

(昭和 34 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

微分幾何学的考察に基づく一般外板展開法 の精度解析について

正員 三田村利武*

On Analysing the Accuracy of Methods of Developing of
Shell Plates by Differential Geometry

By Toshitake Mitamura, *Member*

Abstract

It is not always possible that a curved surface in the Euclid space of three dimensions is developed on the Euclid plane of two dimensions. Therefore, we use many approximate methods for the development of undevelopable curved surfaces which are shell plates, because the amount of expansion and contraction of parts of shell plates are not much in practice.

Then the author analysed these methods by differential geometry for the purpose of investigating the accuracy. Namely two geodesic lines being at right angles on the shell surface and being competent for making the correct developed plane, are found out by the calculus of variations, and the position of base points or base line of each method being relative to the geodesic line on the curved shell surface, are compared with the correct position of them on the developed plane, then the accuracy of each method is known.

And the author analysed the question of back-sets and the roll line of the shell plate by differential geometry.

After all, it was verified that the geodesic line method had the best accuracy in practice.

§ 1. 序 論

3次元の Euclid 空間の曲面を2次元の Euclid 平面にその曲面の1部を伸縮させることなく展開させることは必ずしも可能ではない。ところが、われ々が扱う船舶外板を構成する曲面はその曲面が部分的に極端な曲りを持たない緩慢な限られた範囲の曲面であるのでその伸縮量も僅かなものであり、また加工工程にてこれ等の伸縮量を与えることはそれ程困難なものではないので、ある種の近似展開法が次第に発達して来たのである。著者がかつて発表した測地線を利用した展開方法^{1,2,3)}も勿論実用性を加味した近似展開法である。これ等の各種方法がそれぞれどの程度の精度を有するかを微分幾何学的に解析し、それが実用上許される範囲のものであるかを数値的に知る一方法について、これから述べるものである。一般に外板の展開法は各肋骨線上に展開基準点を求めてこれにより、外板の展開形状を決定するのでこの基準点を結ぶ曲線が、充分正確に平面に展開されているか否かがその精度の良否を左右する最大の因子である。そこでこの曲線の附近のある測地線を基準としてこれと曲線との相対的位置を曲面上と展開平面上において比較することにより、従来の各種展開法の主なものの精度を調べその良否を知り、なおこれ等の展開に必要な back-set および roller 線についても解析しそのおよぼす影響も考察して見ようとするものである。

§ 2. 主なる外板展開法

従来各種の実用的展開方法が用いられて来たがこの代表的方法には対角線法(襷送法)、直角送法(真金送法)、

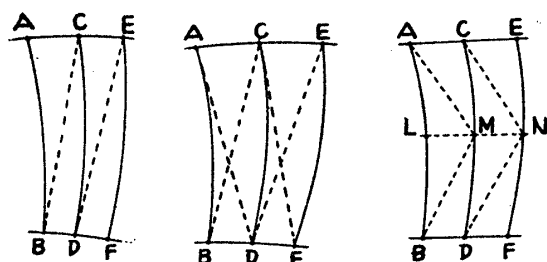
原稿受付 昭和 34 年 7 月 9 日

* 三菱日本重工横浜造船所

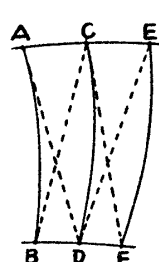
直角送返法（戻金法）、基線法および測地線法等がある。そこでこれらの精度比較のためにその該略を述べる。

（1）対角線法（禪送法）

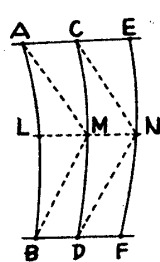
最も基本的な方法である。すなわち各肋骨線と上下縁線に囲まれた形をそれぞれ対角線を求めることにより、決



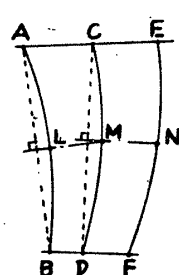
第1図



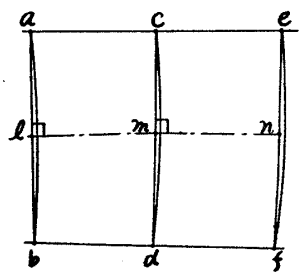
第2図



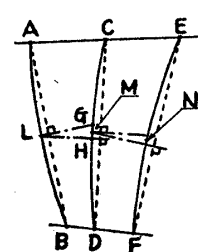
第3図



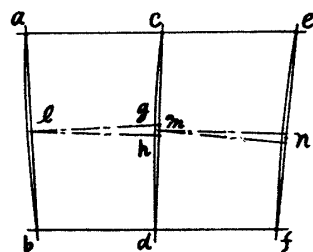
第4図



第5図（展開図）



第6図



第7図（展開図）

M点を基点としてEF上にN基点を求めこれを繰返して次々に各肋骨線上における基点を求める。展開は第7図に示すように $abdc$ の形を決定するためには、直線 $\overline{ab}$ を引き l 点から垂線 $\overline{lg}$ を引き l を通り $\overline{cd}$ に立てた垂線の足を h とすると $\overline{gh}$ の中央に M 相当点の m 点が来るように c , および d の位置を調節して $abdc$ の形を決定しこれを次々に行なつて外板全体の形を決める方法で大変面倒な方法である。

（4）基線法

第8図の $ABFE$ が展開する外板とすると中央肋骨線 $\overline{CD}$ の弦線 $\overline{CD}$ に直交する直線 $\overline{XY}$ を引きこれが展開面でも直線になると見なして外板1枚を一度に展開せんとするもので今までの各肋骨線間をそれ々展開して繋ぎ合わせる方法に比べると大変簡単で工数が非常に少なく済む利点があるが、この方法の考え方は $CDBA$ および $CDFE$ に $\overline{CD}$ から直角送法を施したと同じで、したがって誤差が大きい。これは正面線図で引いた直線 $\overline{XY}$ が展開面では必ずしも直線ではないことによるものである。したがってこの度合が余りひどくない外板にその使用範囲が限られて来る欠点がある。

