

(昭和 37 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

瞬間値が指数分布をなす不規則動揺の発現度

正員 真 鍋 大 覚*

Analytical Considerations on the "Exponential Distribution" from the
Viewpoint of Time Series TheoryBy Daikaku Manabe, *Member*

Summary

Probability density of the maxima of irregular oscillation, whose instantaneous values are distributed exponentially, forms an exponential distribution, and its cumulative value becomes also as well.

Such a type occurs in long-term record of voyage under various weather conditions during several months or several years.

The properties of this distribution are that the maximum frequency appears at the position of amplitude is zero, and that the critical maximum value is about twice as large as the mean value. The period of prominent high value is macroscopically almost constant.

1 緒 言

現在の時系列理論は、乱雑な動揺振幅の瞬間値が正規分布を成しているという仮定を基礎としているが、事実を徴して見ると、なるほど確かに正規分布であるときが最も頻度が高く普遍的平均的であることには違いないのではあるけれども、そうでないときも数は少ないが現われているのを知る。

本文ではこのような特殊の基準分布の中で、特に大きな振幅がかなり高い発現性を有するところの、動揺安全性の見地からは危険度の多いところの指数分布について行なつた研究結果をまとめておくことにする。

2 指数分布に対する極値の頻度

動揺振幅の各瞬間値の発現頻度をとつて見ると、一つは正規分布をなし他の一つは指数分布をなしている。すなわち動揺を $\xi(t)$ とし ξ と $\xi+d\xi$ 間の確率密度を $p(\xi)d\xi$ とすれば、前者は

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi^2} \exp - \frac{\xi^2}{2\xi^2}, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty \quad (1)$$

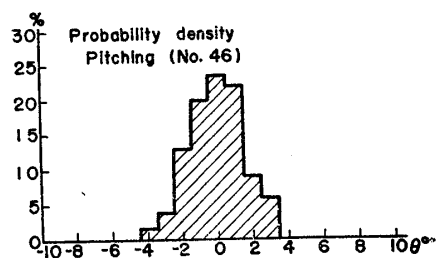
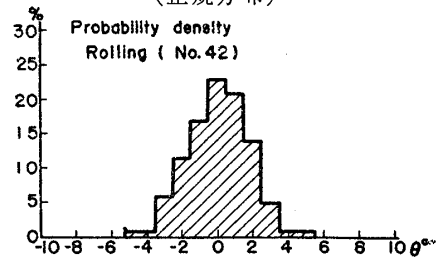
後者は

$$p(\xi) = \frac{1}{\xi} \exp - \frac{\xi}{\xi} \quad 0 \leq \xi \leq +\infty \quad (2)$$

ただし後者は対称性から ξ が負のときはその絶対値をとるかまたは負側を正側に折返して重ねたものを考えておく。

さて正規分布の場合は中心極限定理をさらに用いて、たとえば 3 個の自由度を有する正規分布についての確率度を

$$p(\xi, \xi', \xi'') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 M}} \exp - \frac{1}{2M} \{ M_{11}\xi^2 + M_{22}\xi'^2 + M_{33}\xi''^2 + 2M_{12}\xi\xi' + 2M_{23}\xi'\xi'' + 2M_{31}\xi''\xi \} \quad (3)$$

第1図 動揺瞬間値の頻度分布
(正規分布)第2図 動揺瞬間値の頻度分布
(指数分布)

原稿受付 昭和 36 年 12 月 14 日

* 九州大学工学部

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi'' \cdot p(\xi, \xi', \xi'') = 1 \quad (4)$$

ここに $M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{12}, M_{23}, M_{31}$ はつぎに述べる行列式 M から $\bar{\xi}^2, \bar{\xi'^2}, \bar{\xi''^2}, \bar{\xi\xi'}, \bar{\xi'\xi''}, \bar{\xi''\xi}$ の因子を除いたものであつて

$$M = \begin{vmatrix} \bar{\xi^2} & \bar{\xi\xi'} & \bar{\xi\xi''} \\ \bar{\xi'\xi} & \bar{\xi'^2} & \bar{\xi'\xi''} \\ \bar{\xi''\xi} & \bar{\xi''\xi'} & \bar{\xi''^2} \end{vmatrix} \quad (5)$$

