（昭和 34 年 11 月造船協会秋季講演会において講演）

鋼材の熱塑性加工に関する研究（その 2）

――平面梁の曲り変形におよぼす加熱冷却履歴の影響――

正員　栖　原　寿　郎*

Studies on Thermo-Plastic Working (2)
(Dependence of residual bending deformation of flat bar upon the method of heating and cooling)

By Toshiro Suhara, *Member*

The magnitude of residual bending deformation of beam caused by thermoplastic working is much influenced by the method of heating and cooling. As a fundamental research, the author performed theoretical and experimental analysis of stress and strain in beam in four typical cases of temperature changes.

Comparing these results, he get the qualitative explanation of the mechanism of dependence of deformation upon the method of heating and cooling, and show some important rules in the practical applications.

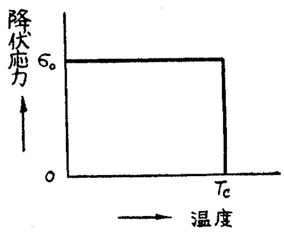
§1 序　　論

一般に塑性変形は，負荷および除荷の履歴に依存するものであり，熱塑性加工においても最高温度分布が全く等しいと云う条件の下で，その温度まで加熱する経過およびそれから常温まで冷却する経過を変えると，残留変形が甚しく異なつた値をとることがある。しかるにこれに関する研究はほとんど行なわれていないため，その原因および機構を把握することができず，実際の加工にあたつて層々困乱を生ずる因となつている。本研究はこれらの問題を解明する基礎的研究として，特に平面梁の面内曲げ加工における加熱-冷却履歴の影響について，理論的並びに実験的研究を行なつたものである。

梁の熱塑性的曲げ加工を取扱う場合一般的特性をもつ材料の温度分布および変形について完全な理論的取扱いを行なうことは議論を甚だ煩雑なものとするため，ここでは先ず変形機構の定性的説明を与えることを目的として次に示す如く物理的および幾何学的諸条件をできるだけ簡単化して解析を行なつた。そして最後に得られた結果にもとづき履歴の効果に関するさらに一般的な考察を行なつた。

1. 機械的および熱的常数に関する仮定

第 1 報**の仮定を本報告でも用いることにし，鋼材の弾性係数，熱膨脹係数等の常数はすべての過程を通じて一定であるとする。また熱膨脹に伴なう材料の塑性的挙動が最も支配的であり，特に加熱部の塑性歪が大体熱膨脹歪の order になるような場合に重点をおいて論ずることにして，弾性および塑性歪以外の歪を無視する。また第1 報同様に材料を完全弾塑性体と見做して，応力―歪関係は Prandtl-Reuss の式を満足するものとする。また第 1 報では降伏応力は温度の上昇とともに減少するものとして取扱つたが，本報告では簡単のため温度が上昇して，ある一定の温度 T_c に達するまでは降伏応力は不変であり，この温度を越えると突然 0 となるものとする（第 1 図)。すなわちある限界温度以上で材料は全く変形抵抗を失うものと仮定する。

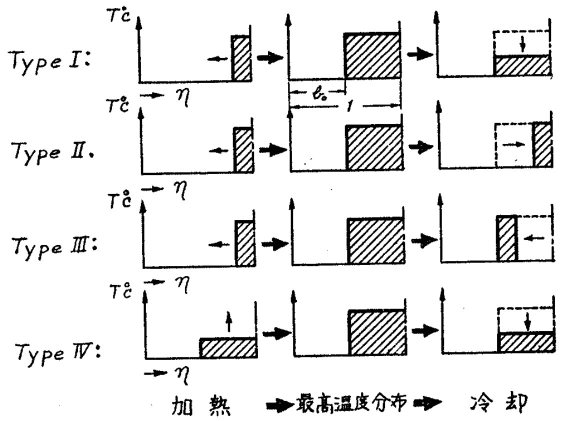


第 1 図

2. 温度分布に関する仮定

梁内に生ずる温度分布は実際の加工に際しては非常に複雑なものであり，これらを一般的に論ずることは困難

原稿受付　昭和 34 年 7 月 10 日
*　九州大学応用力学研究所
**　著者　鋼材の熱塑性加工に関する研究（その 1）造船協会論文集　第 103 号，193 頁



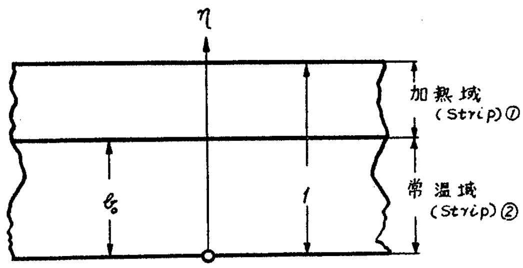
第2図

であるゆえここではその extreme case と考えられる代表的な4種類の温度分布を選び，その各々によつて生ずる変形を比較して，履歴の効果に関する一般的考察を行なうことにする。すなわち温度は梁の長さ方向に沿つては一様に分布しているものとし，各断面内の温度変化については第2図に示す4種類の型を考えることにする。Type I は加熱域が平面梁の一辺から始まり中心部に向つて拡がつてゆく型で，その温度は一定であり限界温度 T_c に等しい。さらに冷却に際しては加熱域の範囲が一定で温度が一様に降下して常温に到るものである。Type II は加熱履歴は前と同様であるが，冷却は梁の内部からその外辺に向つて次第に高温域を縮小してゆく型であり，その間の高温部の温度は一定で T_c に等しい。Type III は同様に加熱した後，梁の外辺から冷却を開始して内部に向つて次第に高温域を縮小する型である。Type IV は加熱および冷却する範囲を常に一定にして温度を一様に上昇させ，最高温度 T_c に至らしめ，ついで一様に降下させる型である。ただし以上の4種類の型の何れにおいても加熱幅は平面梁の深さの半分以下とする。

3.　其他の仮定

1）高温部と常温部（あるいは冷却部）との境界で温度が不連続的に変化するゆえここで応力の不連続がおこる。2）梁の長さはその深さに比べて充分大きく各横断面は変形過程を通じて平面に保たれる。3）梁の変形に対する外部的拘束はない。

§2 基 礎 方 程 式



第3図

座標の原点を梁の下辺にとり，全体を加熱域（最高温度分布時の高温域）と常温域（全過程を通じて常温に保たれる領域）の2つの Strip にわけそれぞれ Strip ①，Strip ②とする。また梁は深さを1とし，Strip ②の深さを b_0 とする。また Strip ①および②の軸応力をそれぞれ σ_1, σ_2；弾性歪を σ_1/E, σ_2/E,（E はヤング率）； 塑性歪を ε_1^p, ε_2^p； 固有歪を ε_1^0, ε_2^0 とする。また材料の線膨張係数を α, 温度を T°C, 一様引張りのときの降伏応力を σ_0, そとき最大弾性歪を ε_0 とする。 また $\bar{\sigma}_1=|\sigma_1|$, $\dot{\bar{\sigma}}_1=(\sigma_1\dot{\sigma}_1)/|\sigma_1|$; $\bar{\sigma}_2=|\sigma_2|$, $\dot{\bar{\sigma}}_2=(\sigma_2\dot{\sigma}_2)/|\sigma_2|$.

前報告と同様に塑性歪の増分 $\dot{\varepsilon}_1^p$, $\dot{\varepsilon}_2^p$ は次のように表わされる。

Strip ①においては

a）$T<T_c$ のとき

$$\dot{\varepsilon}_1^p=(\dot{W}_{p1}/\sigma_0^2)\sigma_1$$

ここで

$$\dot{W}_{p1}=\begin{cases}0,\ \text{ただし},\ \bar{\sigma}_1<\sigma_0\ \text{あるいは}\ \bar{\sigma}_1=\sigma_0\ \text{で且つ}\ \dot{\bar{\sigma}}_1<0\\ \sigma_1\dot{\varepsilon}_1^p,\ \text{ただし}\ \bar{\sigma}_1=\sigma_0\ \text{で且つ}\ \dot{\bar{\sigma}}_1=0\end{cases} \tag{1}$$

b）$T\geq T_c$ のとき

$$\sigma_1=\dot{\sigma}_1=0 \tag{2}$$

Strip ② においては

a）$T<T_c$ のとき

$$\dot{\varepsilon}_2^p=(\dot{W}_{p2}/\sigma_0^2)\sigma_2$$

ここで

$$\dot{W}_{p2}=\begin{cases}0,\ \text{ただし}\ \bar{\sigma}_2<\sigma_0\ \text{あるいは}\ \bar{\sigma}_2=\sigma_0\ \text{で且}\ \dot{\bar{\sigma}}_2<0\\ \sigma_2\dot{\varepsilon}_2^p,\ \text{ただし}\ \bar{\sigma}_2=\sigma_0\ \text{で且つ}\ \dot{\bar{\sigma}}_2=0\end{cases} \tag{3}$$

b） $T \geq T_c$ の時

$$\sigma_2=\dot{\sigma}_2=0 \tag{4}$$

つぎに梁の断面の変位を梁の単位長さにつき $\phi\eta+\psi$ で表わす。

$$\left.\begin{aligned}\phi\eta+\psi&=(\sigma_1/E)+\varepsilon_1{}^p+\alpha T(+\varepsilon_1{}^0),\ (b_0\leq\eta\leq 1)\\ \phi\eta+\psi&=(\sigma_2/E)+\varepsilon_2{}^p(+\varepsilon_2{}^0),\ (0\leq\eta\leq b_0)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

塑性歪の増分は

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1{}^p/(\varepsilon_0\dot{\theta})&=\Phi\eta+\Psi-A,\\ \dot{\varepsilon}_2{}^p/(\varepsilon_0\dot{\theta})&=\Phi\eta+\Psi\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここで $\theta=T/T_c$, $\Phi=\dot{\phi}/(\varepsilon_0\dot{\theta})$, $\Psi=\dot{\psi}/(\varepsilon_0\dot{\theta})$, $A=\alpha T_c/\varepsilon_0$.

