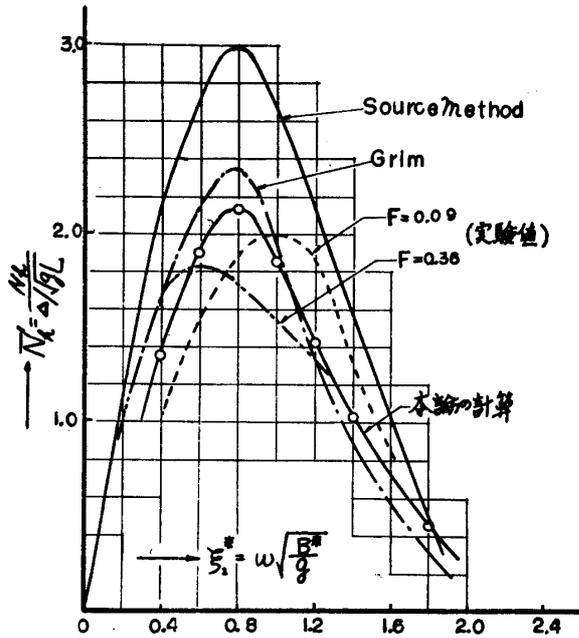


Fig. 13  
Damping-Coefficient

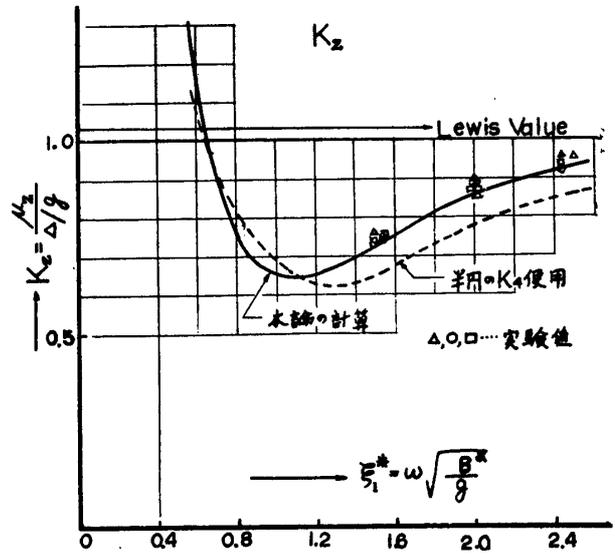


Fig. 14

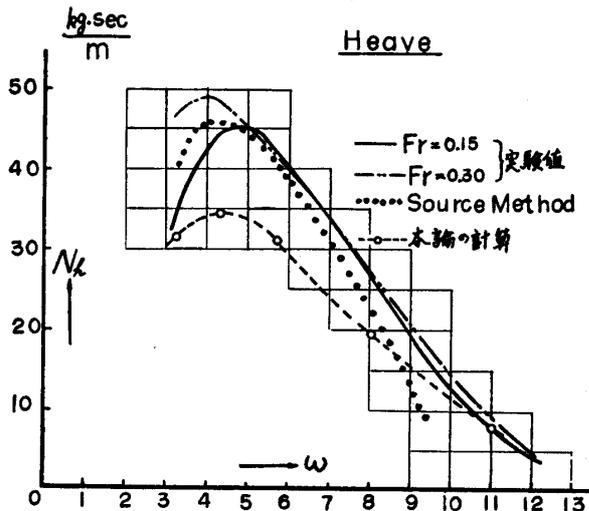


Fig. 15

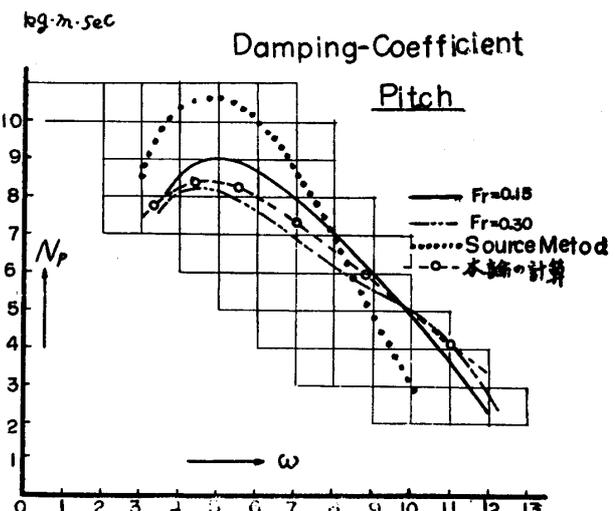


Fig. 16

即ち  $H_0^*=1.25$  であるから、 $H_0=1.25, 1.0, 2/3, 0.2$  の各断面について、 $B, x, S, \sigma, K_z$  を、更に  $\xi_1^*$  に対応する  $\xi_0$  を計算し、 $A, K_4$  を図からよみとり図式積分で  $N_h, \mu_z$  を得た。 $(\bar{A})$  は、 $\sigma$  に対しては内挿及び外挿によつた) Fig. 13 は Golovato [2] の Fig. 5 に本論の計算値を plot したものであるが、実験値は Froude 数が 0.09 と 0.36 の 2 種を記入した (他の Froude 数の実験点は両者の中間におちている)。本論の計算値は Grim の方法より一層実験値に近づいている。Fig. 14 の  $K_z$  に於ては、本論の計算値は  $\xi_1^* < 2.5$  で非常によく実験点を通つている。Ursell の半円に対する  $K_4$  を全断面に亘つて使用した場合の値も示されている。次に Gerritsuma [8] は、Todd の 60-series 母型について実験した。この場合も  $H_0^*=1.25$  なる故前と同様な方法で図式積分を行つた。Fig. 15, 16, 17, 18 に  $N_h, N_p, \mu_z, \mu_\varphi$  が夫々  $\omega$  を横軸に示されている。