（5）測地線法

可展曲面を平面に展開するとき曲面上の測地線は直線になることから外板一枚に涉り正面線図上に近似的に

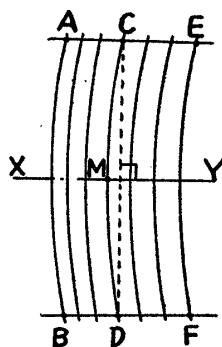
めて行く方法で四周の展開実長が求められた場合、これだけではその形が決定できないので、その対角線の実長をも求めて一肋骨心距間の形を決めこれ等を次々に連続して外板一枚の形状を画き出す方法である。これには第1図のように片方だけの対角線でやる方法、第2図のようにその誤差を平均化するため2本の対角線を求める方法、第3図のように板幅を上下に分けそれ々に対角線を求めて形を決める方法がある。この方法は比較的精度の良い方法として極端な曲面に屢々用いられたものである。

（2）直角送法（真金送法）

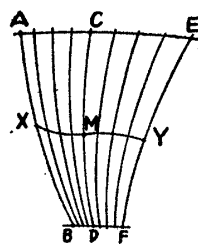
正面線図（第4図）において各肋骨弦線に直交する直線は展開面（第5図）上においても該肋骨弦線に直交するという考に基づいて行われる方法である。すなわち第4図で $\overline{AB}$ のほぼ中央に L を求め $\overline{AB} \perp \overline{LM}$, $\overline{CD} \perp \overline{MN}$ に L, M, N を求める。第5図ではこれが l, m, n に相当するものとすれば、先ず直線 $\overline{ab}$ を引き $\overline{ab} \perp \overline{lm}$ になるように $\overline{cd}$ 上の m 点が来るように調節し $abdc$ の形を決める。同様に $\overline{cd} \perp \overline{mn}$ なるように $\overline{ef}$ 上の n 点がくるように $cdfe$ の形を決める。このようにして各肋骨心距間の形を連続して求め外板一枚の全体の展開形状を画き出す方法である。

（3）直角送返法（戻金法）

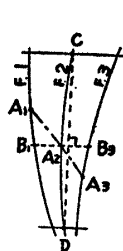
直角送法は一肋骨弦線に直交する直線により求めたが、この方法は隣接する2肋骨弦線に直交する2直線によりその平均値としての基点を求めて展開する方法である。すなわち、第6図の正面線図において $\overline{AB}$ のほぼ中央に求めた基点 L を通り肋骨弦線 $\overline{AB}$ および $\overline{CD}$ に直交する直線が次の肋骨線 $\overline{CMD}$ と交わる点を G および H とすると $\overline{GH}$ の中点 M を $\overline{CD}$ の基点とする。同様に



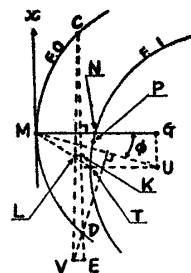
第8図



第9図



第10図



第11図

測地線を求め、これを基として外板を一挙に展開する方法である。すなわち、第10図に示す等心距の $F1$, $F2$ なる肋骨線上に A_1 , A_2 なる2点があるとき、これを通る測地線が $F3$ と交る点 A_3 は $\widehat{CD} \perp \widehat{B_1A_2B_3}$, $\widehat{A_1B_1} = \widehat{B_3A_3}$ にとることにより求められる。この簡単な方法により第9図に示すごとく外板の長さ方向に測地線 XY を引き、これが展開面にて直線となるから、これを基準直線として展開形状を決める方法である。この方法は精度が良く基線法と同様工数が少ない利点がある。また、前³⁾に述べたように測地線を基準として最小量の伸縮を加味した非可展面の展開を合理的に行なうことができる。なお、 M 点から出発する測地線は展開方法を簡単にするために C, D を通る測地線に直交する方がよい。

従来の直角送法の考えに基づけば正面線図の肋骨弦線に直交するように測地線の出発の方向を求めればよいのであるが、以前²⁾述べたようにローラー線と肋骨線がかなり斜交し且、横曲りが強い外板では大きな誤差を生じる。これには第11図に示す方法で正確に求めることができる。簡単に説明すると先ず M 点における FO の切線に平行に $F1$ への切線を求め切点を T とする。 $TU \perp \widehat{CD}$, $MU = (MT \text{ の実長})$ になるように U 点を求める。 $MU \perp \widehat{DV}$, $\widehat{CV} = \widehat{CMD}$ に V を決める。つぎに $\widehat{CD} \perp \widehat{MN}$ であるとき、 $\widehat{CK} = (MN \text{ の実長})$, $\widehat{CK} \perp \widehat{KL}$ に $\widehat{KL}$ を求め $\widehat{NP} = \widehat{KL}$ に P 点を求めれば M, P を通る測地線が C, D を通る測地線に直交する測地線として求められる。

§ 3. 測 地 線

以上の各種展開法の各基点を結ぶ基準線は一般に板の長さ方向に通っているものである。曲面上の測地線に沿ったある有限範囲が可展であるとして平面に展開できれば測地線は直線となることから、外板面上の直交する二測地線とこれに相当する展開面上の直交二直線を基準として各展開基準線と肋骨線との交点の位置を曲面と展開面について比較すれば各展開法の精度を比べることができる。そこで必要な測地線を理論的に充分正しく求める必要がある。

測地線は曲面上の2点を結ぶ最短曲線であるので変分法によりその微分方程式を求めることができる。曲面が $F(x, y, z) = 0$ であれば、これを解いて $z = \phi(x, y)$ とするとこの上の2点 (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) を結ぶ曲面上にある曲線の長さを S とすると $z' = \phi_x + \phi_y y'$ であるから S を求める式は

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + (\phi_x + \phi_y y')^2} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1)$$

となる。そこで S が極小、極大なるための条件は次の変分法における Euler の微分方程式を満足することである。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

そこで $f = \sqrt{1 + y'^2 + (\phi_x + \phi_y y')^2}$ であるから②式に入れ整理すると

$$(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2) y'' - \phi_x \phi_{yy} y'^3 + (\phi_y \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_{xy}) y'^2 + (2\phi_y \phi_{xy} - \phi_x \phi_{xx}) y' + \phi_y \phi_{xx} = 0 \quad (3)$$