力およびモーメントの釣合条件は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{b_0}\sigma_2 d\eta+\int_{b_0}^1\sigma_1 d\eta=0\\ &\int_0^{b_0}\sigma_2\eta d\eta+\int_{b_0}^1\sigma_1\eta d\eta=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

また，これ等の増分の釣合方程式は

$$\left.\begin{aligned}&d\left(\int_0^{b_0}\sigma_2 d\eta\right)+d\left(\int_{b_0}^1\sigma_1 d\eta\right)=0\\ &d\left(\int_0^{b_0}\sigma_2\eta d\eta\right)+d\left(\int_{b_0}^1\sigma_1\eta d\eta\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

§3 4種の基本型加熱－冷却法を用いた場合の平面梁の残留歪

すでに述べたごとく最高加熱温度を T_c とする。仮定（§1，1）によればこの温度において材料の変形抵抗が失われ，高温部の応力は0に等しい。温度をさらに上昇しても加熱部の塑性歪の大きさが変化するのみで system 全体の応力状態および歪に変化はない。同様な理由から最高加熱温度のいかんに拘わらず若しそれが T_c 以上であるならば温度を降下して T_c に到達したときのその部分の塑性歪は，温度上昇に際して T_c に達したときのそれと同じである。したがつて現在の問題で最高加熱温度をすべて T_c として計算を行なつても一般性は失われない。

1. **Type I**

1）加熱

第2図に示すように，この type では加熱部が strip の一辺から出発して次第にその範囲を拡げてゆく。高温部はすべて無応力であり，したがつて system 全体がすべて無応力である。ゆえに加熱部の圧縮固有歪 $\varepsilon_1{}^0$ は

$$\varepsilon_1{}^0=-\alpha T_c\equiv-\varepsilon_0 A$$

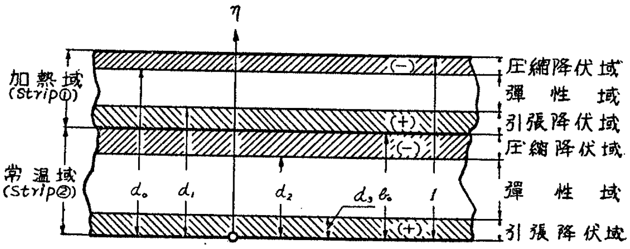
または system の全歪 ε^t は

$$\varepsilon^t=0 \tag{9}$$

である。

2）冷却

冷却の初期条件は，flat bar 全体が無応力で高温部が（9）式で与えられる圧縮固有歪を持つことである。また冷却に際しては，高温部の温度分布が一様のまま降下し，常温に至るものである。



第4図

T_c 以下の降伏応力を σ_0 とすると $\sigma_0=E\varepsilon_0$ である。この関係および（5）を釣合方程式（7）に代入すると

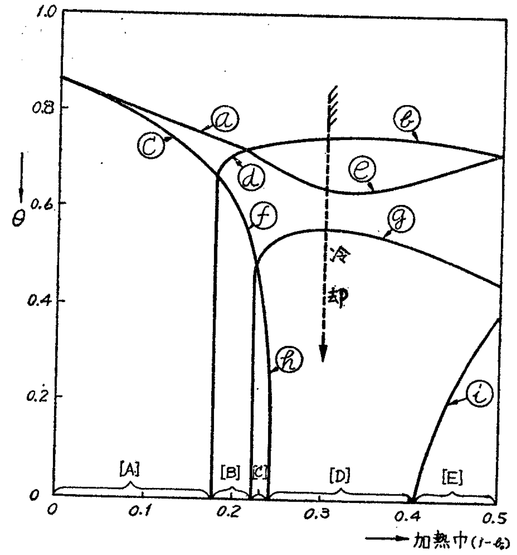
$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{d_3}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_1}^{d_0}(\phi\eta+\psi+\alpha T')d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)d\eta=0\\ &\int_0^{d_3}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_1}^{d_0}(\phi\eta+\psi+\alpha T')\eta d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)\eta d\eta=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

第 a 表

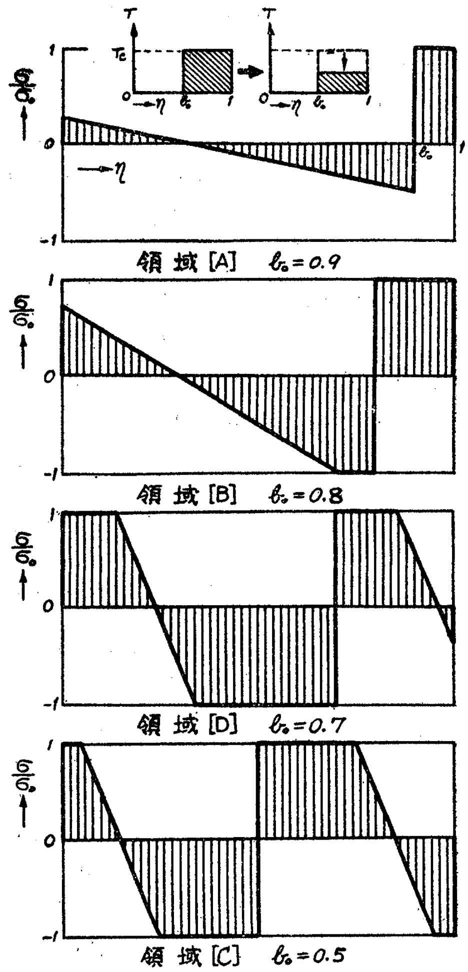
境界線	(10)式	(11)式	境界線方程式および ϕ/ε_0
ⓐ	$d_0=1$ $d_1=b_0$ $d_2=b_0$ $d_3=0$	(b)	$\theta=\dfrac{1}{Ab_0(4-9b_0+6b_0^2)}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-6(1-b_0)}{4-9b_0+6b_0^2}$
ⓑ	$d_0=1$ $d_1=b_0$ $d_2=b_0$ $d_3=0$	(c)	$\theta=\dfrac{1}{A(1-b_0)(1-3b_0+6b_0^2)}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-6b_0}{1-3b_0+6b_0^2}$
ⓒ	$d_0=1$ $d_1=1$ $d_2=b_0$ $d_3=0$	(b)	$\theta=\dfrac{6-9b_0+4b_0^2}{Ab_0^3}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=-\dfrac{6(1-b_0)}{b_0^3}$
ⓓ	$d_0=1$ $d_2=b_0$ $d_3=0$	(b) (c)	$\theta=\dfrac{2}{A}\,\dfrac{y^2-(1-2b_0)y+(1-3b_0+b_0^2)}{y^2-b_0^2}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{y^2-b_0^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{y^2(3+y)-b_0^3}$, $(y=1-d_1)$
ⓔ	$d_0=1$ $d_1=b_0$ $d_3=0$	(b) (c)	$\theta=\dfrac{2}{A}\,\dfrac{1-3b_0^2-2(1-2b_0)d_2-d_2^2}{(1-b_0)^2-d_2^2}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{(1-b_0)^2-d_2^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{(1-b_0)^2(2+b_0)-d_2^3}$
ⓕ	$d_0=1$ $d_1=1$ $d_3=0$	(b) (c)	$\theta=\dfrac{2}{A}\left[1+\dfrac{2(1-2b_0)^2(1+4b_0-6b_0^2)}{9(1-2b_0^2)^2}\right]$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{2(1-2b_0)}{d_2^2}=\dfrac{3(1-2b_0^2)}{d_2^3}$
ⓖ	$d_0=1$ $d_3=0$	(b) (c) (d)	$\theta=\dfrac{2d_1}{Ad_2}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{y^2-d_2^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{y^2(3+y)-d_2^3}=\dfrac{-2}{d_2}$, $(y=1-d_1)$
ⓗ	$d_0=1$ $d_1=1$	(b) (c) (d)	$\theta=\dfrac{3-2b_0+\sqrt{3(4b_0-3)}}{A\sqrt{3(4b_0-3)}}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{d_3^2-d_2^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{d_3^3-d_2^3}=\dfrac{2}{d_3-d_2}$
ⓘ	$d_0=1$	(a) (b) (c) (d)	$\theta=\dfrac{2(1-d_2)}{Ay}$ $\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{y^2-d_2^2+d_3^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{y^2(3+y)-d_2^3+d_3^3}=\dfrac{2}{d_3-d_2}=\dfrac{-2}{y}$ $(y=1-d_1)$