同様に“指数則に従う乱雑な系を多数重複しても：それらは全体としてやはり指数分布を形成する”という原理が存在するものとして、前記三変数に対する確率密度は、いずれもその絶対値をとつて

$$p(\xi, \xi', \xi'') = \frac{1}{\bar{\xi} \bar{\xi'} \bar{\xi''}} \exp \left\{ -\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}} + \frac{\xi'}{\bar{\xi'}} + \frac{\xi''}{\bar{\xi''}} \right) \right\} \quad (6)$$

ということになるのである。

さて t と $t+dt$ の間を ξ' が正の勾配で通過するとき

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\xi'' \int_{\xi'-\xi''/at}^{\xi'} p(\xi, \xi', \xi'') d\xi' &= \int_0^\infty d\xi'' \left[\xi' \cdot p(\xi, \xi', \xi'') \Big|_{\xi'-\xi''/at}^{\xi'} - \int_{\xi'-\xi''/at}^{\xi'} \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} p(\xi, \xi', \xi'') d\xi' \right] \\ &= dt \int_0^\infty \xi'' d\xi'' p(\xi, \xi', \xi'') + 0. \end{aligned} \quad (7)$$

したがつて極値の場合 $\xi'=0$ とおけば、求めるところの確率密度関数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^\infty \xi'' d\xi'' p(\xi, \xi', \xi'') \div N_m \\ &= \frac{1}{\bar{\xi}} \exp -\frac{\xi}{\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに N_m は単位時間内に統計的に期待しうる極値の数である。

$$N_m = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty \xi'' d\xi'' p(\xi, \xi', \xi'') = \frac{\bar{\xi''}}{\bar{\xi'}} \quad (9)$$

極値の分布も指数分布となる特殊な性質が見出される。

$$x = \xi / \bar{\xi} \quad (10)$$

という無次元の値によつて、 x と $x+dx$ 間の確率密度を $p(x)dx$ とすれば

$$p(x) = e^{-x} \quad (11)$$

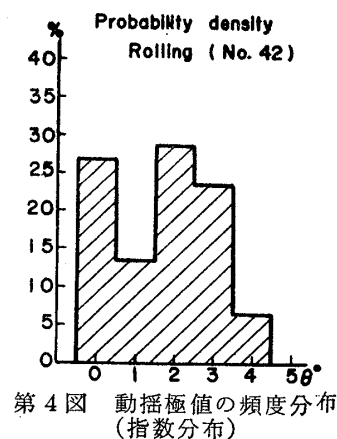
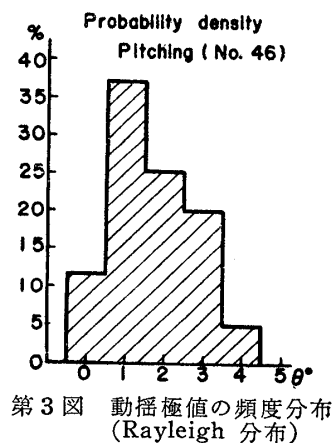
著者が既にしばしば用いた不規則度示数で $n=1$ の場合に該当するのがこの指数分布である。