となる。これが測地線の微分方程式である。これを満足し曲面 $F(x, y, z) = 0$ すなわち $z = \phi(x, y)$ 上にあり且、

この曲面上の2点を通る曲線を求めればこれが測地線となる。今③式を解き、これが2点を通る条件を入れて求めた式が $y=g_1(x)$ であれば曲面 $F(x, y, z)=0$ 上の測地線は次式で示される。

$$y=g_1(x); F(x, y, z)=0 \quad (4)$$

これが第9図の2点 $C(x_1, y_1, z_1)$ および $D(x_2, y_2, z_2)$ を通る測地線であるとする。

つぎに第9図の定点 $M(x_3, y_3, z_3)$ を通り④に直交する測地線を求める。今これが次式で示されるものとする。

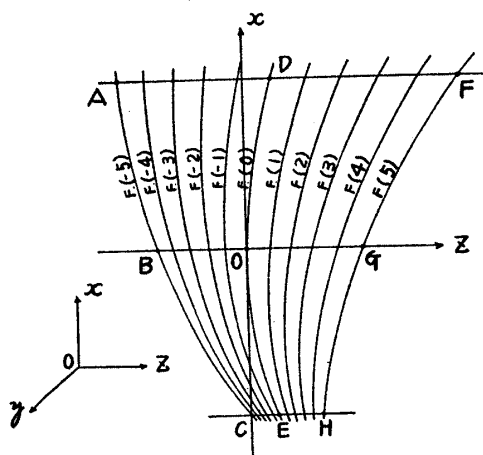
$$x=g_2(y); F(x, y, z)=0 \quad (5)$$

今⑥が④に曲面上で直交するためには交点 (x_4, y_4, z_4) におけるそれぞれの切線が直交することであるから $dg_1/dx = g_1', dg_2/dy = g_2'$ とすると直交条件は次式で示される。

$$g_1' + g_2' + (\phi_x + \phi_y \cdot g_1')(\phi_y + \phi_z \cdot g_2') = 0 \quad (6)$$

ただし⑥の x, y, z にはそれ、 x_4, y_4, z_4 を代入する。

そこで定点 $M(x_3, y_3, z_3)$ を通り⑥を満足する測地線を計算できればこれを基準として各種の主な外板展開法の精度を求めることができる。



第12図

§4. 基準肋骨線と上下シームとの交点を結ぶ測地線とこれに直交する定点を通る測地線の数値計算

曲面の形が容易に解析表示出来るものであれば良いが一般に外板は簡単な形として表示出来ないゆえ実際の形状に類似の形状として次のような表示を行ない、これに各種の展開法を行なった場合にどのような計算を計算して見ることにする。

第12図において $\widehat{ABC}$ および $\widehat{FGH}$ が外板の前後端の肋骨線であるとし $\widehat{DOE}$ がその中央の肋骨線で、これが展開のための基準肋骨線であるとする。今 O 点を原点とし y 軸は紙面に垂直とする。また $A, B, \dots, H$ の各点の座標を $A(x_0, -y_0, z_1), B(0, -y_0, z_2), C(-x_0, -y_0, z_3), D(x_0, 0, z_4), E(-x_0, 0, z_5), F(x_0, y_0, z_6), G(0, y_0, z_7), H(-x_0, y_0, z_8)$ であるとする。また曲面を次のごとく表示する。

$$z = y^2(a_1x^2 + a_2x + a_3) + y(b_1x^2 + b_2x + b_3) + c_1x^2 + c_2x + c_3 \quad (7)$$

⑦に座標を入れて各係数を求めると⑦式で外板曲面を近似的に表示できる。今簡単のために $\overline{DE}$ と z 軸とが直交するものとする。この時の各係数は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4x_0^2y_0^2} \{z_1 + z_3 + z_6 + z_8 - 2(z_2 + z_7 + 2z_4)\}; & a_2 &= \frac{1}{4x_0y_0^2} \{z_1 + z_6 - (z_3 + z_8)\}; \\ a_3 &= \frac{1}{2y_0^2} (z_2 + z_7); & b_1 &= \frac{1}{4x_0^2y_0} \{(z_6 - z_1) + (z_8 - z_3) - 2(z_7 - z_2)\}; \\ b_2 &= \frac{1}{4x_0y_0} \{z_3 + z_6 - (z_1 + z_8)\}; & b_3 &= \frac{1}{2y_0} (z_7 - z_2); & c_1 &= \frac{z_4}{x_0^2}; & c_2 &= 0 & c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

今 DW 一万噸の貨物船の正面線図で経験により最も誤差の多い部分で次のごとく観測値を得た。単位は米で示す。

$x_0=1, y_0=4, z_1=-0.730, z_2=-0.535, z_3=0.020, z_4=z_5=0.180, z_6=1.290, z_7=0.685, z_8=0.440$, これを⑧に代入すると $a_1=0, a_2=0.0015625, a_3=0.0046875, b_1=0, b_2=0.1, b_3=0.1525, c_1=0.180$ となる。これを図示したのが第12図で、 $\widehat{ABC}, \widehat{FGH}$ の間を y 方向に10等分し図のごとき肋骨線が表示されるものとする。このとき肋骨心距は0.8となる。そこでこれ等の肋骨線により表示される曲面に対し各種展開法の精度を求めその傾向を判断することにする。図における $\overline{ADF}$ および $\overline{CEH}$ を上下のシームとする。このとき上下シーム位置および z 軸における各肋骨線の off-set は第1表のようになる。

そこで先ず第12図の $F(0)$ と上下シームとの交点 D, E を結ぶ測地線を求める。

④の $y=g_1(x)$ を Taylor 展開すると先ず $D(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ を通ることから

$$y = \bar{y}_1 + \frac{x - \bar{x}_1}{1!} g_1'(\bar{x}_1) + \frac{(x - \bar{x}_1)^2}{2!} g_1''(\bar{x}_1) + \frac{(x - \bar{x}_1)^3}{3!} g_1'''(\bar{x}_1) + \dots + \frac{(x - \bar{x}_1)^n}{n!} g_1^{(n)}(\bar{x}_1) + \dots \quad (9)$$

之が $E(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ を通れば

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{1!} g_1'(\bar{x}_1) + \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2}{2!} g_1''(\bar{x}_1) + \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^3}{3!} g_1'''(\bar{x}_1) + \dots + \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^n}{n!} g_1^{(n)}(\bar{x}_1) + \dots \quad (10)$$

そこで③を x につき逐次微分することに依り

D 点における $y'', y''', \dots, y^{(n)}$, すなわち

$g_1''(\bar{x}_1), g_1'''(\bar{x}_1), \dots, g_1^{(n)}(\bar{x}_1)$, を $g_1'(\bar{x}_1)$