第 b 表 ((10),(11) 式の $T=0$ とする)

状 態	(10) 式	(11)式	ϕ/ε_0
[A]	$d_0=1$ $d_1=1$ $d_2=b_0$ $d_3=0$		$\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-6(1-b_0)}{b_0^3}$
[B]	$d_0=1$ $d_1=1$ $d_2<b_0$ $d_3=0$	(c)	$\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{2(1-2b_0)}{d_2^2}$ $d_2=\dfrac{3(1-2b_0^2)}{2(1-2b_0)}$
[C]	$d_0=1$ $d_1=1$ $d_2>b_0$ $d_3>0$	(c) (d)	$\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{3(1-2b_0^2)}{d_2^3-d_3^3}$ $d_2=\dfrac{1}{2}\{(2b_0-1)+\sqrt{3(4b_0-3)}\}$, $d_3=\dfrac{1}{2}\{(2b_0-1)-\sqrt{3(4b_0-3)}\}$
[D]	$d_0=1$ $d_1>b_0$ $d_2<b_0$ $d_3>0$	(b) (c) (d)	$\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1-2b_0)}{y^2-d_2^2+d_3^2}=\dfrac{-3(1-2b_0^2)}{y^2(3+y)-d_2^3+d_3^3}$ $=\dfrac{-2}{d_2-d_3}=\dfrac{A}{d_1-d_3}$, $(y=-d_1)$
[E]	$d_0<1$ $d_1>b_0$ $d_2<b_0$ $d_3>0$	(a) (b) (c) (d)	$\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}=\dfrac{-2(1+2b_0)}{d_0^2-d_1^2+d_2^2-d_3^2}=\dfrac{-3(1+2b_0^2)}{d_0^3-d_1^3+d_2^3-d_3^3}$ $=\dfrac{-2}{d_0-d_1}=\dfrac{-2}{d_2-d_3}=\dfrac{-A}{d_0-d_2}$



第5図 Type I の塑性状態図

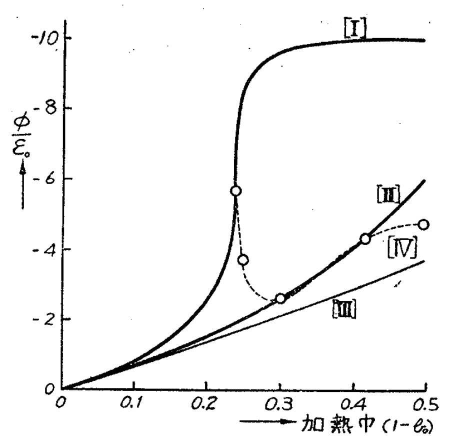


第6図 冷却後の残留応力分布 (Type I)

ただし(9)から $\varepsilon_1{}^0=-\alpha T_c$ なるゆえ，$\alpha T+\varepsilon_1{}^0=-\alpha(T_c-T)\equiv-\alpha T'$ とする。また d_0, d_1, d_2, d_3 および b_0 は第4図に示す通りである。さらに弾塑性境界線上では $\varepsilon_1{}^p=\varepsilon_2{}^p=0$, $\sigma_1/E=\sigma_2/E=\pm\varepsilon_0$ なるゆえ，(5)から

$$\left.\begin{aligned}\phi d_0+\psi&=-\varepsilon_0-\alpha T' &\text{(a)}\\ \phi d_1+\psi&=\varepsilon_0-\alpha T' &\text{(b)}\\ \phi d_2+\psi&=-\varepsilon_0 &\text{(c)}\\ \phi d_3+\psi&=\varepsilon_0 &\text{(d)}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

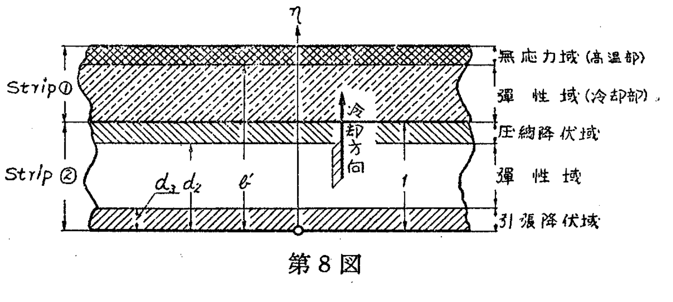
(10),(11)を用い，冷却過程を追つて計算を進めてゆけばよい。先ず第1報と同様に塑性状態図を求めると第5図のようになる。横軸が加熱幅で縦軸が冷却中の温度である。今加熱幅を一定としたまま温度を降下せしめると，図のⓐ～ⓘ線で囲まれたいくつかの領域を通過して常温に至る。各々の領域はそれぞれ相異なる塑性状態に相当し，特に冷却後の塑性状態は第b表および第6図に示す通りである。またⓐ～ⓘの境界線は第 a 表に示す条件を用いて計算された。第5図からわかるように，温度が単調に降下する場合に降伏域の除荷は行なわれない。また冷却後の残留曲率を第7図中の (I) 線で示す。ただし $A=7$ とする。



第7図 冷却後の残留曲率 $1/r=(\phi/\varepsilon_0)\cdot(\varepsilon_0/h)$
r=曲率半径 h=flat bar の深さ

2. Type II

第2図に示すごとく加熱方法は Type I と同じで，最高加熱時の高温部の圧縮固有歪 $\varepsilon_1{}^p$ および system の全歪 ε^t は(9)式で与えられる。また冷却の初期条件も Type I と同じである。冷却法は高温域を flat bar の中心から外辺に向かつて次第に縮小してゆき，遂に全域を冷却すると云う方法で，且つその過程において高温部は絶えず一定温度 T_c に保たれるものである。高温域が縮小するに伴ないその跡の冷却部に固有歪を残留してゆくのであるが，高温部，冷却部の境



第8図

界に生ずる残留歪の大きさはその瞬間の bar 全体の歪から決定されるゆえ，残留歪を与える方程式は非線型となる。計算の便宜上 strip ②（終始常温に保たれる部分）の幅を1とし，冷却が進行した位置すなわち高温部と冷却部の境界線の座標を b' とする。（第8図）

現在取扱う範囲では，計算結果から明かになることであるが，先ず strip ② の $\eta=1$ の線上から圧縮降伏域が発生し，さらに冷却が進行すると，strip ② の外辺すなわち $\eta=0$ から引張り降伏域が発生する。第8図に示すごとく，これ等の境界線の座標をそれぞれ d_2, d_3 とする。そこで降伏域の発生，拡大によつて全過程を次の3つの段階に分けて計算を行なう。

1）；　第1段階‥‥strip ② が全く弾性的である場合　($d_2=1$，$d_3=0$)，

2）；　第2段階‥‥strip ② に圧縮降伏域を生じた場合　($d_2<1$，$d_3=0$)，

3）；　第3段階‥‥strip ② に圧縮と引張り降伏域を生じた場合　($d_2<1$，$d_3>0$)

1）第1段階　($d_2=1$，$d_3=0$)

基礎方程式は（7）を書き直して（5）を代入すると

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}d\eta=0\\&\int_0^1(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta=0\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

また高温部と冷却部の境界線上における冷却部側の残留歪 $\varepsilon_1{}^0(b')$ は

$$\varepsilon_1{}^0(b')=\phi b'+\psi-\varepsilon_0\qquad(13)$$

(12) を b' で微分して (13) を代入すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{b'^2}{2}\frac{d\phi}{db'}+b'\frac{d\psi}{db'}+\varepsilon_0=0\\&\frac{b'^2}{3}\frac{d\phi}{db'}+\frac{b'}{2}\frac{d\psi}{db'}+\varepsilon_0=0\end{aligned}\right\}$$

これより

$$\frac{d\phi}{db'}=-\frac{6\varepsilon_0}{b'^2},\quad\frac{d\psi}{db'}=\frac{2\varepsilon_0}{b'}$$

初期条件として $b'=1$ なるとき $\phi=\psi=0$ であるから，上式の解は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\phi}{\varepsilon_0}=-6\left(1-\frac{1}{b'}\right),\quad\frac{\psi}{\varepsilon_0}=2\log b'\\&(13)\text{ から，}\ \varepsilon_1{}^0(b')/\varepsilon_0=2\log b'-6b'+5,\\&\text{ゆえに}\quad\frac{\varepsilon_1{}^0(\eta)}{\varepsilon_0}=2\log\eta-6\eta+5,\ (1<\eta<b')\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

第1段階の最終は $\eta=1$ で strip ② が圧縮降伏値に達した瞬間である。

すなわち，$[\sigma_2/E]_{\eta=1}=-\varepsilon_0$ であり，これと（5）式から $\phi/\varepsilon_0+\psi/\varepsilon_0=-1$。これに (14) 式を代入して b' を求めると $b'\fallingdotseq1.37532$‥‥となる。したがつて (14) から第1段階の最終すなわち第2段階の初期条件は

$$\left.\begin{aligned}&b'\fallingdotseq1.375\equiv b_0'\\&\frac{\phi}{\varepsilon_0}=-6\left(1-\frac{1}{b_0'}\right)\fallingdotseq-1.637\\&\frac{\psi}{\varepsilon_0}=2\log b_0'\fallingdotseq0.637\\&\frac{\varepsilon_1{}^0(b_0')}{\varepsilon_0}=2\log b_0'-6b_0'+5\fallingdotseq-2.615\\&d_2=1\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

