

(昭和 36 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

板付き不等辺山形鋼の曲げ (第1報)

—弾 性 曲 げ—

正員 寺 沢 一 雄* 正員 安 川 度**
 正員 八 木 順 吉* 正員 橋 本 知 時***

On the Elastic Bending of Inverted Angle with Plating

By Kazuo Terazawa, *Member* ; Wataru Yasukawa, *Member*
 Junkichi Yagi, *Member* ; Tomotoki Hashimoto, *Member*

Summary

Most of the plating of ship structure is stiffened by inverted angles, and the strength of these stiffeners have been estimated by the simple beam theory. However, their bending rigidity and strength may be considerably reduced because of the unsymmetry of their cross sections.

In order to explain these phenomena, elastic behaviour of the inverted angle with plating under bending load was analysed considering effects of distortion of its cross section and torsion.

While, to examine the validity of the theory, bending tests were carried out and fair agreements between test results and calculated values were obtained. From these results, the relation between effectiveness and ratio of breadth to thickness of the angle was found.

1 緒 言

船体各部に使用されている部材には、不等辺山形鋼が多く、これを強度部材として設計する場合には、一般に振れおよび横断面の変形が起らないものとして単純梁理論が適用されて来た。ところが不等辺山形鋼を板に取付けた構造が荷重をうけるときには、形鋼の非対称性のために、形鋼は曲げ作用の他に振り作用をうけると共に横断面の変形が生じ、Flange の有効度が低下し、従つてその曲げ強度および剛性が低下する。本論文では、まず、板付き不等辺山形鋼の曲げ振れ変形および横断面の変形を考慮した弾性曲げ理論を導き、さらに Flange の幅および Web の高さを種々に変えた模型の曲げ試験を行ない、計算値と比較して理論の妥当性を検討すると共に、Flange の巾とその板厚の比および Web の高さとその板厚の比の変化が曲げ剛性および Flange の有効度に及ぼす影響を調査した。

2 記 号

 b = Flange の巾 h = Web の高さ B = Plate の巾 t_f, t_w, t_p = Flange, Web および Plate の板厚 A_f, A_w, A_p = Flange, Web および Plate の断面積 $A = A_f + A_w + A_p$ = 全断面積 GJ_f, GJ_w, GJ_p = Flange, Web および Plate の振り剛性 $GJ = G(J_f + J_w + J_p)$ = 全断面の振り剛性 EI = 曲げ振れ剛性

原稿受付 昭和 36 年 6 月 20 日

* 大阪大学工学部

** 川崎重工技術研究所

*** 防衛庁

- I = 全断面の図心を通る水平軸まわりの断面2次モーメント
- I_{YZ} = 断面相乗積
- e = 剪断中心と Web との距離
- l_1 = 中央から荷重点迄の長さ
- l_2 = 荷重点から端部迄の長さ
- N_f, N_w, N_p = Flange, Web および Plate の断面に作用する引張力
- Q_f, Q_w = Flange および Web に作用する面内剪断力
- M_f, M_w = Flange, および Web に作用する面内曲げモーメント
- T_f, T_w, T_p = Flange, Web および Plate の断面に作用する振りモーメント
- r = Flange と Web の接合部に作用する単位長さ当りの剪断力
- q = Flange と Web の接合部において Flange に作用する単位長さ当りの引張力
- m = Flange と Web の接合部に作用する単位長さ当りの曲げモーメント
- s = Web と Plate の接合部に作用する単位長さ当りの剪断力
- n = Web と Plate の接合部において Web に作用する単位長さ当りの曲げモーメント
- P = 集中荷重
- w = 分布荷重
- x = 長手方向に取った座標
- y = Flange の巾方向に取った座標および Flange の撓み
- z = 下向きに取った座標および Web の撓み
- ϕ_f, ϕ_w, ϕ_p = Flange, Web および Plate の捩れ角
- θ = Web の変形により生ずる Flange と Plate の相対傾斜角
- y_0 = Web の変形により生ずる Web 上下端の水平方向の相対変位
- $\phi = \phi_p$