で表わすことができる。 $g_1'(\bar{x}_1) = p$ とする

と⑩は p の多項式になるからこれを解いて

p の値を求め⑨に代入すると測地線の展開式

ができる。実際に p を求めるために多項式を解くことは大変であるので、この場合 p が 0 に近いことから接

近法を用いて D 点における p を計算すると $p = -0.062899$ となる。また

$$g_1''(\bar{x}_1) = -0.080114, \quad g_1'''(\bar{x}_1) = -0.019647, \quad g_1^{IV}(\bar{x}_1) = 0.014533, \quad g_1^V(\bar{x}_1) = -0.000048$$

$$g_1^{VI}(\bar{x}_1) = -0.014285, \quad g_1^{VII}(\bar{x}_1) = 0.016623, \quad g_1^{VIII}(\bar{x}_1) = 0.016245, \quad g_1^{IX}(\bar{x}_1) = -0.097183$$

$$g_1^{X}(\bar{x}_1) = 0.105656, \quad g_1^{XI}(\bar{x}_1) = 0.479736, \quad g_1^{XII}(\bar{x}_1) = -2.261911, \quad g_1^{XIII}(\bar{x}_1) = 0.864854, \dots$$

従つて⑨式は

$$y = -0.062899(x-1) - 0.040057(x-1)^2 - 0.003275(x-1)^3 + 0.000606(x-1)^4 \\ - 0.000000(x-1)^5 - 0.000020(x-1)^6 + 0.000003(x-1)^7 + 0.000000(x-1)^8 + \dots \quad (11)$$

つぎに測地線⑪に直交し原点を通る測地線を求めねばならない。これを⑤式で現わすものとすれば $x=g_2(y)$ を同じく Taylor 展開を行ない、 $dx/dy = \dot{g}_2(y)$, $d^2x/dy^2 = \ddot{g}_2(y)$, ...等て現わすと原点を通ることから

$$x = \frac{y}{1!} \dot{g}_2(0) + \frac{y^2}{2!} \ddot{g}_2(0) + \frac{y^3}{3!} \dddot{g}_2(0) + \dots + \frac{y^n}{n!} g_2^{(N)}(0) + \dots \quad (12)$$

測地線の微分方程式から前と同じく $\ddot{g}_2(0)$, $\ddot{g}_2(0)$ 等は $\dot{g}_2(0)$ で示されるゆえ $\dot{g}_2(0) = q$ とすると $\ddot{g}_2(0)$, $\ddot{g}_2(0)$ 等は q の函数となる。従つて⑫式は x, y および q を変数とする式と考えられる。これが⑪と直交することにより q は決定するから、2 測地線の交点において⑥式が満足されるよう q を決定すれば良い。同じく接近法により、これを求めると $q = -0.005610$ となる。このとき $\ddot{g}_2(0)$, $\ddot{g}_2(0)$...等を求めると次のごとくなる。

$$\ddot{g}_2(0) = -0.000007, \quad \ddot{g}_2(0) = -0.000791, \quad g_2^{(IV)}(0) = -0.000011, \quad g_2^{(V)}(0) = 0.000093,$$

$$g_2^{(VI)}(0) = 0.000016, \quad g_2^{(VII)}(0) = -0.000028, \quad g_2^{(VIII)}(0) = -0.000013, \quad g_2^{(IX)}(0) = 0.000014,$$

$$g_2^{(X)}(0) = 0.000013, \quad g_2^{(XI)}(0) = -0.000011, \quad g_2^{(XII)}(0) = -0.000019, \quad g_2^{(XIII)}(0) = 0.000010, \dots$$

したがつて⑫式は

$$x = -0.005617y - 0.000003y^2 - 0.000132y^3 - 0.000000y^4 + 0.000001y^5 + \dots \quad (13)$$

となり⑪と⑬の交点は $x = -0.000143$ $y = 0.025527$ でこの点において $g_1' = 0.005116$, $\phi_y + \phi_x g_1' = 0.003283$, $\dot{g}_2 = -0.005617$, $\phi_y + \phi_x \dot{g}_2 = 0.152711$ となり⑥式を満足する。実際に計算する場合 y が ± 4 となり y^n の項が充分大きくなるので $y = 4m$ とおくと肋骨心巨は 0.8 であるので m は肋骨番号を 1/5 したものに等しくなり⑬式は次のごとく表わされる。

$$x = -0.022468m - 0.000055m^2 - 0.008434m^3 - 0.000122m^4 + 0.000796m^5 + 0.000093m^6 - 0.000090m^7 \\ - 0.000020m^8 + 0.000010m^9 + 0.000004m^{10} - 0.000001m^{11} - 0.000001m^{12} + 0.000000m^{13} + \dots \quad (14)$$

これから各肋骨線と測地線の交点の x, y, z を求めると第 2 表のごとくなる。つぎにこの測地線の長さを求める。Taylor 展開により原点からの長さ S は次式で求められる。

$$S = y \cdot \left(\frac{ds}{dy} \right)_0 + \frac{y^2}{2!} \left(\frac{d^2s}{dy^2} \right)_0 + \frac{y^3}{3!} \left(\frac{d^3s}{dy^3} \right)_0 + \dots + \frac{y^n}{n!} \left(\frac{d^ns}{dy^n} \right)_0 + \dots \quad (15)$$

しかして

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \left(\phi_y + \phi_x \frac{dx}{dy} \right)^2} \quad (17)$$

であるから原点における $(dx/dy)_0$, $(d^2x/dy^2)_0$, $(d^3x/dy^3)_0$, ...等が求められているので⑮式を逐次微分することにより原点における $(ds/dy)_0$, $(d^2s/dy^2)_0$, $(d^3s/dy^3)_0$, ...等を求めることができ、これを⑮式に代入すると S を

第 1 表

単位: 米

肋骨	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y-Z	-0.730	-0.564	-0.390	-0.208	-0.018	0.180	0.386	0.600	0.822	1.052	1.290
Z 軸	-0.535	-0.440	-0.339	-0.232	-0.119	0	0.125	0.256	0.393	0.536	0.685
Y-Z	0.020	0.044	0.072	0.104	0.140	0.180	0.224	0.272	0.324	0.380	0.440

第2表

単位：米

序	x	y	z	S
5	-0.030287	4.0	0.672293	4.056364
4	-0.022113	3.2	0.528658	3.243530
3	-0.015275	2.4	0.389239	2.431442
2	-0.009531	1.6	0.254453	1.620146
1	-0.004563	0.8	0.124634	0.809665
0	0	0	0	0
-1	0.004558	-0.8	-0.119356	-0.808869
-2	0.009507	-1.6	-0.233467	-1.616983
-3	0.015211	-2.4	-0.342472	-2.424396
-4	0.021755	-3.2	-0.446588	-3.231174
-5	0.030085	-4.0	-0.546119	-4.037382