先ず、減衰係数の方では、 $N_h$  に於ては、本論の計算値は相当小さく、Source Method は全般的によく一致している。一方  $N_p$  では、本論の計算値は非常によい値を与えるが、Source Method は全般的に違いが大きい。実験と計算の差異に対しては、先ず 3 次元の影響がある。これに関しては、Havelock [13], Vossers [14] の計算があるが、Newmann [15] が Havelock [1] の 3 次元 Source の方法により、速度が零の時の 3 次元減衰係数を、Gerritsuma の実験模型に対して計算している。 $N_h$  では 2 次元 Strip Method の値よりも 20% 程度大きくなつている ([15] の Fig. 1 参照)。この 3 次元補正を本論の計算値に適用すれば、実験値に可成り接近する。

この3次元影響の外に Gerritsuma の模型では、後半部断面が Wall-Side でなく、 $L.W.L$  上で相当の傾斜をもっているため、理論計算値より多少異つたものになると思われる。また動揺振幅が大きいため、non-linear damping の影響も考えられる。これらの問題に関しては、目下実験を中心として、研究が行われている。

次に  $\mu_x, \mu_\varphi$  の計算値は Fig. 17, 18 に示されている。計測が不安定である  $\omega$  の小さい所を除けば、 $\mu_x, \mu_\varphi$  何れも計算は全般的に実験値に非常によく一致している。Golovato, Gerritsuma の両実験を通じて、この Strip Method による  $\mu_x, \mu_\varphi$  は非常に良好な値を与えている。又これから見て、見掛の質量、慣性モーメントに関しては、 $\xi_1^*$  の小さい所を除けば、3次元の影響は非常に小さく、実際問題としては、無視出来るものと思われる。