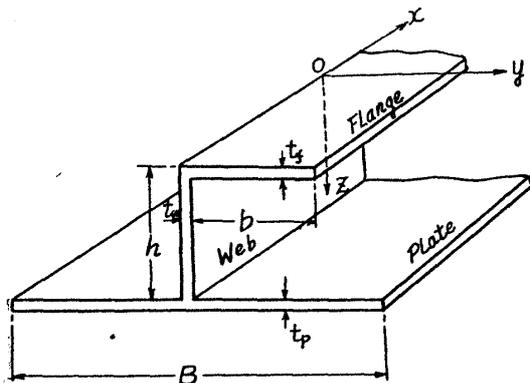
3 不等辺山形鋼の曲げ理論

3.1 基礎方程式

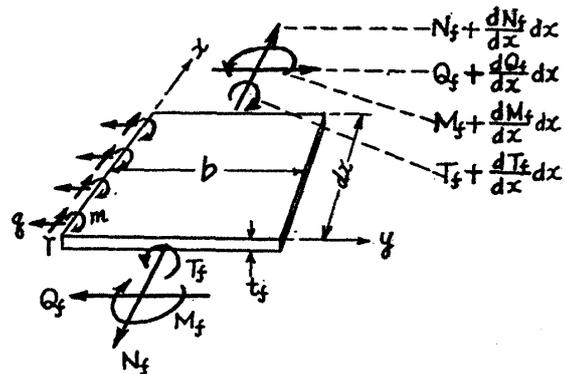
第1図に示されるごとく、Flange, Web および Plate より成る梁が Web の面内に横荷重をうける場合について考察する。

この梁を便宜上 Flange, Web および Plate の各 Element に分割して取扱い、各 Element はそれぞれ純梁理論に従うものと仮定する。Flange は面内変形および断面の捩れ変形を考え、Web はその他に板面に垂直な撓み変形も考慮する。なお Plate についてはその面内の曲げ剛性は他の Element のそれに比較して非常に大きいと考え、Plate は長さ方向の引張あるいは圧縮変形および断面の捩れ変形のみが生ずるものと仮定する。

第2図のように Flange から微小長さ dx を切り出して、それに作用する力の平衡条件を考えると次式が求められる。



第1図



第2図 Flange に作用する力

$$\frac{dN_f}{dx} = -r, \quad \frac{dQ_f}{dx} = q, \quad \frac{dT_f}{dx} = -m, \quad \frac{dM_f}{dx} = -\frac{b}{2} \frac{dN_f}{dx} + Q_f$$

Flange の y 方向の撓みを y とし, 捩れ角を ϕ_f とすれば力と変形との関係は次のようになる。

$$EI_f \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{b}{2} \frac{d^2 N_f}{dx^2} - q \quad (1)$$

$$GJ_f \frac{d^2 \phi_f}{dx^2} = \frac{dT_f}{dx} = -m \quad (2)$$

ただし $I_f = \frac{b^3 t_f}{12}$

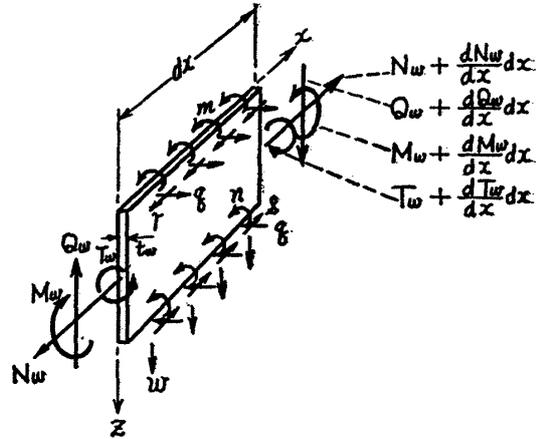
Flange と Web との接合面での縦歪を ϵ_f とすれば

$$\epsilon_f = \frac{N_f}{EA_f} + \frac{b}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3)$$

全く同様にし, Web に対しても第3図を参照にして, x, z 方向の力の平衡条件を適用すると

$$\frac{dN_w}{dx} = r - s, \quad \frac{dQ_w}{dx} = -w,$$

$$\frac{dT_w}{dx} = m + n - qh, \quad \frac{dM_w}{dx} = Q_w - \frac{h}{2}(r + s)$$