求める式となる。これにより原点より各肋骨線までの距離 (S) を求めたものが第2表に示されている。

また同様に D, E を結ぶ測地線の長さを求めると D, E 間の測地線の全長 $S_d = 2.041400$, D 点から交点まで $S_d = 1.020659$, 交点から E 点まで $S_e = 1.020741$ となる。また原点から交点までの測地線長 $S_0 = 0.025823$ となる。

§ 5. 各種展開法の肋骨線上の基点の位置

前章で求めた測地線からの各種展開法の基点の位置を曲面上と正確な展開面上とについて求め比較して見る。

先ず正面線図第12図上で $F(0)$ を中心にして前後端に

向け各種展開法を施した際の基点を求めて見る。この場合曲面が⑦式で表示されているので各肋骨線の式は $y = \text{const}$ として $z = ax^2 + bx + c$ なる形の2次式となる。したがって z 軸から曲線に沿った肋骨線の長さを S_F とすると次式で示される。

$$S_F = x\sqrt{1+b^2} \left\{ 1 + b \cdot A + \frac{2}{3} A^2 - b \cdot A^3 + \frac{2}{5} (4b^2 - 1) A^4 - \frac{2}{3} b(4b^2 - 3) A^5 + \frac{4}{7} (4b^4 - 12b^2 + 1) A^6 - \dots \right\} \quad (18)$$

$$\text{また反転して } x = \frac{S_F}{\sqrt{1+b^2}} \left\{ 1 - b \cdot B + 2 \left(b^2 - \frac{1}{3} \right) B^2 - b \left(5b^2 - \frac{13}{3} \right) B^3 + 2 \left(7b^4 - \frac{54}{5} b^2 + \frac{13}{15} \right) B^4 - \dots \right\} \quad (19)$$

$$\text{ただし } A = \frac{x \cdot a}{1+b^2}, \quad B = \frac{S_F \cdot a}{(1+b^2)^{3/2}} \quad \text{とす。}$$

また2点 (x_1, z_1) および (x_2, z_2) を通る直線に直交し定点 (x_3, z_3) を通る直線が $z = ax^2 + bx + c$ と交わる点は次式から x, z を求めれば得られる。

$$\left. \begin{aligned} x - x_3 &= - \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} (z - z_3) \\ z &= ax^2 + bx + c \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

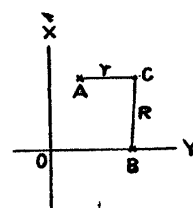
§ 2 で述べた直角送法, 直角送返法, 測地線法の基点はこれ等の式により解析的に求められる。ただし測地線法ではローラー線が肋骨線とかなり傾斜し横曲りが強いときは第11図の方法により KL すなわち NP を求める要があるので, この場合も計算に入れる。第11図において $\overline{VE} \perp \overline{DE}$ であれば $\overline{MU} \perp \overline{VD}$, $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ であるから $\angle VDE = \angle UMN = \phi$ となる。また $\tan \phi = \overline{GU} / \overline{MG}$ より $\overline{MN}$ と T の関係は解析的に決まるから $\overline{MG}$, $\overline{GU}$ を求めて $\tan \phi$ の値が得られる。よつて $\overline{DE} = \overline{CMD} - \overline{CD}$ であるから $\overline{VE} = \overline{DE} \cdot \tan \phi$ により $\overline{VE}$ が求められる。したがって $\overline{NP} = \overline{KL} = \overline{VE} \cdot \overline{CK} / \overline{CE}$ で $\overline{CK}$ は $\overline{MN}$ の実長, $\overline{CE}$ は $\overline{CMD}$ に等しいと考えて良いから $\overline{NP}$ の値を計算することができる。また基線法は z 軸をその儘用い, 対角線法は第3図の方法によることにし, $\overline{LMN}$ の線を z 軸とし肋骨線との交点を基点とする。そこで § 4 で求めた第2表に示す正確な測地線と肋骨線との交点から各基点までのそれぞれの肋骨線に沿った距離を求めると第3表のごとくなる。測地線より上にあれば正号, 下にあれば負号で示す。

つぎに § 4 で求めた測地線が展開面で直交軸になるとして展開の形状を普通の方法で決めるこ

第3表

単位：米

序	測地線法	基線法	直角送法	直角送返法	対角線法
5	-0.563	32.844	-82.651	-108.654	32.844
4	-0.370	23.300	-44.304	-65.364	23.300
3	-0.212	15.731	-17.146	-32.880	15.731
2	-0.091	9.655	-0.955	-11.295	9.655
1	-0.038	4.578	4.578	-0.468	4.578
0	0	0	0	0	0
-1	0.038	-4.572	-4.572	-9.258	-4.572
-2	0.114	-9.608	-18.534	-27.466	-9.608
-3	0.237	-15.603	-40.941	-54.085	-15.603
-4	0.440	-22.922	-71.131	-87.517	-22.922
-5	0.769	-32.074	-108.128	-127.260	-32.074



第13図

とにする。第 13 図の点 $A(X=a_1, Y=a_2)$ はシームと肋骨線との既に求められた交点、点 $B(X=b_1, Y=b_2)$ は基準直線と肋骨線との交点で既知であるとき A および B が r および R なる距離にある点 C における X, Y は次の式から求められる。

$$X = a_1 + \frac{\alpha \cdot \beta \pm \beta C}{2A}, \quad Y = a_2 + \frac{\beta \cdot B \mp \alpha C}{2A} \quad (21)$$

ただし $\alpha = a_1 - b_1$, $\beta = a_2 - b_2$, $A = \alpha^2 + \beta^2$, $B = R^2 - r^2 - A$,

$$C = \sqrt{4Ar - B^2}$$

厳密には $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ は曲線であるが、実際に行われる方法にしたがつて直線と見なし展開形状を求める。直線としたことによる誤差は極め微小で基点の位置の精度を比較するのにはほとんど関係ない。