(14) 式で与えられる $\phi(b')/\varepsilon_0$，$\psi(b')/\varepsilon_0$ および $\varepsilon_1{}^0(b')/\varepsilon_0$ を第9図に示す。

2）第2段階 ($d_2<1$，$d_3=0$)

基礎方程式は

$$\int_0^{d_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{d_2}^1(-\varepsilon_0)d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}d\eta=0\qquad(16)$$

$$\int_0^{d_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{d_2}^{1}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta=0$$

高温部と冷却部境界線上では

$$\varepsilon_1{}^0(b')=\phi b'+\psi-\varepsilon_0$$

弾塑性境界線上では

$$\phi d_2+\psi=-\varepsilon_0 \tag{17}$$

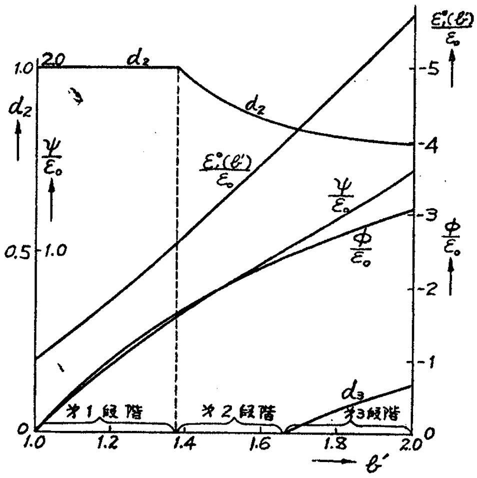
前と同様に (16) を b' で微分し，(17) を用いると

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}\right)}{db'}&=\frac{-6\{d_2{}^2-2b'd_2-(1-b')^2\}}{3(d_2{}^2+b'^2-1)^2-4(d_2{}^3+b'^3-1)(d_2+b'-1)}\\ \frac{d\left(\dfrac{\psi}{\varepsilon_0}\right)}{db'}&=\frac{2\{2d_2{}^3-3b'd_2{}^2-(1-b')^2(2+b')\}}{3(d_2{}^2+b'^2-1)^2-4(d_2{}^3+b'^3-1)(d_2+b'-1)}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

つぎに (17) の第2式を b' で微分すると

$$\frac{dd_2}{db'}=\frac{d_2\dfrac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db'}+\dfrac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db'}}{\phi/\varepsilon_0} \tag{19}$$

(18) および (19) から成る連立常微分方程式を，ここでは Runge-Kutta* 法を用い，$\varDelta b'=0.1$ として数値的に解いた。またこの結果を (17) の第1式に代入して $\varepsilon_1^0(b')$ を求めた。ただし現在の場合の初期条件は (15) で与えられる。計算結果は第9図に示す。第2段階の最終すなわち strip ② の外辺が引張り降伏点に達した瞬間における各変数の値を数値的に求めると



第9図

$$\left.\begin{aligned}&b'\fallingdotseq 1.653\\ &\frac{\phi}{\varepsilon_0}\fallingdotseq -2.490\\ &\frac{\psi}{\varepsilon_0}\fallingdotseq 1.000\\ &\frac{\varepsilon_1{}^0(b')}{\varepsilon_0}\fallingdotseq -3.945\\ &d_2\fallingdotseq 0.8425\\ &d_3=0\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

これが第3段階の初期条件である。

3）第3段階 ($d_2<1$, $d_3>0$)

基礎方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{d_3}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{d_2}^{1}(-\varepsilon_0)d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}d\eta=0\\ &\int_0^{d_3}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{d_2}^{1}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_1^{b'}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta=0\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

前と同様に

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1{}^0(b')=\phi b'+\psi-\varepsilon_0\\ &\phi d_2+\psi=-\varepsilon_0\\ &\phi d_3+\psi=\varepsilon_0\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(21) と (22) から

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db'}&=\frac{-6\{d_2{}^2-d_3{}^2-2b'(d_2-d_3)-(1-b')^2\}}{3(d_2{}^2-d_3{}^2+b'^2-1)^2-4(d_2{}^3-d_3{}^3+b'^3-1)(d_2-d_3+b'-1)}\\ \frac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db'}&=\frac{2\{2(d_2{}^3-d_3{}^3)-3b'(d_2{}^2-d_3{}^2)-(1-b')^2(2+b')\}}{3(d_2{}^2-d_3{}^2+b'^2-1)^2-4(d_2{}^3-d_3{}^3+b'^3-1)(d_2-d_3+b'-1)}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

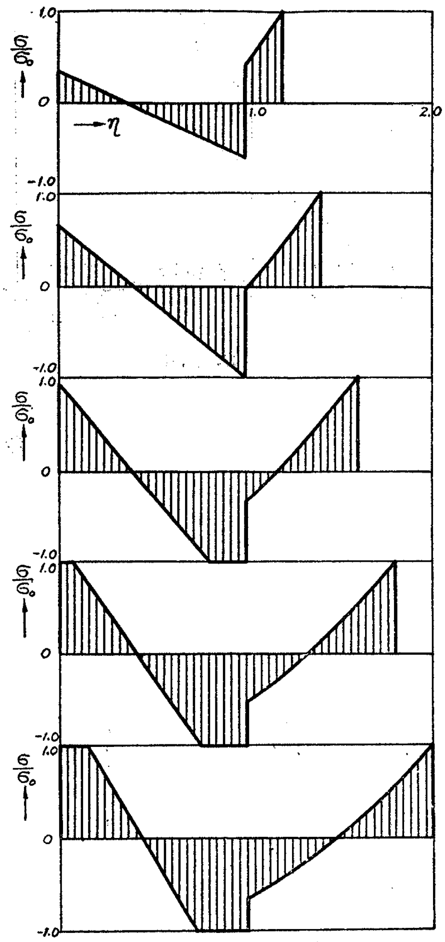
* 日高孝次：数値積分法上巻 82 頁

また (22) より

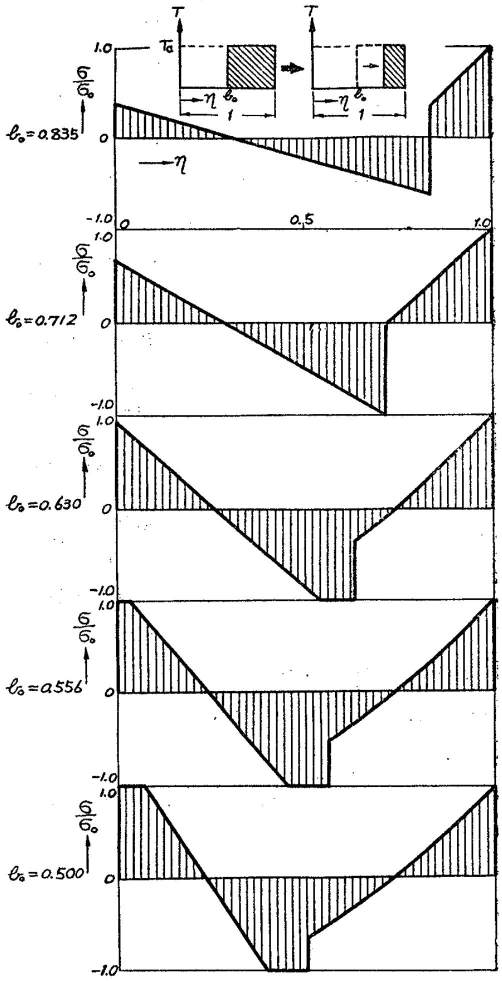
$$\left.\begin{aligned}\frac{dd_1}{db'}&=-\frac{d_2\dfrac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db'}-\dfrac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db'}}{\phi/\varepsilon_0}\\\frac{dd_0}{db'}&=-\frac{d_3\dfrac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db'}+\dfrac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db'}}{\phi/\varepsilon_0}\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

(23), (24) を前と同様に Runge-Kutta 法で数値積分した結果を第9図に示す。

以上の計算によつて $1<b'<2$ の範囲の解が求められたのであるが，これ等を用い，冷却が進行するにつれて bar 内の応力分布が変化する状態を図示すると，第 10 図のごとくなる。この計算に必要な冷却域内の固有歪 $\varepsilon_1^0(\eta)$ は，過去において冷却が η 点まで進んだ瞬間の残留歪である。また冷却が b' まで進んだときの応力および歪は全幅が b' に等しい bar の冷却完了後の応力および歪と同じであるから，b' を Type I の場合と同じ座標に換算し，種々な加熱幅（最高温度分布時の）について冷却後の残留応力分布を計算した結果が第 11 図である。また，それぞれの場合の残留曲率は第7図の（II）線で示す。図から明かなように，Type I に比べて Type II の場合は残留曲率が約半分である。