第3図 Web に作用する力

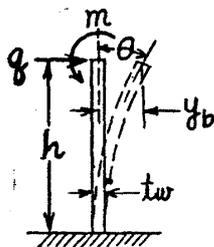
Web の z 方向の撓みを z とし, 捩れ角を ϕ_w とすれば

$$EI_w \frac{d^4 z}{dx^4} = -\frac{h}{2} \left(\frac{d^2 N_w}{dx^2} + 2 \frac{d^2 N_f}{dx^2} \right) + w \quad (4)$$

$$GJ_w \frac{d^2 \phi_w}{dx^2} = \frac{dT_w}{dx} = m + n - qh \quad (5)$$

ただし $I_w = \frac{h^3 t_w}{12}$

つぎに Flange からの反力 q およびモーメント m による Web の断面の変形を考える。Web は Flange から分布反力 q および分布モーメント m をうけて変形するが簡単のために, 単位巾の Web を切り出して考え, 面と直角な曲げ剛性のみ板としてのものを用いる。第4図を参照し, Web の断面の上下端に生ずる相対変位を y_b , 相対傾斜角を θ とすれば一般に次式で表わされる。



第4図 Web の変形

$$\theta = -\frac{h}{D} m + \frac{h^2}{2D} q \quad (6)$$

$$y_b = -\frac{h^2}{2D} m + \frac{h^3}{3D} q \quad (7)$$

ただし

$$D = \frac{Et_w^3}{12(1-\nu^2)}$$

Web の Flange および Plate との接合面での縦歪をそれぞれ ϵ_{wf} および ϵ_{wp} とすれば

$$\epsilon_{wf} = \frac{N_w}{EA_w} + \frac{h}{2} \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (8)$$

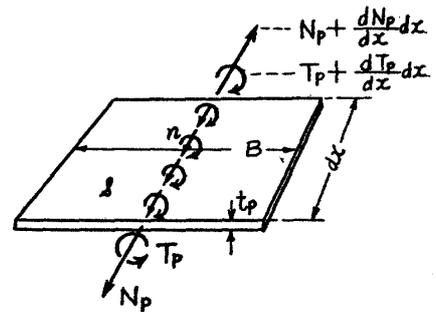
$$\epsilon_{wp} = \frac{N_w}{EA_w} - \frac{h}{2} \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (9)$$

Plate は Web より伝えられる振りと引張の作用のみを受け, 面内の曲げ剛性は他の Element のそれに比較して非常に大きいと考えられるので, 曲げによる変形は小さいと見なす。第5図を参照して, 力の平衡条件より

$$\frac{dN_p}{dx} = s, \quad \frac{dT_p}{dx} = -n$$

捩れ角を ϕ_p , 縦歪を ϵ_p とすれば

$$GJ_p \frac{d^2 \phi_p}{dx^2} = \frac{dT_p}{dx} = -n \quad (10)$$



第5図 Plate に作用する力

$$\epsilon_p = \frac{N_p}{EA_p} \quad (11)$$

Web と Flange および Web と Plate の接合部での slope の連続条件より

$$\phi_p = \phi_w = \phi_f - \theta = \phi$$

上式と (2), (5), (10) 式を考慮すると

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + GJ_f \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -qh \quad (12)$$

ただし

$$J = J_f + J_w + J_p$$

各 Element の接合部での歪の連続条件および x 方向の引張あるいは圧縮の合力が 0 であることから, N_f, N_w および N_p を y および z で表わせれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_f &= -\frac{EA_f(A_w + A_p)b}{2A} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{EA_f(A_w + 2A_p)h}{2A} \frac{d^2 z}{dx^2} \\ N_w &= -\frac{EA_w A_f b}{2A} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{EA_w(A_p - A_f)h}{2A} \frac{d^2 z}{dx^2} \\ N_p &= -\frac{EA_f A_p b}{2A} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{EA_p(A_w + 2A_f)h}{2A} \frac{d^2 z}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(4) 式および (13) 式より

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{e}{h} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{w}{EI} \quad (14)$$