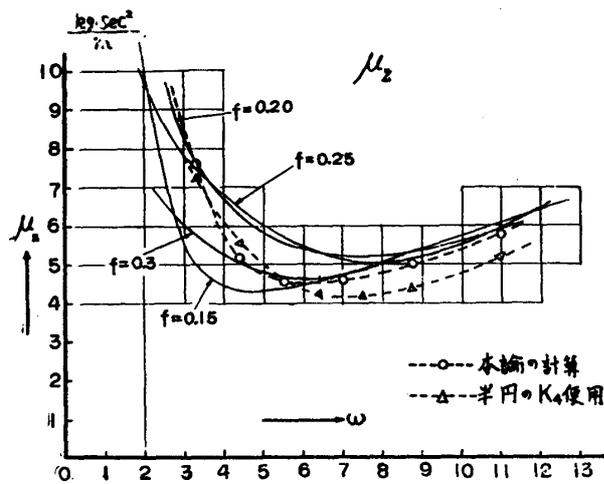


Fig. 17

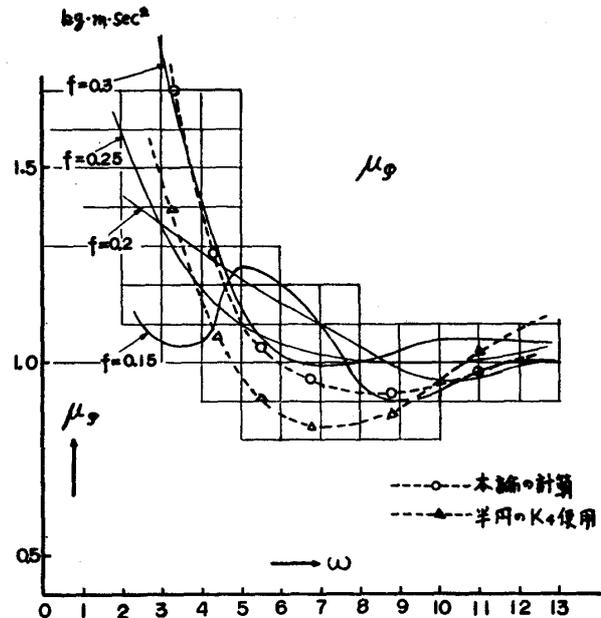


Fig. 18

#### 4. 結 語

以上の計算から次の様な結論が得られる。

(1) O.Grim [4] の中の  $\bar{A}$  図表に疑問のあるものもあるので、その計算式を (11) に示したが、この式を用いた Grim の近似方法は、本論の厳密な値に全般的によく近似している。Golovato [2] の実験との比較から見て、本論の計算値は Grim の方法より一層の改良が示される。一方 Gerritsuma の実験との比較から解る如く、実際の船型の減衰係数の算定には、3次元影響、断面が Wall-Side でないための影響、有限振幅の影響等による補正が必要である。

(2)  $K_4$  については、断面形の相違により、相当の変化がある。本論の柱状体に対する値を用い、Strip Method により得た船の  $\mu_x, \mu_\varphi$  は非常によい値を与える。

終りに、種々有益な御注意を賜った渡辺恵弘教授に感謝の意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

[1] T.H.Hvelock .....Phil. Mag., Sept. (1942).  
 [2] P.Golovato .....Journal of Ship Research., Apr. (1957).  
 [3] F.Ursell .....Quart. J.Mech. Appl. Math. (1949, p.218).  
 及び [5] の討論  
 [4] O.Grim .....Jahrb. Schiff.Ges. (1953).  
 [5] K.Kroukovsky.....S. N. A. M. E. (1955).  
 [6] K.Kroukovsky and Jacobs ...Report of Stevens Inst. Tech; No.659 (1957).  
 [7] 中村彰一助教授.....関西造船協会春季講演 (1958).  
 [8] J.Gerritsuma .....Report of Netherland's Research Centre T. N. O, No. 25 S (Oct., 1957).

- [9] F. M. Lewis .....S. N. A. M. E (1929).  
 [10] F. Ursell.....Quart. J. Mech. Appl. Math. (1949. Pt. 3, p. 335).  
 [11] Weinblum and St. Denis.....S. N. A. M. E (1950) (Fig. 12 参照).  
 [12] Weinblum.....Jahrb. Schiff. Ges., Vol. 47 (1953).  
 [13] T. H. Havelock.....T. I. N. A. (1956).  
 [14] Vossers. ....[13] の Discussion.  
 [15] J. N. Newman .....Journal of Ship Research ; July (1957).  
 [16] F. Ursell .....Proc. Roy. Soc. V. 220 (1953).  
 [17] F. Ursell .....Quart. J. Mech. Appl. Math. (1954).

## 「附 録」

(5) の写像変換のために, 自由表面条件は  $K \cdot B/2 = \omega^2/g \cdot B/2 \equiv \xi_0$  とおけば次の如くなる。

$$\xi_0 \phi \left( \frac{e^\alpha - a_1 e^{-\alpha} - 3a_3 e^{-3\alpha}}{1 + a_1 + a_3} \right) \mp \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \left( \theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ にて} \right) \quad (20)$$

$\nabla^2 \phi = 0$ , 自由表面条件 (20) 並びに  $y$  軸に関して対称なる条件を満足する次の如きポテンシャルの組を考える。

$$\begin{aligned} \phi_{2m} = & e^{-2m\alpha} \cos 2m\theta + \frac{\xi_0}{1 + a_1 + a_3} \left[ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \cos(2m-1)\theta + \frac{a_1 e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \cos(2m+1)\theta \right. \\ & \left. - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \cos(2m+3)\theta \right] \quad (m=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (21)$$