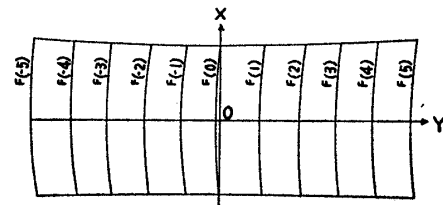
第 13 図の R は測地線から上下シームまでの肋骨線長、 r は肋骨間の上下シーム長であるから⑩式から求めることができる。これ等の値を⑫式に代入し次々に各交点を求めると第 4 表のごとくなる。この場合 $F(0)$ の上

第 4 表

単位: 米

Fr No	上 シーム		下 シーム		Y 軸
	Y	X	Y	X	Y
5	4.173182	1.144325	4.034117	-1.001412	4.656364
4	3.340087	1.148320	3.231405	-0.993910	3.243530
3	2.508788	1.105355	2.429448	-0.991978	2.431442
2	1.679318	1.070095	1.628269	-0.995804	1.620146
1	0.851644	1.042112	0.826887	-1.005459	0.804665
0	0.025828	1.020659	0.025823	-1.020741	0
-1	-0.798184	1.005752	-0.774898	-1.041401	-0.808869
-2	-1.620382	0.996040	-1.575272	-1.069320	-1.616983
-3	-2.440811	0.990911	-2.375288	-1.099445	-2.424346
-4	-3.259517	0.989582	-3.174946	-1.136436	-3.231174
-5	-4.07656	0.991070	-3.974247	-1.177685	-4.037382

下シームの交点および Y 軸上の位置は §4 で求めた S_U, S_L 及び S_G から決められる。かくして第 14 図に示す展開形状が得られたとする。そこでこの展開面の形状の上に正面線図にて行なつたと同様の方法で基点を求めてこれが正面線図上にて



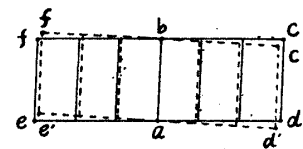
第 14 図 (展開図)

求めた基点の位置とどの位異なるか求めて見る。先ず上シーム、Y 軸、下シームと各肋骨線との交点を通る肋骨曲線を $Y = AX^2 + BX + C$ として現わしこの肋骨線上に曲線に沿つて前に正面線図上に求めた第 3 表に示す各基点の位置に等しく基点を求める。直角送法および直角送返法の場合にはこの基点から次の肋骨線に対しいわゆる送りをかけその交点と前に求めた基点との差を調べる。対角線法では上下シーム交点からの実長距離すなわち第 3 図の $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ の実長を求め⑩式に依り展開交点を求め Y 軸からの差を求める。基線法は §4 で求めた測地線と基線すなわち第 12 図の z 軸との差がその誤差であるし、測地線法は近似測地線との差がその誤差である。なお基線法および測地線法以外では上記方法で求めた基点の誤差は各肋骨間に生ずる誤差で、これ等は次々に累加される。したがつて基線法および測地線法と比べる場合はその累計を比較する。これ等の誤差を表にすると第 5 表となる。基点の位置が+になつてゐるのは正しい位置より上にあり、-になつてゐる場合はその反対である。例え

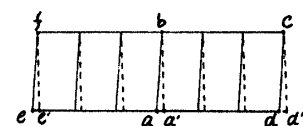
第 5 表

単位: 米

Fr. No	測地線法	基線法	直角送法	直角送返法	対角線法
5	-0.563	32.844	18.645	18.261	22.735
4	-0.370	23.300	16.046	15.430	18.260
3	-0.212	15.731	12.648	12.184	13.744
2	-0.091	9.655	8.847	8.510	9.193
1	-0.038	4.578	4.578	4.426	4.619
0	0	0	0	0	0
-1	0.038	-4.572	-4.572	-4.660	-4.531
-2	0.119	-9.608	-9.310	-9.944	-9.269
-3	0.237	-15.603	-14.155	-14.631	-14.149
-4	0.440	-22.922	-19.076	-19.395	-18.846
-5	0.769	-32.074	-24.033	-24.120	-23.447



A 図



B 図

第 15 図

ば基点が上に偏れている場合は第 15 図の A 図の $abc'd'$ の形のように形状が偏れて来る。そこで正しい形が実線で示し点線が各展開法で求めた形状であるとするこの 2 つの形状の f と f' , c と c' とが一致するごとくおくと B 図のごとくなる。この場合にはシームの不一致と肋骨線の倒偏差がおきる。これを表にすると第 6 表

第 6 表

単位: 耗

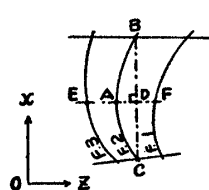
Fr	測地線法		基線法		直角送法		直角送返法		対角線法	
NQ	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
5	0	-0.357	0	17.415	0	11.462	0	11.364	0	12.389
4	-0.059	-0.350	-3.025	17.067	-1.643	11.233	-1.426	11.142	-0.163	12.141
3	-0.083	-0.344	-4.080	16.780	-2.582	11.045	-2.432	10.955	-0.286	11.937
2	-0.071	-0.340	-3.649	16.564	-3.014	10.902	-3.006	10.914	-0.359	11.784
1	0.009	-0.337	-2.225	16.424	-3.023	10.813	-3.166	10.725	-0.410	11.687
0	0.104	-0.336	-0.309	16.382	-2.719	10.782	-2.974	10.645	-0.411	11.654
-1	0.199	-0.337	1.606	16.431	-2.417	10.815	-2.555	10.727	-0.445	11.689
-2	0.252	-0.340	3.078	16.584	-1.962	10.915	-2.068	10.827	-0.385	11.747
-3	0.266	-0.345	3.534	16.844	-1.363	11.086	-1.043	10.947	-0.094	11.983
-4	0.146	-0.353	2.696	17.215	-0.701	11.331	-0.504	11.239	-0.061	12.247
-5	0	-0.363	0	17.699	0	11.649	0	11.535	0	12.591

できる。これによると近似測地線法が一番良い。他の方法の誤差の大きな原因はローラー線と肋骨線の関係によるもので第12図のように一見ごくありふれた外板でも、ローラー線が肋骨線とかなり斜交した横曲りが多いときには計算結果のような誤差が生じてくる。測地線以外で基線法は特別であるが、その他の方法に現れる誤差は第11図の $\overline{VE}$ に大体等しい。