ただし

$$e = 3b \frac{A_f(A_w + 2A_p)}{A_w^2 + 4A_f A_w + 4A_w A_p + 12A_f A_p} = \text{剪断中心と Web との距離}$$

$$I = \frac{h^2}{12A} (A_w^2 + 4A_f A_w + 4A_w A_p + 12A_f A_p) = \text{断面の図心を通る水平軸まわりの断面 2 次モーメント}$$

(13) 式および (14) 式を (1) 式に代入すれば次式が求められる。

$$E\Gamma \frac{d^4 y}{dx^4} = -qh^2 + ewh \quad (15)$$

ただし

$$\Gamma = \frac{A_f b^2 h^2}{12} \left[1 + \frac{3(A_w + A_p)}{A} - \frac{9A_f}{A} \frac{(A_w + 2A_p)^2}{A_w^2 + 4A_f A_w + 4A_w A_p + 12A_f A_p} \right]$$

= Warping Constant

Web と Flange の y 方向の変位の連続条件より

$$y = h\phi + y_0 \quad (16)$$

(2), (6), (7), (12), (15) び (16) 式を用いて, m, q, ϕ, y およびを消去すれば θ に関する次の微分方程式が得られる。

$$a_1 \frac{d^6 \theta}{dx^6} + a_2 \frac{d^4 \theta}{dx^4} + a_3 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + a_4 \theta = a_5 w \quad (17)$$

ただし

$$a_1 = -(1-\nu)h^2 \Gamma \frac{J_f}{J_w} \frac{J - J_f}{J - 2J_f}$$

$$a_2 = 2\Gamma$$

$$a_3 = -\frac{3}{(1-\nu)h^2} \Gamma \frac{J_w}{J} - \frac{3}{(1+\nu)} \frac{J_f(J - J_f)}{J}$$

$$a_4 = \frac{3}{2(1-\nu^2)h^2} J_w$$

$$a_5 = \frac{3e}{E} \frac{J - 2J_f}{J}$$

(17) 式を解いて θ が求めれば, ϕ, y, z 及び Q 等はそれぞれ次式より求められる。

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{J_f}{J - 2J_f} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{(1-\nu)h^2} \frac{J_w}{J - 2J_f} \theta \quad (18)$$

$$y = h\phi + \frac{h}{2}\theta - \frac{(1-\nu)h^3}{6J_w} \left(J \frac{d^2\phi}{dx^2} + J_f \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{e}{h} \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{w}{EI} \quad (14)'$$

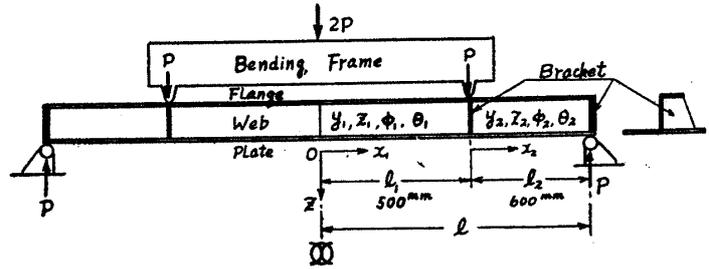
$$Q_f = -\frac{EA_f(A_f+4A_w+4A_p)b^2}{12A} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{EA_f(A_w+2A_p)bh}{4A} \frac{d^3z}{dx^3} \quad (20)$$

$$Q_w = \frac{EA_f(A_w+2A_p)bh}{4A} \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{E(A_w^2+4A_fA_w+4A_wA_p+12A_fA_p)h^2}{12A} \frac{d^3z}{dx^3} \quad (21)$$

$$y_b = y - h\phi \quad (22)$$

3.2 境界条件

以上の式より θ, ϕ, y 及び z を求めるとこれらの中に 12 個の積分常数が現われるが、これらの常数は本実験模型に対しては次の境界条件で定められる。すなわち第 6 図のように各 Bracket の位置で 4 点荷重を与えた場合、対称性から右側を考えると、 $x_1=0 \sim l_1$ 迄は偶函数のみで表わされ 6 個の常数が生じ、 $x_2=0 \sim l_2$ 即ち荷重点と端部の間では 12 個の常数が生じ計 18 個の常数が現われるがこれらは次の 18 個の境界条件により定められる。