これと共軛な流れ函数は

$$\begin{aligned} \psi_{2m} = & e^{-2m\alpha} \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1 + a_1 + a_3} \left[ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \sin(2m-1)\theta + \frac{a_1 e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \sin(2m+1)\theta \right. \\ & \left. - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \sin(2m+3)\theta \right] \quad (m=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (22)$$

この  $\phi_{2m}$ ,  $\psi_{2m}$  は  $\alpha \rightarrow \infty$  で 0 となる。一方無限遠方にて, 進行波を表わすものとして, Ursell [3] と同じく, 原点 0 にある 2次元 Source によるものを考える。即ち  $\psi$  については

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{g\eta}{\pi\omega} [\Psi_c(K, x, y) \cos \omega t + \Psi_s(K, x, y) \sin \omega t] \\ \Psi_0 &= \pi e^{-Kv} \sin Kx \\ \Psi_s &= \int_0^\infty \frac{e^{-ks}}{K^2 + k^2} \{k \sin ky + K \cos ky\} dk - \pi e^{-Kv} \cos Kx \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

或いはパラメターを変えて

$$\Psi_0 = \frac{g\eta}{\pi\omega} [\Psi_c(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) \cos \omega t + \Psi_s(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) \sin \omega t] \quad (24)$$

但  $\eta$  は無限遠方に於ける進行波の振幅

故に基礎条件を満足し, 無限遠方にて進行波を表わす流れ函数として次式を考える。

$$\begin{aligned} (\pi\omega/g\eta)\psi = & \Psi_c(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) \cos \omega t + \Psi_s(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) \sin \omega t \\ & + \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \left[ e^{-2m\alpha} \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1 + a_1 + a_3} \left\{ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \sin(2m-1)\theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{a_1 e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \sin(2m+1)\theta - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \sin(2m+3)\theta \right\} \right] \\ & + \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) \left[ e^{-2m\alpha} \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1 + a_1 + a_3} \left\{ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \sin(2m-1)\theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{a_1 e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \sin(2m+1)\theta - \frac{3a_3}{2m+3} e^{-(2m+3)\alpha} \sin(2m+3)\theta \right\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

この右辺の級数が  $\alpha \geq 0$  で一様収斂であると仮定する。この  $\psi$  は柱状体の境界に於いて, (3) の条件を満足しなければならない。(3) は

$$(-\partial\psi/\partial\theta)_{\alpha=0} = UM(\cos\theta + a_1 \cos\theta - 3a_3 \cos 3\theta) \quad (26)$$

となる。(25), (26) から柱状体の境界  $\alpha=0$  で次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} (\pi\omega/g\eta)\psi_{\alpha=0} &= \Psi_{00}(\xi_0, a_1, a_3, \theta)\cos\omega t + \Psi_{30}(\xi_0, a_1, a_3, \theta)\sin\omega t \\ &+ \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \left[ \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} + \frac{a_1 \sin(2m+1)\theta}{2m+1} - \frac{3a_3 \sin(2m+3)\theta}{2m+3} \right\} \right] \\ &+ \sin\omega t \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) \left[ \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} + \frac{a_1 \sin(2m+1)\theta}{2m+1} - \frac{3a_3 \sin(2m+3)\theta}{2m+3} \right\} \right] \\ &= -(\pi\omega/g\eta)UM(\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin 3\theta) \end{aligned} \quad (27)$$

但し  $\Psi_{00}, \Psi_{30}$  は夫々  $\alpha=0$  の  $\Psi_0, \Psi_3$  の値である。(27) で  $\theta=\pi/2$  とおけば

$$\begin{aligned} &\Psi_{00}(\xi_0, a_1, a_3, \pi/2)\cos\omega t + \Psi_{30}(\xi_0, a_1, a_3, \pi/2)\sin\omega t \\ &+ \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} (-1)^{m-1} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} \\ &+ \sin\omega t \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} (-1)^{m-1} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} = -\left(\frac{\pi\omega}{g\eta}\right)UM(1+a_1+a_3) \end{aligned} \quad (28)$$