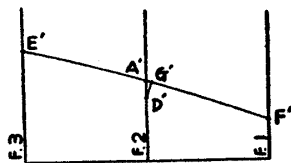
§ 6. 幅、長さおよびバックセット量の問題

以上は基点の相違による位置の誤差であるが部分的板幅の問題としては正面線図から求めた肋骨線長が影響するものである。一般に展開形状を求める際に肋骨線を直線として求め後から曲線に修正する方法がとられている。したがって測地線法、基線法、対角線法の第3図の方法のように上下を2分してその間を直線として展開する場合と直角送法および直角送返法のごとく板幅に涉つて直線とする場合とでは前者が明らかに誤差は少ない。しかしこれ等の板幅の誤差は極めて少なく、しかも安全側に広くとられている上は、加熱冷却により加工する場合に幅方向にも多少の収縮があるゆえこの儘の方がむしろ良いわけである。長さ方向については上下シームの展開長即ち実長により展開形状の決定が行われているもので、この実長が充分正確に求められればどの方法においても精度の差はない。すなわち各種外板の展開方法は前に述べた肋骨線上の基点の求め方いかんにより異なるもので長さや幅方向の実長の求め方は全く同じである。

ところが第16図に示すような非可展外板については現図上周囲の長さが充分正しく求められても可展面から非可展面への加工成形が板の一部に、特に長さ方向に伸縮を与えることにより行なわれるものであるから、このことを考慮した展開法でなくてはならない。このことは前⁹⁾にも述べたものであるが、これは少なくとも板の辺、すなわち上下シームと板幅の中心を通る線の長さを知って修正されるものである。一般に加工方法としては収縮の方が容易であるからこれだけを考えて円柱形の可展面の上下シーム附近を収縮させるか板幅中心線附近を収縮させるかにより第16図のA図あるいはB図のような形になる。したがって直角送法、直角送返法のごとく板幅中心線の長さを求めない展開法ではこれらの伸縮量を知ることにはできない。この点では精度、工数の問題から測地線を利用する方法が一番良い⁸⁾。



第17図



第18図

のごとくなる。シームの上下の不一致量を上下偏差量 α とし正しい形より上を +、下を - にとつた。第15図のB図のように上シームを合せた場合肋骨線が時計と反対方向に回転した場合の下シームの偏量を肋骨線の倒偏差量 β として + にとつた。これによるとシームの上下偏差量は大したことではないが肋骨線の倒偏差量には相当なものがある。

本計算例は外板形状としても展開誤差が大きく出る傾向の板であるのでこの計算結果から各展開法の形状、精度の傾向が判断



A 図



B 図

第16図

さて §4 で求めた測地線が板幅のほぼ中心を通つているのでこれを用いてバックセット量の比較をして伸縮量を計算して見る。第17図は正面線図で $\overline{BC} \perp \overline{EF}$ になるとき $E-F$ 断面が第18図であれば $\overline{AD} = \overline{A'D'}$, $\overline{A'G'} \perp \overline{D'G'}$ になるとき、 $\overline{A'G'}$ を近似的にバックセット量（展開肋骨線曲量）として求めるものであるが、これは第17図の B, C が第18図では D' に一致すると見た場合第17図の

B, C を通る測地線が第 18 図の $\overline{D'G'}$ に一致すると考えて外板面に直角に見たときの肋骨線の曲量が展開面のそれであるとしたものである。したがって $\overline{A'G'}$ を計算するには $\overline{A'D'}$ が判っているから $\angle D'A'G'$ を求めれば良い。実際には G' は A' に非常に近く、 $\widehat{E'A'F'}$ はほとんど直線であるから A' における $\widehat{E'A'F'}$ の切線と $F2$ との交角を求めても良い訳で、これは第 17 図に表示する曲面 $z=\phi(x, y)$ の A 点における AF 方向の切線と紙面のなす角でもある。今これを φ とすると

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1+A^2}{1+A^2+\left(\frac{1+A\phi_x}{\phi_y}\right)^2}} \quad (22)$$

ただし $A=z_3-z_2/x_3-x_2$ で $(x_2, z_2), (x_3, z_3)$ は B および C の座標、 ϕ_x, ϕ_y の x, y は A 点の座標 (x_1, y_1) を代入する。また $\overline{AD}=L$ なら

$$L = \frac{z_1 - Ax_1 + B}{\sqrt{1+A^2}} \quad (23)$$

ただし

$$B = \frac{x_2 z_3 - z_2 x_3}{x_3 - x_2}$$

バックセット量を b とすると

$$b = L \cos \varphi = \frac{z_1 - Ax_1 + B}{\sqrt{1+A^2+\left(\frac{1+A\phi_x}{\phi_y}\right)^2}} \quad (24)$$

これ等の式を用いて §4 に示す曲面の肋骨線と測地線の交点位置におけるバックセット量 b および第 4 表に示す展開図の該点における肋骨曲量 b' を求めると第 7 表のごとくなる。この表で見ると $F(0)$ の基準肋骨線の位置において 1.3 耗の差がある。これは従来の方法が近似的方法であるからでいわゆるローラー線が肋骨線とかなり斜交する外板ではこれが大きく出る。実際にはこの位が最大で実用上差支えない。さてこの程度の誤差があるとして修正したのが第 7 表の修正値である。このことは測地線に沿って全長で 23.7 耗伸しておかねばならぬことを示し、ガウスの全曲率が負となる所謂鞍型の非可展面であることが判る。

§ 7. ローラー線の問題

ローラー線とは平面より曲面に加工する工程としてローラーにて荒曲げするときのローラー軸の方向でこれを母線とする可展曲面に変形し水圧押あるいは加熱冷却によつて 1 部の伸縮を行ない非可展曲面に変形するものである。したがってこのローラー線の方向は非可展曲面を平面に展開するには当然考えるべき問題である。一般の展開法には考えていないが測地線法では第 11 図に示すように考慮に入れてある。

さてローラー線は第 11 図のように $F0, F1$ の平行切線の切点を結ぶ線として一般に求められているがこれがどの程度のものであるか調べて見る要がある。そこで一般の曲面上でその方向を知るためにはある曲面上の点においてその法平面と曲面の作る曲線の曲率の中で最も小さいものの方向に母線即ちローラー線があつたと考える。このように曲面上の一点における法曲率の極値を与える方向は主方向と呼ばれるのであるが、この曲面上で常に主方向に向つて進む曲線を曲率線と呼んでいる。曲面上の 1 点を通る曲率線は一般に 2 本あつて互いに直交している。そこでこの曲率線の中、直線に近い方を母線の変形として考えると曲面上の主方向がローラー線の方であると考えられる。さて曲面上の点 0 におけるこの曲面への切平面を考えこれを XY 平面にとることにより曲面を $Z=f(X, Y)$ として表示し Z 軸を含む平面は法平面となるから、これと曲面の作る曲面の曲率中心は Z 軸上にあるが $Z > 0$ のところにあれば $1/R > 0$ と定める。ただし R は曲率半径とす。またこの平面が XZ 平面となす角を θ とすると曲率は

$$\frac{1}{R} = \frac{Z_{xx} + Z_{yy}}{2} + \frac{Z_{xx} - Z_{yy}}{2} \cos 2\theta + Z_{xy} \sin 2\theta \quad (25)$$