第 6 図 試験片寸法および荷重方法

$x_2=l_2$ において

- $y_2=0$ ①
 - $z_2=0$ ②
 - $\phi_2=0$ ③
 - $\theta_2=0$ ④
 - $y_2''=0$ ⑤
 - $z_2''=0$ ⑥
- ①と③から $y_b=0$ となる

$$\frac{EA_f(A_w+2A_p)bh}{4A} \frac{d^3y_2}{dx_2^3} - \frac{E(A_w^2+4A_fA_w+4A_wA_p+12A_fA_p)h^2}{12A} \frac{d^3z_2}{dx_2^3} = -P \quad (7)$$

($Q_w = -P$ の条件式)

$$\frac{EA_f(A_f+4A_w+4A_p)b^2}{12A} \frac{d^3y_2}{dx_2^3} - \frac{EA_f(A_w+2A_p)bh}{4A} \frac{d^3z_2}{dx_2^3} - \frac{G}{h} \left(J \frac{d\phi_2}{dx_2} + J_f \frac{d\theta_2}{dx_2} \right) = 0 \quad (8)$$

($Q_f h + Q_w e + T_f + T_w + T_p = -P e$ の条件式)

$x_1=l_1, x_2=0$ において

- $y_1=y_2$ ⑨
- $z_1=z_2$ ⑩
- $\phi_1=\phi_2$ ⑪
- $\theta_1=0$ ⑫
- $\theta_2=0$ ⑬
- $y_2=h\phi_2$ ⑭
- $y_1'=y_2'$ ⑮
- $z_1'=z_2'$ ⑯
- $y_1''=y_2''$ ⑰
- $z_1''=z_2''$ ⑱

3.3 基礎方程式の解

(17) 式で表わされる基礎微分方程式の特性方程式の根は、形鋼の寸法により、全部実根の場合と共軛複素根の場合が出てくるが、それらの根を一般に $\pm\beta_i (i=1, 2, 3)$ と表わし解を導く。共軛複素根の場合には、出て来た結果を共軛性を利用して実函数に書き直せばよい。

(17) 式の一般解を求めこれに (18) 式から (22) 式迄の関係を代入し、3-2 の境界条件を適用すると次の解が求められる。

$$y_1 = \frac{Pehl_2}{GJ} \left[1 - \frac{\eta}{l_2} \sum_{i=1}^3 \omega_i \gamma_i \frac{ch\beta_i x_1}{ch\beta_i l_1} \right] \quad (23)$$

$$y_2 = \frac{Pehl_2}{GJ} \left[1 - \frac{x_2}{l_2} - \frac{\eta}{l_2} \sum_{i=1}^3 \omega_i \gamma_i \left(\frac{ch\beta_i x_2}{ch\beta_i l_2} - \frac{sh\beta_i x_2}{sh\beta_i l_2} \right) ch\beta_i l_2 \right] \quad (24)$$

$$z_1 = \frac{Pl_2}{6EI} \left[(3l_1^2 + 6l_1l_2 + 2l_2^2) - 3x_1^2 + \frac{12(1+\nu)heI_{YZ}}{J} \left\{ 1 - \frac{\eta}{l_2} \sum_{i=1}^3 \omega_i \gamma_i \frac{ch\beta_i x_1}{ch\beta_i l_1} \right\} \right] \quad (25)$$

$$z_2 = \frac{P}{6EI} \left[2l_2^2(3l_1 + l_2) - 6l_1l_2x_2 - 3l_2x_2^2 + x_2^3 + \frac{12(1+\nu)heI_{YZ}l_2}{J} \left\{ 1 - \frac{x_2}{l_2} - \frac{\eta}{l_2} \sum_{i=1}^3 \omega_i \gamma_i \left(\frac{ch\beta_i x_2}{ch\beta_i l_2} - \frac{sh\beta_i x_2}{sh\beta_i l_2} \right) ch\beta_i l_2 \right\} \right] \quad (26)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\beta_3^2 - \beta_2^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad \omega_2 = \frac{\beta_1^2 - \beta_3^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad \omega_3 = 1 \\ \gamma_i &= \frac{2}{3} \frac{J}{J - 2J_f} - \frac{1}{(1-\nu)h^2} \frac{J_w}{J - 2J_f} \cdot \frac{1}{\beta_i^2} - \frac{(1-\nu)h^2}{3} \frac{J_f}{J_w} \frac{J - J_f}{J - 2J_f} \beta_i^2 \\ \eta &= \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i \gamma_i \beta_i (\tanh\beta_i l_1 + \coth\beta_i l_2) \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