第 10 図 冷却進行による応力変化（Type II）

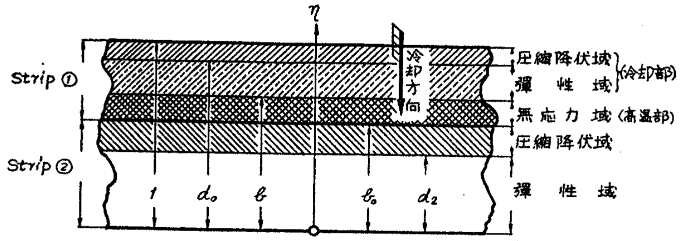


第 11 図 冷却後の残留応力分布（Type II）

3. Type III

第5図に示すごとく，この場合も加熱方法は Type I, II と同じで，したがつて冷却の初期条件も同じである。冷却は高温域を bar の外辺から中心に向つて次第に縮小し，遂に全域を冷却するという方法で， Type II と冷却方向が逆である。

数値計算結果から判ることであるが，現在取扱う問題では 1）; strip ①，②の何れにも降伏域が存在しない



第 12 図

場合，2）；strip ①の外辺から発生した圧縮降伏域が存在する場合，3）；strip ②の高温部境界線から発生した圧縮降伏域が存在する場合，4）；2），3）の両方の降伏域が存在する場合の4つの状態に分けることができる。またそれ等降伏域の境界線の座標を第 12 図に示す。

一般基礎方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{d_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)d\eta+\int_b^{d_0}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)d\eta=0\\&\int_0^{d_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_b^{d_0}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)\eta d\eta=0\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

また2つの弾塑性境界線上および高温部と冷却部の境界線上で満足すべき式は前と同様にして

$$\left.\begin{aligned}&\phi d_0+\psi=-\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(d_0) &&(\mathrm{a})\\&\phi d_2+\psi=-\varepsilon_0 &&(\mathrm{b})\\&\phi b+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(b) &&(\mathrm{c})\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

また (25) と (26) から

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db}&=\frac{6\{d_2{}^2+d_0{}^2-2b(d_2+d_0)+b^2\}}{3(d_2{}^2+d_0{}^2-b^2)^2-4(d_2{}^3+d_0{}^3-b^3)(d_2+d_0-b)}\\\frac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db}&=\frac{-2\{2(d_2{}^3+d_0{}^3)-3b(d_2{}^2+d_0{}^2)+b^3\}}{3(d_2{}^2+d_0{}^2-b^2)^2-4(d_2{}^3+d_0{}^3-b^3)(d_2+d_0-b)}\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dd_0}{db}&=-\frac{d_0\dfrac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db}+\dfrac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db}}{\dfrac{\phi}{\varepsilon_0}-\dfrac{d\varepsilon_1{}^0(d_0)/dd_0}{\varepsilon_0}} &&(\mathrm{a})\\\frac{dd_2}{db}&=-\frac{d_0\dfrac{d(\phi/\varepsilon_0)}{db}+\dfrac{d(\psi/\varepsilon_0)}{db}}{\phi/\varepsilon_0} &&(\mathrm{b})\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

以上の式を用い，冷却の進行過程を追つて数値計算を行なつた。計算は前同様 Runge-Kutta 法により，与えられた b_0 に対して b が1から出発して減少する方向に積分を行なつたものでここでは積分間隔を 0.1 とした。最初は状態1）(strip ①，②のいずれにも降伏域が存在しない）であるが，b_0 の値いかんによつては，冷却に伴い状態2）あるいは3），そして最後に4）の状態になる。これ等の各状態を求める基礎方程式は(25)，(26)，(27)および (28) 式に第 c 表の条件を附加したものである。

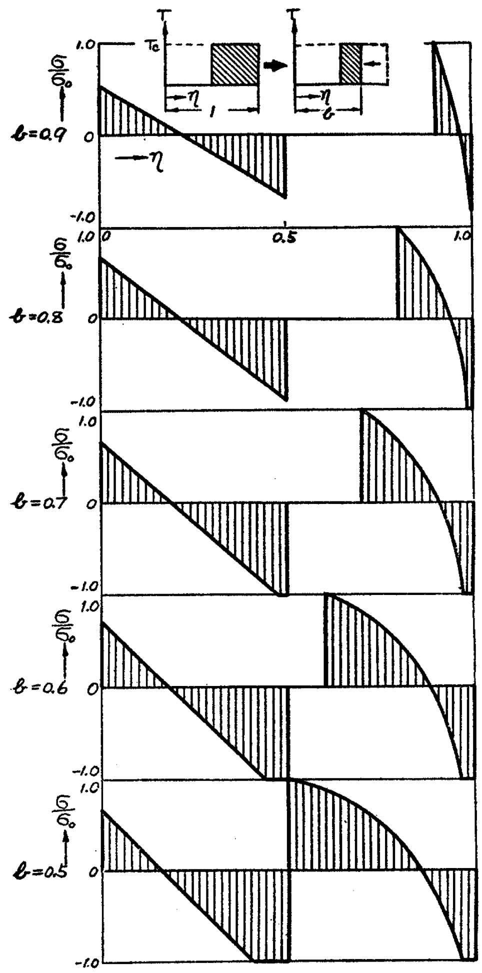
第 c 表

状態	(25)，(27) 式	(26) 式	(28) 式
1）	$d_0=1$,　$d_2=b_0$	(c) のみ	不要
2）	$d_0<1$,　$d_2=b_0$	(a)，(c)	(a)
3）	$d_0=1$,　$d_2<b_0$	(b)，(c)	(b)
4）	$d_0<1$,　$d_2<b_0$	(a)，(b)，(c)	(a)，(b)

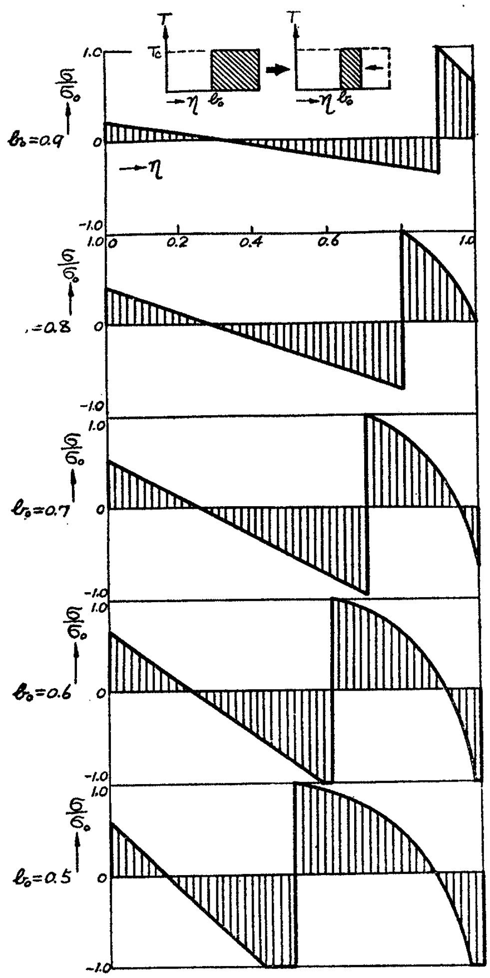
なお上式中の状態2）および4）であらわれる $\varepsilon_1{}^0(d_0)$ および $d\varepsilon_1{}^0(d_0)/dd_0$ は，過去において冷却が d_0 まで進行した瞬間に，その点 d_0 に生じた固有歪およびその微係数である。$b_0=0.5$ の場合冷却が進行するにつれて，flat bar 内の応力分布が変化してゆく状態を第 13 図に，また種々な加熱幅に対する冷却後の残留応力分布を第 14 図に示す。最後に残留曲率は第7図の（III）線で与えられる。第7図から明かなように，残留曲率は Type I に比べて非常に小さく，Type II よりわずかに小さい。

4. Type IV

1）加熱　第2図に示すように，この type では加熱幅を一定にして加熱部の温度を一様に T_C まで上昇させ



第 13 図　冷却進行による応力変化（Type III）



第 14 図　冷却後の残留応力分布（Type III）

る方法である。温度が T_C に達する直前の strip ①，③の塑性領域の数および幅は，Type I の冷却後のそれ等と相等しくて，応力は符号が逆である。また曲率も Type I の残留曲率と逆符号で絶対値は等しい。したがつて基礎方程式は (10)，(11) 式の両辺の符号を逆にし，$-\phi$，$-\psi$ をあらためて ϕ, ψ と書き直し，また T' の符号を逆にしたものを加熱温度にとればよい。第 b 表においても同様である。

つぎに T_C を越えた瞬間に加熱部の変形抵抗は失われ，常温部（strip ②）は除荷の状態になり，加熱中に生じた塑性歪のための残留応力を生ずる。この状態における flat bar の変形を $\phi_0\eta+\psi_0$ であらわすと，strip ① の塑性歪は $\phi_0\eta+\psi_0-\alpha T_C$ となり，strip ② における力の釣合から

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\delta_3}\{\phi_0\eta+\psi_0-\varepsilon_{23}{}^0(\eta)\}d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi_0\eta+\psi_0)d\eta+\int_{\delta_2}^{b_0}\{\phi_0\eta+\psi_0-\varepsilon_{22}{}^0(\eta)\}d\eta=0\\&\int_0^{\delta_3}\{\phi_0\eta+\psi_0-\varepsilon_{23}{}^0(\eta)\}\eta d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi_0\eta+\psi_0)\eta d\eta+\int_{\delta_2}^{b_0}\{\phi_0\eta+\psi_0-\varepsilon_{22}{}^0(\eta)\}\eta d\eta=0\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