であるから $1/R$ の極値を求めるために θ に付き微分したものを 0 とすると

表 7 表 単位: 耗

F.NO	b'	b	b'-b	左修正値
5	40.95	28.11	12.84	14.16
4	38.52	28.76	9.76	11.08
3	35.77	29.01	6.76	8.08
2	32.72	29.20	3.52	4.84
1	29.38	28.70	0.68	2.00
0	25.82	27.14	-1.32	0
-1	22.12	25.75	-3.63	-2.31
-2	18.36	24.12	-5.76	-4.44
-3	14.63	22.29	-7.66	-6.34
-4	11.01	20.40	-9.39	-8.07
-5	7.57	18.36	-10.81	-9.49

$$\tan 2\theta = \frac{2Z_{XY}}{Z_{XX} - Z_{YY}} \quad (26)$$

すなわち②⑥を満足する θ の値を求めればこれが主方向である。 θ の値は2つあつて互いに垂直になつてゐる。この中 $1/R$ の絶対値の小なる方の θ について考える。なおこの $1/R$ の2つの値 $1/R_1$, $1/R_2$ であれば前に述べたガウスの全曲率とは $1/R_1 R_2$ でこれが正か負で収縮量の附し方が異なる。曲面が⑦式で与えられるときは、座標変換式は

$$x = X; y = \frac{1}{\sqrt{1+b_2^2}} Y - \frac{b_3}{\sqrt{1+b_2^2}} Z; z = \frac{b_3}{\sqrt{1+b_2^2}} Y + \frac{1}{\sqrt{1+b_2^2}} Z \quad (27)$$

$$\text{これによると②⑥は原点において} \quad \tan 2\theta = \frac{b_2 \sqrt{1+b_2^2}}{c_1(1+b_2^2) - a_3} \quad (28)$$

つぎに普通のローラー線は肋骨線への平均切線の切点を結んで求められているので、これと②⑥を比べて見る。

先づ §4 で求めた曲面について計算すると②⑥から $\tan 2\theta = 0.563548$ となるから $\tan \theta = 0.262376$ および -3.811318 , ②⑥から $1/R = 0.381527$ および -0.016584 , この中から $1/R$ の絶対値の小なる方をとると $\tan \theta = -3.811318$, また $1/R_1 R_2 < 0$ となるから鞍型曲面であることが判る。つぎに原点にて $F(0)$ に切する切線に平行な $F(1)$, $F(-1)$ の切線の切点を普通の方法で求めると $F(1)$ では $x = -0.225$, $z = 0.115888$; $F(-1)$ では $x = 0.219444$, $z = -0.127668$ である。第11図の T 点がこれであるから $\overline{MT}$ を $\overline{CD}$ を軸として紙面平行になるまで回転したのが $\overline{MU}$ であるので、これと x 軸とのなす角を求めれば良い。そこで $F(1)$, $F(-1)$ との両方から U 点を求めこれ等を結ぶ線と x 軸との交角を θ' とすると $\tan \theta' = -3.641564$ となる。そこで第11図の $\overline{VE}$ を求めると θ のときは 0.011124 , θ' では 0.011643 となりこの差は 0.52 秒であるが約2米に対する誤差であるからこの場合、実用上差支えない。またこの計算例は大変極端な場合であるので一般にはこれより少ない。次に $F(1)$, $F(-1)$ が $F(0)$ に限りなく近づいた場合の極限を考えてローラー線方向として x 軸となす角を θ'' とすると⑦⑧で示す曲面の原点においては

$$\tan \theta'' = \frac{2c_1 \sqrt{1+b_2^2}}{-b_2} \quad (29)$$

で示される。したがつて計算すると $\tan \theta'' = -3.641621$ で $\overline{VE} = 0.011643$ で θ' のときと同じ結果である。また②⑨より

$$\tan 2\theta'' = \frac{4b_2 c_1 \sqrt{1+b_2^2}}{4c_1^2(1+b_2^2) - b_2^2} \quad (30)$$

となるがこの場合 $b_2^2 = 4a_3 c_1$ であれば③⑨より $\theta = \theta''$ となる。また、一般に可展面の微分方程式は $\partial^2 z / \partial x^2 \cdot \partial^2 z / \partial y^2 = (\partial^2 z / \partial x \cdot \partial y)^2$ であるから⑦式が可展面であるためには $a_1 = a_2 = b_1 = c_2 = c_3 = 0$ であつて $b_2^2 = 4a_3 c_1$ となるから可展面では $\theta = \theta''$ になる。すなわち可展面では従来の方法で正確なローラー線が求まることが判る。

§ 8. 結 語

従来しばしば用いられて来た各種の展開法を測地線を基として微分幾何的に考察して見た。

これによると計算例のごとき外板において測地線法を除く他の方法では肋骨線の倒偏差による下シームのずれのために鋳孔にかなりの喰違が生ずることになり現場当揉を要することになる。また溶接の場合であればブロックバットの伸しが充分であるとき、修正野書をすることができ、これにもいろいろ困難が伴うので始めから正しい方法で展開した方が良い。このように微分幾何的解析により外板面上の測地線を求め各展開法の基点の精度を調査し、さらに非可展面の伸縮量を求めたがこれが割合に多く、また展開、加工用のローラー線も解析した結果、その方法が実用上有効であることが判つた。このローラー線の方法は展開の精度に大いに関係があり、測地線法のみこれを考えているので計算例のような極端な板でも十分な精度を得ている。測地線法は工数も他に比べ少ないので最も実用的方法であろう。

注 * 1 造船協会論文集 第 96 号「近似測地線による外板展開について」

* 2 " 第 101 号「ローラー線が肋骨線と極端に斜交する横曲りの大なる外板の展開について」

* 3 " 第 104 号「非可展外板の展開について」