各点における撓みは (25), (26) 式より計算することができ、またこれらの式を2回微分して曲率が求まるとそれを用いて (13) 式より各 Element の引張力が求まる。従つて各点の歪は (3) 式, (9) 式等から容易に計算することができる。

Flange の有効巾は、Flange と Web との結合部に生ずる応力に等しい一様な応力が作用する幅と定義すれば、次式で与えられる。

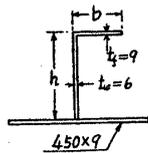
$$b_E/b = \frac{N_f}{EA_f} \left/ \left(\frac{N_f}{EA_f} + \frac{b}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \right) \right. \quad (28)$$

4 板付き不等辺山形鋼の曲げ試験および計算値との比較検討

現在大型船に使用されている型鋼の寸法比は $h/t_w \approx 15 \sim 35$, $b/t_f \approx 5 \sim 7$ の近傍にあり、本実験では $h/t_w = 25$, $b/t_f = 6$ を中心にして、 h/t_w および b/t_f を種々に変えて7種類の試験片を製作した。これらは各 Element を

第1表 試験片寸法

試験片	$h \times b \times t_w \times t_f$	b/h	t_f/t_w	h/t_w	b/t_f
L ₁	90×54×6×9	0.600	1.5	15	6
L ₂	150×54×6×9	0.360	"	25	6
L ₃	210×54×6×9	0.257	"	35	6
L ₄	270×54×6×9	0.200	"	45	6
L ₈	150×90×6×9	0.600	"	25	10
L ₁₀	150×135×6×9	0.900	"	25	15
L ₁₂	150×180×6×9	1.200	"	25	20

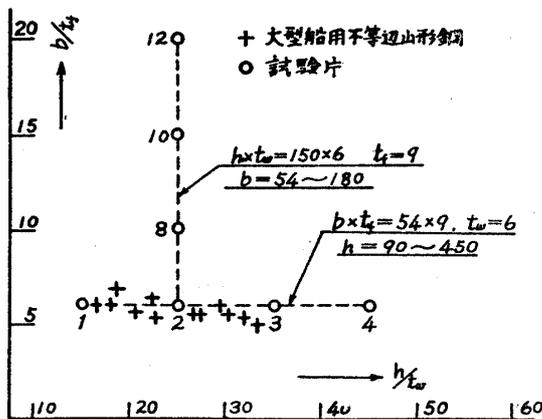


鋼板 (SS 41) より切り出して溶接で Built up されたもので、最高荷重をも求めるために、残留応力除去の焼鈍を行なつた。各試験片の寸法は第1表および第7図に示す通りである。各試験片は第6図に示されるように全長 2,400^m 支点間隔 2,200^m で中央部 1,00^m 間に均一曲げを作曲させ、荷重作用点には横断面の变形および局部破壊を防止するために Bracket を挿入した。

曲げ試験は破壊迄行なわれ、その間、中央断面の縦歪を LE. strain gauge で計測し、中央及び荷重点での Web の撓みを dial gauge で測定した。

これらの計測結果と、3で求められた式を用いて数値計算を行なつた結果とを比較して第8図以下に示した。

第8図は各試験片の中央断面の弾性範囲における縦歪を示したものである。図中○印は実験値であり、実線は計算値である。また参考の為に点線で単純梁理論による結果をも示した。図によれば実験値と計算値とは非常によく合致しており、Flange の幅が増大するに従つて単純梁理論との差異は極めて増大することが判る。