ただし $\varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{23}^0$ は加熱によつて strip ② に生じた固有歪で

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{22}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h-\varepsilon_0\quad(b_0<\eta<\delta_2)\\&\varepsilon_{23}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h+\varepsilon_0\quad(0<\eta<\delta_3)\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

また δ_2，δ_3 は加熱によつて生じた引張りおよび圧縮塑性境界をあらわし，それぞれ Type I における冷却後の d_2, d_3 の値と等しい。（第 4 図）また $\phi_h\eta+\psi_h$ は加熱により温度が T_C に到達する直前の flat bar の変形を表わし，これはまた Type I の冷却後の $\phi\eta+\psi$ と符号反対で絶対値は等しい。

Type I の場合と同様に，塑性状態を [A]，[B]，[C]，[D]，[E] に分けて，それぞれについて ϕ_0, ψ_0 を求めると

[A] $\delta_2=b_0,\ \delta_3=0\ ;\quad \phi_0=\psi_0=0$

[B] $\delta_2<b_0,\ \delta_3=0\ ;$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}-\frac{6(1-b_0)}{{b_0}^3}\\ \frac{\psi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}+\frac{(3-b_0)(1-b_0)}{{b_0}^2}\end{aligned}\right\}\quad \text{(a)}$$

[C] $\delta_2<b_0,\ \delta_3>0\ ;$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}-\frac{6(1-b_0)}{{b_0}^3}\\ \frac{\psi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}+\frac{(3-b_0)(1-b_0)}{{b_0}^2}\end{aligned}\right\}\quad \text{(b)}$$

[D] $\delta_2<b_0,\ \delta_3>0\ ;$ (31)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}-\frac{1}{{b_0}^3}\left\{6(1-b_0)-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}(1-\delta_1)^2(4+2\delta_1-3b_0)\right\}\\ \frac{\psi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}+\frac{1}{{b_0}^2}\left\{(3-b_0)(1-b_0)-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}(1-\delta_1)^2(2+\delta_1-2b_0)\right\}\end{aligned}\right\}\quad \text{(c)}$$

[E] $\delta_2<b_0,\ \delta_3>0\ ;$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}-\frac{1}{{b_0}^3}\left[6(1-b_0)-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}\{(1-\delta_1)^2(4+2\delta_1-3b_0)-(1-\delta_0)^2(4+2\delta_0-3b_0)\}\right]\\ \frac{\psi_0}{\varepsilon_0}&=\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}+\frac{1}{{b_0}^2}\left[(3-b_0)(1-b_0)-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0}\{(1-\delta_1)^2(2+\delta_1-2b_0)-(1-\delta_0)^2(2+\delta_0-2b_0)\}\right]\end{aligned}\right\}\quad \text{(d)}$$

ただし δ_0, δ_1 は加熱に際し，温度 T_C に到達する直前における strip ①の塑性域境界の位置をあらわし，それぞれ Type I における冷却後の d_0, d_1 の値に等しい。

2）冷却　冷却の初期条件は前に述べたように，温度 T_C を越えた瞬間の塑性状態であるから，そのときの変形は(31)で与えられ，また strip ①の圧縮塑性歪は $\phi_0\eta+\psi_0-\alpha T_C$ である。冷却が開始された後の状態は Type I の場合と同様に計算されるが，現在の場合には strip ②が固有歪を持つている点が異なる。[A], [B], [C] の範囲では加熱に際して strip ①が全域にわたつて圧縮降伏状態になつた。若し冷却後に同じく strip ①が全域にわたつて引張り降伏状態になるとすると，この時の flat bar 全体の応力および曲率は，加熱における温度 T_C 直前の応力および曲率の大きさと等しく，その符号が反対である。これはすなわち type I の冷却後の応力および曲率に等しい。strip ①が全面的に引張り降伏状態になるための strip ① の深さの範囲を求める方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{d_3}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)d\eta+\int_{b_0}^{1}\varepsilon_0 d\eta=0\\ &\int_0^{d_3}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_3}^{d_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_{b_0}^{1}\varepsilon_0\eta d\eta=0\end{aligned}\right\}\quad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}&\phi+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(1)+\alpha T,\quad \varepsilon_1{}^0(1)=\phi_0+\psi_0-\alpha T_C\\ &\phi d_2+\psi=-\varepsilon_0\\ &\phi d_3+\psi=\varepsilon_0\end{aligned}\right\}\quad (33)$$

となり，Type I のⓗ線（第 a 表参照）と比べると（33）の第１式だけが異なる。以上の式から $T=0$ の場合の，すなわち冷却後の b_0 を求めると $b_0=0.76048\cdots\cdots$ となる。すなわち strip ② の幅 b_0 がこれより大きい場合には，冷却後の残留応力および残留曲率は Type I の場合と全く同じである。また第５図から［C］の領域は $0.7552\cdots<b_0<0.7753\cdots$ であるゆえ，現在の b_0 は［C］内にあるが［D］に極めて近い。

つぎに strip ①が部分的に降伏する場合について考える。この場合に関する計算も同様な方法で行えばよいのであるが，数値計算が甚だ複雑となる。したがつてここでは $b_0=0.75$, 0.70, 0.58, 0.50 の４つの場合についてのみ行なつた。

$b_0=0.75$ および $b_0=0.70$ ：最高加熱温度ではいずれも[D]領域に属する。したがつて初期条件として strip①の固有歪は（31）（c）式から求められ，また strip ② の固有歪は（30）から計算される。数値計算の結果から明かになることであるが，この場合の冷却後の塑性域の位置は d_1, d_2 および d_3 であらわすことが出来，$d_0=1$

である。すなわち strip ①の外辺は圧縮降伏することがない。したがつて計算の基礎方程式は

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{d_3}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_3}^{\delta_3}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{23}{}^0(\eta)\}d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi\eta+\psi)\,d\eta+\int_{\delta_2}^{d_2}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{22}{}^0(\eta)\}d\eta\\ \displaystyle\quad+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\,d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_1}^{1}\{\phi\eta+\psi-\alpha T-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}d\eta=0\\ \displaystyle\int_0^{d_3}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_3}^{\delta_3}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{23}{}^0(\eta)\}\,\eta d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi\eta+\psi)\,\eta d\eta+\int_{\delta_2}^{d_2}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{22}^0(\eta)\}\eta d\eta\\ \displaystyle\quad+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0\,\eta d\eta+\int_{d_1}^{1}\{\phi\eta+\psi-\alpha T-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta=0\end{array}\right\}\quad(34)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\phi d_1+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(d_1), & \varepsilon_1{}^0(\eta)=\phi_0\eta+\psi_0-\alpha T_C\\ \phi d_2+\psi=-\varepsilon_0+\varepsilon_{22}^0(d_2), & \varepsilon_{22}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h-\varepsilon_0\\ \phi d_3+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_{23}^0(d_3), & \varepsilon_{23}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h+\varepsilon_0\end{array}\right\}\quad(35)$$

$\varepsilon_1{}^0(\eta)$ は strip ①の固有歪，また $\varepsilon_{22}^0(\eta)$，$\varepsilon_{23}^0(\eta)$ は strip ②の固有歪で，加熱に際しそれぞれ $b_0>\eta>\delta_2$, $\delta_3>\eta>0$ の降伏により生じたものである。また ϕ_0, ψ_0 は (31) (c) で与えられ，ϕ_h, ψ_h は Type I の場合と絶対値等しく符号反対である。以上の式から未知数 d_1, d_2, d_3 および $\phi/\varepsilon_0, \psi/\varepsilon_0$ を決定する式を求めると

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\phi-\phi_h}{\varepsilon_0}=\frac{-4(1-2\,b_0)+(\phi_h/\varepsilon_0)(1-\delta_1)^2+f_1(1-d_1)^2}{d_3{}^2-d_2{}^2+(1-d_1)^2}\\ \displaystyle\qquad=\frac{-6(1-2\,b_0{}^2)+(\phi_h/\varepsilon_0)(2+\delta_1)(1-\delta_1)^2+f_1(2+d_1)(1-d_1)^2}{d_3{}^3-d_2{}^3+(2+d_1)(1-d_1)^2}\\ \displaystyle\qquad=\frac{A-3-f_2-f_1d_1}{d_2-d_1}\\ \displaystyle\qquad=\frac{4}{d_3-d_2},\quad\left(A=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}T_C\right)\\ \displaystyle\frac{\psi-\psi_h}{\varepsilon_0}=-2-\frac{\phi-\phi_h}{\varepsilon_0}d_2\end{array}\right\}\quad(36)$$

ただし (31) (c) から

$$f_1=\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0},\quad f_2=\frac{\psi_0}{\varepsilon_0}-\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}$$

とする。(36) を数値計算することにより ϕ/ε_0 を求めた結果を第7図 (IV) 線の○印で示す。

$b_0=0.58$ および 0.50 : 最高加熱温度ではいずれも [E] 領域に属する。したがつて初期条件は (31) (d) および (30) で与えられる。この場合は d_0, d_1, d_2, d_3 のすべての塑性域を生じる。基礎方程式は