之を用いて (27) 式の両辺の  $\cos\omega t$  の係数を比較すれば

$$\begin{aligned} &\Psi_{00}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) - \frac{\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \Psi_{00}\left(\xi_0, a_1, a_3, \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \left[ \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} + \frac{a_1 \sin(2m+1)\theta}{2m+1} - \frac{3a_3 \sin(2m+3)\theta}{2m+3} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_0 (-1)^{m-1}}{(1+a_1+a_3)^2} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} (\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin\theta) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{さらに} \quad f_{2m}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) &= -\left[ \sin 2m\theta + \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} + \frac{a_1 \sin(2m+1)\theta}{2m+1} - \frac{3a_3 \sin(2m+3)\theta}{2m+3} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_0 (-1)^m}{(1+a_1+a_3)^2} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} (\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin 3\theta) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

とおけば (29) は

$$\left. \begin{aligned} &\Psi_{00}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) - \frac{\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \Psi_{00}\left(\xi_0, a_1, a_3, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \cdot f_{2m}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) \\ &\text{同様に } \sin\omega t \text{ の係数を比較して} \\ &\Psi_{30}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) - \frac{\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \Psi_{30}\left(\xi_0, a_1, a_3, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) \cdot f_{2m}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) \end{aligned} \right\} (31)$$

(31) 式は  $p_{2m}(\xi_0), q_{2m}(\xi_0)$  を決定する関係式である。(28) に於いて

$$\left. \begin{aligned} &\Psi_{00}\left(\xi_0, a_1, a_3, \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) (-1)^{m-1} \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} = A_0(\xi_0) \\ &\Psi_{30}\left(\xi_0, a_1, a_3, \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) (-1)^{m-1} \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{1}{2m-1} - \frac{a_1}{2m+1} - \frac{3a_3}{2m+3} \right\} = B_0(\xi_0) \end{aligned} \right\} (32)$$

とおけば (28) は  $-(\pi\omega/g\eta)UM(1+a_1+a_3) = A_0(\xi_0)\cos\omega t + B_0(\xi_0)\sin\omega t$  となる。 $U = -h\omega \sin(\omega t + \epsilon)$ ,  $M = \frac{B}{2} / (1+a_1+a_3)$  を用いれば, heaving 振幅  $h$  に対する進行波の振幅の比  $\bar{A}$  は

$$\bar{A} = \frac{\eta}{h} = \frac{\pi\omega^2}{g} \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}} = \frac{\pi\xi_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}} \quad (33)$$

(29), (30), (31), (32) で  $a_1 = a_3 = 0$  とおけば Ursell [3] の半円に対する関係式となる。

次に (25) に対応する  $\phi$  は

$$\begin{aligned} (\pi\omega/g\eta)\phi &= \Phi_0(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta)\cos\omega t + \Phi_3(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta)\sin\omega t \\ &+ \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \left[ e^{-2m\alpha} \cos 2m\theta + \frac{\xi_0}{1+a_1+a_3} \left\{ \frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{2m-1} \cos(2m-1)\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_1 e^{-(2m+1)\alpha}}{2m+1} \cos(2m+1)\theta - \frac{3a_3 e^{-(2m+3)\alpha}}{2m+3} \cos(2m+3)\theta \right\} \right] \\ &+ \sin\omega t \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(\xi_0) \left[ \begin{array}{cccccc} \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } \Phi_0(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) &= \pi e^{-Kv} \cos Kx \\ \Phi_s(\xi_0, a_1, a_3, \alpha, \theta) &= \pi e^{-Kv} \sin Kx - \int_0^\infty \frac{e^{-km}}{K^2+k^2} \{k \cos ky - K \sin ky\} dk \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

柱状体に働く圧力は、 $p = -\rho \cdot \partial \phi / \partial t$  から求まる。 $\rho$  は流体の密度。柱状体の単位長さに働く  $y$  方向の力  $F$  は

$$F = \left( \frac{g\eta}{\pi} \right) \rho \cdot B [M_0 \cos \omega t - N_0 \sin \omega t] \quad (36)$$