第7図 試験片寸法比および現在使用されている大型船用不等辺山形鋼の寸法比

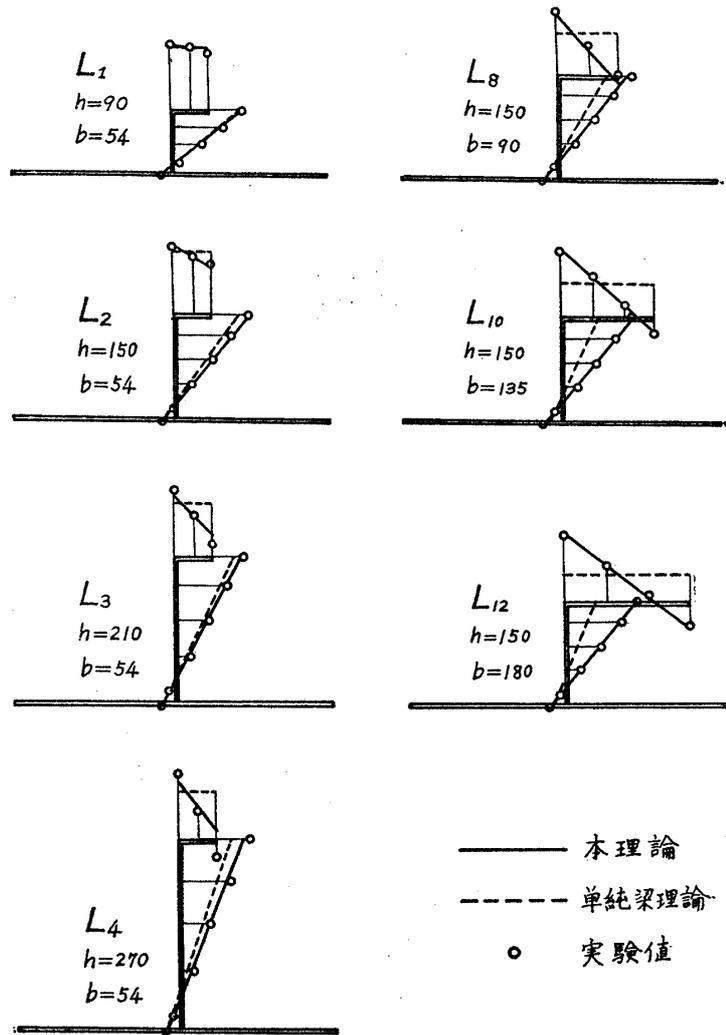
L_{12} 試験片では最大曲げ歪が単純梁理論によるものの2倍強にも達している。また Flange が面内の曲げをうけるために Flange の幅が増加するに従って有効幅は著しく減少し、 L_{12} 試験片では約31%である。また Flange の歪分布は弾性範囲においては直線的で剪断遅れの現象等はほとんど見られず、面内の曲げ作用による有効度の低下に比べて、これらによるものは弾性範囲内では2次的要素であると考えられる。

第9図は L_{12} 試験片の中央の撓みの実験値と計算値とを比較したものであり、○印は実験値、実線は計算値、点線は単純梁理論によるものである。計算値は実験値と比較的によく一致しており、Web の高さが大きくなると剪断撓みの影響が著しくなり実験値との差異が増大すると考えられる。本理論で Web および Flange の剪断撓みの影響を正確に評価するためには可なり煩雑な計算を必要とするので、簡単のために Web の剪断の影響のみを考慮して撓みを修正し一点鎖線で示した。

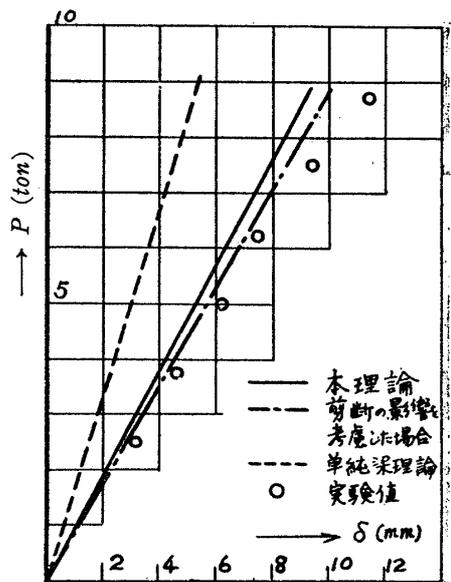
第10図、第11図は b/t_f および h/t_w が変化した場合の b_E/b 、 I_E/I および ϵ_f/ϵ_0 を示したものである。図中実線は(28)式より求められた有効巾比 b_E/b の中央断面における値であり、点線は有効断面2次モーメント比 I_E/I すなわち(27)式より求められた中央の撓みと単純梁理論による撓みとの比である。又一点鎖線は中央断面における最大歪 ϵ_f と単純梁理論による Flange の歪 ϵ_0 との比である。○、△および+印はそれぞれの実験値を表わす。図によれば、有効巾及び有効断面2次モーメントは共に b/t_f が增大するに従って急激に減少して行き、 ϵ_f/ϵ_0 は増加して行く。その減少率及び増加率は、 h/t_w が增大する場合に比較して非常に大である事が判る。