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{d_3}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_3}^{\delta_3}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{23}^0(\eta)\}d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi\eta+\psi)d\eta+\int_{\delta_2}^{d_2}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{22}^0(\eta)\}d\eta\\ \displaystyle\quad+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\,d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0 d\eta+\int_{d_1}^{d_0}\{\phi\eta+\psi-\alpha T-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\,d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)d\eta=0\\ \displaystyle\int_0^{d_3}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_3}^{\delta_3}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{23}^0(\eta)\}\,\eta d\eta+\int_{\delta_3}^{\delta_2}(\phi\eta+\psi)\eta d\eta+\int_{\delta_2}^{d_2}\{\phi\eta+\psi-\varepsilon_{22}^0(\eta)\}\eta d\eta\\ \displaystyle\quad+\int_{d_2}^{b_0}(-\varepsilon_0)\eta d\eta+\int_{b_0}^{d_1}\varepsilon_0\eta d\eta+\int_{d_1}^{d_0}\{\phi\eta+\psi-\alpha T-\varepsilon_1{}^0(\eta)\}\eta d\eta+\int_{d_0}^{1}(-\varepsilon_0)\,\eta d\eta=0\end{array}\right\}\quad(37)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\phi d_0+\psi=-\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(d_0), & \varepsilon_1{}^0(\eta)=\phi\eta+\psi_0-\alpha T_C\\ \phi d_1+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_1{}^0(d_1), & \\ \phi d_2+\psi=-\varepsilon_0+\varepsilon_{22}^0(d_2), & \varepsilon_{22}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h-\varepsilon_0\\ \phi d_3+\psi=\varepsilon_0+\varepsilon_{23}^0(d_3), & \varepsilon_{23}^0(\eta)=\phi_h\eta+\psi_h+\varepsilon_0\end{array}\right\}\quad(38)$$

ϕ_0, ψ_0 は (31) (d) で与えられる。以上の式から未知数 d_0, d_1, d_2, d_3, ϕ/ε_0, ψ/ε_0 を決定する式を求めると

$$\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\phi-\phi_h}{\varepsilon_0}=\frac{-4(1+2\,b_0)+(\phi_h/\varepsilon_0)(\delta_0{}^2-\delta_1{}^2)+F_1(d_0{}^2-d_1{}^2)}{d_2{}^2-d_3{}^2+d_0{}^2-d_1{}^2}\\ \displaystyle\qquad=\frac{-6(1+2\,b_0{}^2)+(\phi_h/\varepsilon_0)(\delta_0{}^3-\delta_1^3)+F_1(d_0{}^3-d_1{}^3)}{d_2{}^3-d_3{}^3+d_0{}^3-d_1{}^3}\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} &=\frac{3-A+F_1d_1+F_2}{d_1-d_2}\\ &=\frac{-2+F_1(d_0-d_1)}{d_0-d_1}\\ &=\frac{4}{d_3-d_2}\\ \frac{\psi-\psi_h}{\varepsilon_0}&=-2-\frac{\phi-\phi_h}{\varepsilon_0}d_2 \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

ただし (31) (d) において

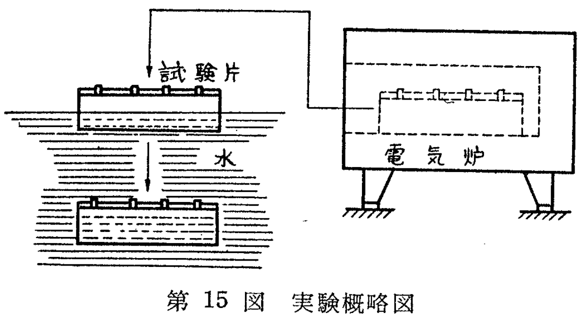
$$F_1=\frac{\phi_0}{\varepsilon_0}-\frac{\phi_h}{\varepsilon_0},\quad F_2=\frac{\psi_0}{\varepsilon_0}-\frac{\psi_h}{\varepsilon_0}$$

とする。(39) を数値的に解くことによつて ϕ/ε_0 を求めた結果を，第7図 (IV) 線の○印で示す。図から明かなように，残留曲率は b_0 が 0.75 の近傍をを除いて Type II の値と同じ程度の大きさで，Type I に比べて半分以下である。

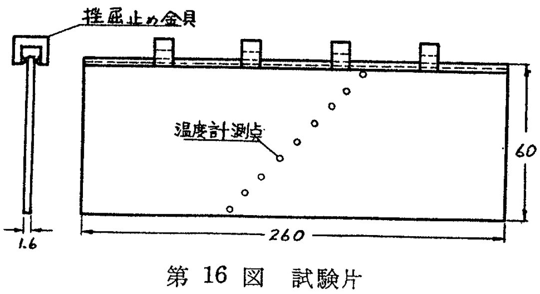
§ 4. 実験並びに考察

前節までに述べた加熱—冷却履歴の影響に関する理論計算は，温度分布を理想化した形に仮定して行なわれたものであり，これをそのまま実験的に再現することは色々の困難を伴う。特に小型試験片を用い少ない熱量の熱源により実験を行なう場合には，厳密な結果を期待することはできない。したがつて本節の実験は，理論計算により求められた各 type の加熱—冷却履歴により生じた残留曲率の相違を，定性的に裏付けすることに重点を置いて行なわれた。

実験 I: Type II (第2図) の加熱—冷却による残留曲率を実験的に求める目的を以て行なわれた。図から明かなように，Type I, II, III は冷却履歴はそれぞれ異なるが加熱履歴は共通で，温度 T_C の高温域が strip の上辺から次第に拡大し最高温度分布に到達するものであり，これを初期条件として冷却が開始される。このときの strip ①，②は既に述べたごとく無応力状態で，且つ strip ①の圧縮塑性歪は $\varepsilon_1{}^0=-\varepsilon_0A$ で与えられる。実験的に以上の温度変化を生ずるような加熱を行なうためには，特に高温で大きな熱量をもつ熱源が必要となり困難を伴なう。しかし乍ら以上の加熱法によらず別な方法を用いても，若し冷却の初期条件を同じにすることができれば現在の目的は達せられる。ここで行なつた方法は次の通りである。



第 15 図　実験概略図



第 16 図　試験片

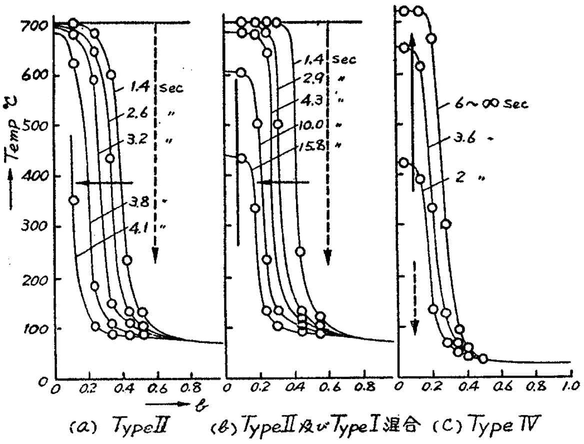
先ず試験片全体を炉中で約730°C まで一様に加熱し，次に strip の長軸を水平にし面を鉛直にした状態で急速に strip ②の深さまで水中に投入する。strip ①は依然として高温に保たれているから，この部分の降伏応力は非常に小さく容易に圧縮塑性変形を生ずる。また strip ②の収縮は充分行なわれ且つこの部分の応力も小さい。したがつてこの状態は大略前の初期条件を満足している。唯 strip ①の降伏応力が零でないための誤差はあるがその大きさは実験の定性的結果に影響をおよぼすものではなく，特に高温域の幅が全幅の4割以下の場合は無視することができる。以上の状態が Type I, II, III に共通な冷却開始の初期条件であり，これ等の操作を実験の第1ステップと呼ぶことにする。

1) 試験片　260×60×1.6 m/m の市販の軟鋼板を 720°C で約1時間焼鈍した。なおここで行なつた実験はすべて同じ寸法の試験片を用いた。

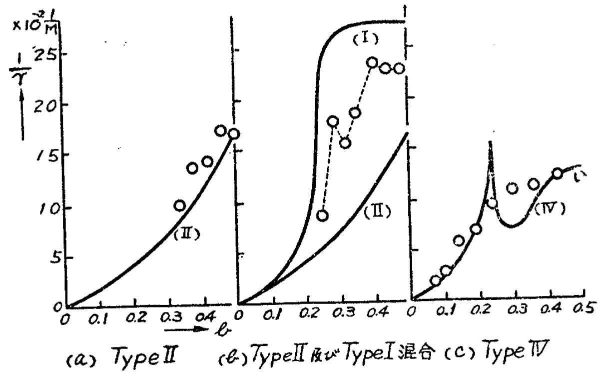
2) 加熱—冷却　実験の第1ステップは前に述べた通りで，まず strip ②の深さまで水中に急速に投入し，その

まま 1.4 秒静止した。つぎに第2ステップとして，試験片の残部を約 1 cm/sec の速度で水中に没入した。この際高温部が挫屈することを防ぐために，第 16 図に示すごとく試験片の上辺に簡単な挫屈防止の金具を取付けた。