の形になる。但し  $M_0, N_0$  は

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{\pi/2} \Phi_{s0}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) \frac{\cos \theta + a_1 \cos \theta - 3a_3 \cos 3\theta}{1+a_1+a_3} d\theta \\ &+ \frac{1}{1+a_1+a_3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q_{2m} \left( \frac{1+a_1}{4m^2-1} + \frac{9a_3}{4m^2-9} \right) + \frac{\pi \xi_0}{4(1+a_1+a_3)} \{ (1+a_1-a_1a_3)q_2 - a_3q_4 \} \right] \\ N_0 &= \int_0^{\pi/2} \Phi_{c0}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) \frac{\cos \theta + a_1 \cos \theta - 3a_3 \cos 3\theta}{1+a_1+a_3} d\theta \\ &+ \frac{1}{1+a_1+a_3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} p_{2m} \left( \frac{1+a_1}{4m^2-1} + \frac{9a_3}{4m^2-9} \right) + \frac{\pi \xi_0}{4(1+a_1+a_3)} \{ (1+a_1-a_1a_3)p_2 - a_3p_4 \} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

一方運動の加速度は (28), (31) 両式から

$$\frac{d^2 y_h}{dt^2} = \left( \frac{2g\eta}{\pi B} \right) \{ A_0(\xi_0) \sin \omega t - B_0(\xi_0) \cos \omega t \} \quad (38)$$

$F$  の中で加速度と反対位相の成分が附加質量に比例する力として働く。この成分は、

$$\frac{g\eta}{\pi} \cdot \rho B \left( \frac{M_0 B_0 + N_0 A_0}{A_0^2 + B_0^2} \right) \{ A_0(\xi_0) \sin \omega t - B_0(\xi_0) \cos \omega t \} \quad (39)$$

故に附加質量  $A \cdot M$  は (38), (39) の比をとつて

$$A \cdot M = 2\rho \cdot \left( \frac{B}{2} \right)^2 \left( \frac{M_0 B_0 + N_0 A_0}{A_0^2 + B_0^2} \right) \quad (40)$$

さて一方 Lewis 断面の柱状体の、無限流体中での附加質量は Lewis [9] から  $1/2 \cdot \rho \pi C_0 (B/2)^2$

$$\text{但し } C_0 = \frac{(1+a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2} \quad (41)$$

自由表面が存在するため、その影響を表わす係数  $K_4$  を用いて

$$A \cdot M = \frac{1}{2} \rho \pi \left( \frac{B}{2} \right)^2 \cdot C_0 \cdot K_4 \quad (42)$$

とかけば  $K_4$  は次式から求まる。

$$K_4 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{M_0 B_0 + N_0 A_0}{A_0^2 + B_0^2} \cdot \frac{(1+a_1+a_3)^2}{(1+a_1)^2 + 3a_3^2} \quad (43)$$

なお柱状体が one-cycle の間に行う仕事の平均値は  $\rho g^2 \eta^2 / \pi^2 \omega \cdot (M_0 A_0 - N_0 B_0)$  となる。これは両側へ単位時間に出て行く波のエネルギー  $1/2 \rho g^2 \eta^2 / \omega$  に等しくなるから、 $M_0 A_0 - N_0 B_0 = \pi^2 / 2$  となる。これは数値計算の驗算に用いられた。

$p_{2m}, q_{2m}$  を求める関係式は (31) である。

$$\Psi_{c0}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) - \frac{\sin \theta + a_1 \sin \theta - a_3 \sin 3\theta}{1+a_1+a_3} \Psi_{s0}(\xi_0, a_1, a_3, \theta) \equiv H(\theta)$$

とおけば  $H(0) = H(\pi/2) = 0$  である。 $H(\theta)$  は  $0 < \theta < \pi/2$  で次の如き非直交函数列に展開されている。

$$H(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(\xi_0) \cdot f_{2m}(\xi_0, a_1, a_3, \theta)$$

これが  $0 < \theta < \pi/2$  で一様収斂でなければならぬ。 $a_1 = a_3 = 0$  の円柱の場合は Ursell [3], [16], [17] に於て、すべての  $\xi_0$  に対して収斂することが証明されている。一般に  $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0$  の場合の収斂域を決定することは困難である。収斂性を仮定して、 $m=6$ 迄の項をとり実際計算を行うと、一般に  $\xi_0 \approx 3$  でも収斂は非常に早い。即ち、 $\theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ$  に対して、 $H(\theta), f_{2m}(\xi_0, a_1, a_3, \theta)$  の数値計算を行い、更に最小自乗法を適用すれば 1 次の 6 元連立方程式を得る。これより  $p_2, p_4, \dots, p_{12}$  及び  $q_{2m}$  を求める。 $H_0 = 0.2$  の場合は  $\xi_0 < 1$  に対して計算を行つた。