5 結 言

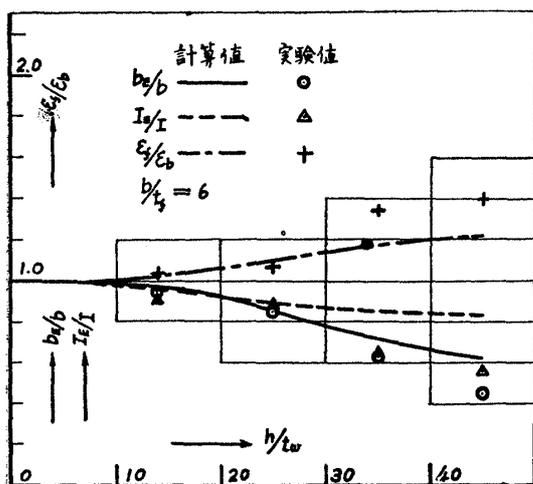
以上、板付き不等辺山形鋼の弾性曲げに関する理論式を導き、Flange の幅及び Web の高さを種々に変えて実験を行なった結果と比較し、理論式が実験値に比較的によく合致することを確認した。また Flange の幅が増大するに従って、単純梁理論とは著しい差異を生じ、Flange の幅が極端に大なる場合には、Flange に生ずる最大歪は単純梁理論によるものの2倍以上に達することが判つた。また曲げ剛性も Flange の幅が増大するに従って減少し、単純梁理論では可なりな剛性の低下を見積っておかなければならない。また弾性範囲内では強度および剛性が10%以上低下しないためには $b/t_f < 5$ 、 $h/t_w < 25$ で



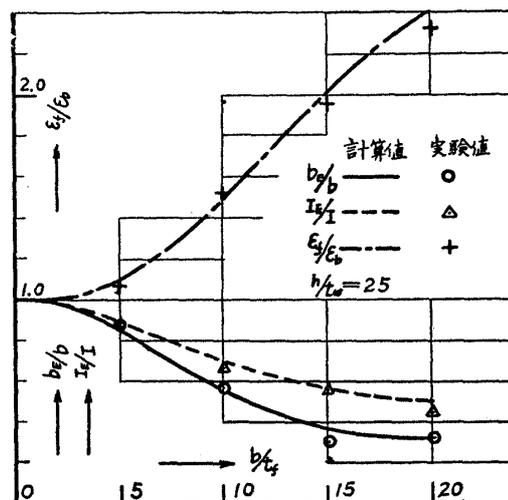
第8図 中央断面の歪分布



第9図 中央の撓み



第 10 図 中央における Flange の有効幅, 有効断面 2 次モーメントおよび最大歪比



第 11 図 中央における Flange の有効幅, 有効断面 2 次モーメントおよび最大歪比

なければならず, 20% 以上低下しないためには $b/t_f < 6.5$, $h/t_w < 40$ でなければならない。

以上は型鋼が 1 本の場合で而も Bracket の距離が可なり長い場合に対する結論であるが, 実船に用いられているように型鋼が多く並んでいる場合, またこれらと直交した部材が密にある場合等については引続き研究中であり, さらに弾性範囲を越えた場合の状況および最高荷重等については次回に報告する予定である。

最後に, 本実験は八幡製鉄(株)の造船用鋼材研究会の研究の一部として行なわれたものである事を付記し, 種々御討議をいただいた委員各位に謝意を表する次第である。又実験に協力された阪大工学部助手福岡広行君に深く感謝する。