3）温度および曲率計測　第16図に示す如く温度計測用試験片表面に9個のアルメル―クロメル線を配置し，切換スイッチを通してペン書きオッシロに接続した。その結果の1例を第 17(a）図に示す。この図において高温部が徐々にその領域を縮小しながら冷却されて行く状態が明かに示される。矢印は高温域縮小の方向である。また図中の時間は試験片が最初に水中に投入された瞬間からの値を示す。したがつて 1.4 秒後には Strip ②が完全に冷却されて第1ステップが完了し，図はその後の第2ステップの温度変化を現わしている。加熱前後の試験片の上下縁の中央部 140 m/m 間の撓みをダイヤルゲージにより計測し，撓み曲線を求めこれから曲率を計算した。ただし撓み曲線を近似的に円孤と考えた。以上の結果を第 18（a）図中の○印であらわした。



第 17 図　温度変化



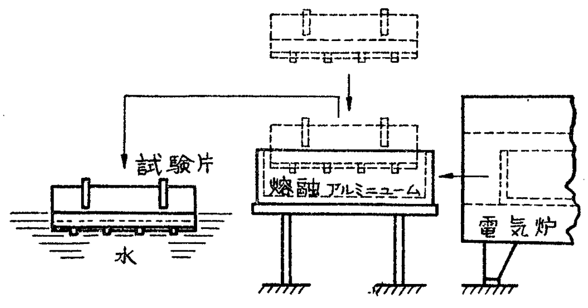
第 18 図　残留曲率

実験 II：Type I の実験を同様な方法で行なうことが望ましいのであるが，第1ステップの時間を厳密に調整することが困難であり，Type II の冷却過程が混合してあらわれるので実験値の分散が甚だしくなるため，止むを得ず本実験では Type I そのものの実験を中止し，Type I および II の組合せた形の冷却法を採用した。すなわち試験片を strip ②の深さまで急速に水中に投入して第1ステップを完了させた後，そのまま放置して strip ①を水上に露出した状態で自然冷却せしめた。温度計測は前と全く同様で，計測結果を第17(b)図に示す。

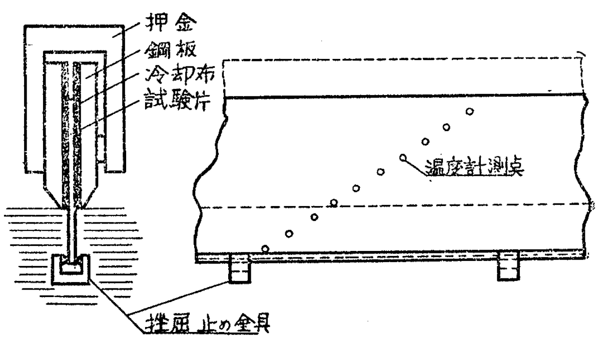
図から明かなように第1ステップ完了後最初は高温域が縮小する Type II を示すが，途中から Type I の冷却型があらわれ（図の矢印），両者が組合せられた型で冷却が完了する。ゆえに残留曲率は Type I と II による方法の中間の値を示すことが容易に想像される。残留曲率計測結果を第 18（b）図に示す。

実験 III：Type IV（第2図）の加熱―冷却を行なつた場合の残留曲率を実験的に求める目的を似て行なわれた。この実験では熱源として溶融アルミニウムを用いた。鋼製の箱（内容積：長さ 27 cm×幅 11 cm×深さ 7 cm）に入れた市販のアルミニウムを炉中で約 740°C に加熱溶融した後，取出して空気中で攪拌しつつこれに試験片を strip ①の深さまで急速に投入した（第 19 図)。

この際試験片の挫屈を防ぐために加熱部の外辺には挫屈防止金具を取付け，また strip ②（常温部）の温度上



第 19 図　実験概略図



第 20 図　試験片

昇を防ぐためにこの部分に水を含ませた布を当て，その外から10 m/m 厚の鋼板ではさみ，試験片がその面内にのみ変形し得るようにした。温度計測は前と同様な方法で行なわれた。溶融アルミニウムに投入した瞬間から strip ①の温度が上昇して行く状態を第 17（c）図に示す。

図に示す最高温度分布に達する時間は約6秒で，その後の温度分布はほぼ定常状態を保つ。本実験では加熱開始後9秒で試験片をアルミニューム炉から取出し，急速に水中に投入して冷却した，冷却後の残留曲率の測定結果を第 18（c）図に示す。

以上の3種類の実験結果を比較すると，第 18（a），（b），（c）図から明かなごとく Type II と Type IV の履歴による残留曲率は大体同じ程度の大きさであるが，Type I および II の組合せ型が前の2つに比べてかなり大きい。図中の実線は第7図から求めた理論計算値である。ただし r を曲率半径とすると

$$\frac{1}{r}=\left(\frac{\phi}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\varepsilon_0}{h}\right),\ (h \text{ は flat bar の深さ})$$

であるから，第7図の結果を第 18 図に Plot する際に $\varepsilon_0=1.65\times10^{-3}$ とおいた。この値は前報告で用いた値すなわち $\varepsilon_0=1.37\times10^{-3}$ より大きい。これは本報告における理論計算に用いた仮定すなわち降伏応力の温度依存性に関する仮定，また材料を完全弾塑性体と考え，その他熱膨張係数や弾性常数を一定とする等の多くの仮定に対し，実験がかなり高温の範囲にわたつたために，必ずしも良好な近似が得られなかつたものと思われる。しかしながら定性的立場から言つて，本章の理論計算は実験結果と良好な一致を示したものと言えよう。

以上のことから次の結論を導くことができる。条材の曲り変形は加熱―冷却履歴によつて大きな影響を受けるものであり

1. Type I と Type II あるいは III を比較すると加熱法は全く同じで冷却法が異なるだけである。しかし残留曲率は前者の方が他の2つに比べて著しく大きい。これは Type I の場合，冷却に際して高温部の収縮力が他の2つに比べて非常に大きく，常温部に充分大きな塑性変形を生ぜしめたためである。言い換えると，冷却に際し Type I は常温部の相対的変形抵抗が小さかつたためである。

2. Type I と Type IV を比較すると，両者は加熱法が異なるが冷却法は全く同じである。且つ残留曲率は Type I の方がはるかに大きい。これは Type IV では加熱に際し，加熱部の膨張によつて常温部に塑性変形を生ぜしめたため，これが冷却後の残留曲率を甚だしく減殺せしめたものである。言い換えると加熱に際し Type I は IV に比べて常温部の相対的変形抵抗が充分大きかつたため（ここでは無限大），常温部に残留曲率を減少せしめるような塑性歪が全く生じなかつたのである。

§ 5. 総　　括

flat bar の面内曲げ加工を行なう際の加熱―冷却履歴の影響に関する基礎的研究として，基本型と考えられる4種類の加熱―冷却法（第2図）による熱塑性的曲り変形を理論的に解析し，これの定性的結果を実験により確かめた。冷却後の残留曲率の大きさは，第7図に示すように Type I の加熱―冷却法を用いた場合が他の3つの Type に比べて非常に大きいことが明かになり，その原因については第4節の終りで述べた通りである。これに基づいて一般的考察を行なうことにする。

1. 熱塑性加工においては，加熱―冷却履歴が材料の変形に対して非常に大きな影響を与えるものであり，実除加工に際して加熱過程および冷却過程を一つの様式で統一しないと，各製品の変形に予期しない大きな誤差を生ずる恐れがある。

2. 加熱温度を高くすればそれだけ残留変形は大きくなるが，材料の脆化を防ぐためには軟鋼の場合，A_1 変態点以下で加工すべきであり，今加熱温度を 700°C 程度とした場合に，同一な最高温度分布に対し最も大きな残留変形を生ずる加熱―冷却法は一般に次に示す通りである。

a）加熱に際してその膨張力のために常温域に塑性変形を生ぜしめることは，加熱部の膨張による変形を大きくし，この部分の圧縮塑性歪を小さくする。これは冷却に際する収縮量の減少をきたし，同時に常温域の塑性歪が収縮変形を減殺する。ゆえに加熱法は常温部の相対的変形抵抗をできるだけ大きくするように選ぶべきである。加熱域の降伏値は温度と共に減少し，700°C 程度では極めて小さくなる。したがつて上の原則に伴うためには温度上昇域の範囲をできるだけ狭くとるべきである。

Type I, II, III の加熱法はその極端な例であり，温度上昇域の幅が零である。

b）冷却に際しては常温域の相対的変形抵抗を小さくするような冷却法を選ぶべきことは当然である。言い換えれば，高温部の収縮力を大きくするため温度下降域の範囲をできるだけ大きくとるべきである。すなわち極端に言うと，高温域全面が一様に温度を降下するような冷却法がよい。Type I，IV がその例である。

ただし以上の議論では，曲げ加工における加熱幅を flat bar の深さの半分以下に限定しているが，半分以上におよぶと現象がさらに複雑になり上の原則のみでは不充分になるが，一般に大曲率に曲げるためには，徒らに加熱幅を大きくするよりむしろ機械的操作を併用する方が能率的な場合が多い。ただしこれは実用上の諸条件も考慮してさらに研究すべき問題である。

本研究を行うに当り御指導を賜つた渡辺恵弘博士，石橋　正教授に深甚なる感謝の意を捧げます。また実験並びに計算は応用力学研究所肥山　央，井土　敏両氏の助力によるものである。併せて厚く感謝する次第である。