x を超過する確率を $\varphi(x)$ とすれば

$$\varphi(x) = \int_x^\infty p(x) dx = e^{-x} \quad (12)$$

$$\log \varphi(x) = -x \quad (13)$$

すなわち積分確率もまた指数分布になつている。



m 乗平均値は

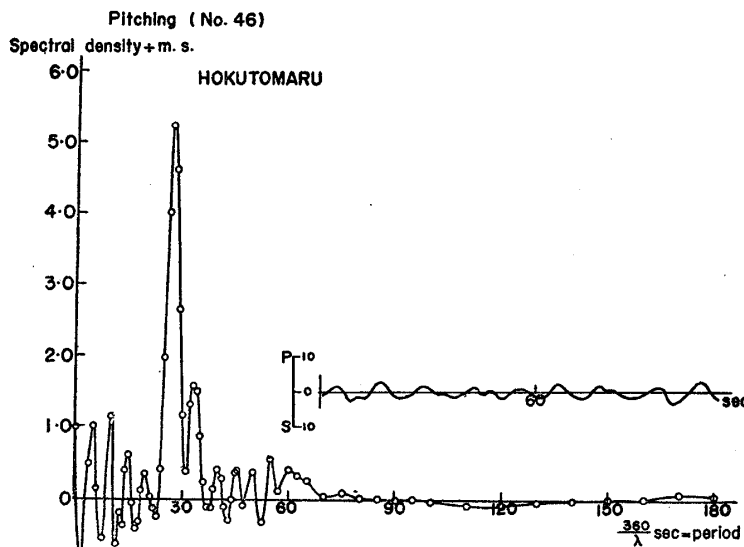
$$\bar{x}^m = \int_0^\infty x^m \cdot p(x) dx \div \int_0^\infty p(x) dx = \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = \Gamma(m+1) = m! \quad (14)$$

高い方からとつた全体の $1/q$ 平均 ($\infty \geq q \geq 1$) 値は

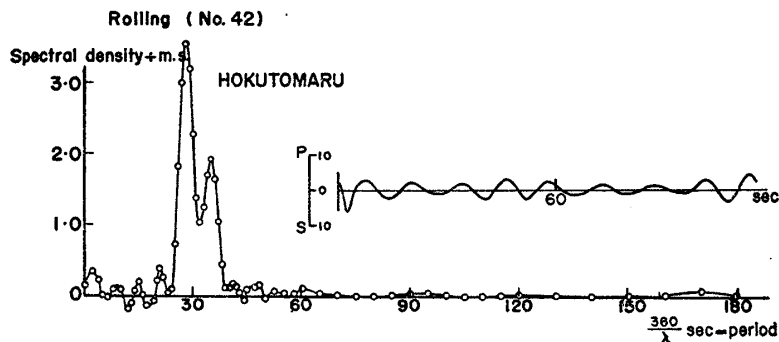
$$\frac{1}{q} = \varphi(x) \quad \therefore e^x = q, \quad x = \log q \quad (15)$$

$$\bar{x}(q) = \int_x^\infty x \cdot p(x) dx \div \int_x^\infty p(x) dx = (x+1)e^{-x} \div e^{-x} = x+1 = \log q + 1. \quad (16)$$

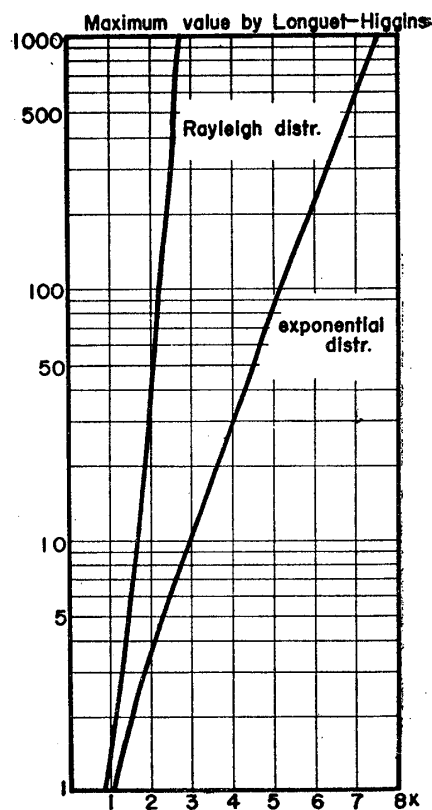
また Longuet-Higgins の定義による N 個の統計的最大値は



第5図 動揺記録とスペクトル分布 (正規分布)



第6図 動揺記録とスペクトル分布 (指数分布)



第7図 Longuet-Higgins の定義による統計的最大値

$$\bar{x}(N) = \int_0^\infty \left[1 - \left(\int_0^x p(x) dx \right)^N \right] dx = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-x})^N] dx \quad (17)$$

この積分は

$$1 - e^{-x} = e^{-z} \quad (18)$$

という変換を行なうと

$$\int_0^\infty \left[\left(\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{e^{-z}}{z} \right) + \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-(N+1)z}}{1-e^{-z}} \right) \right] dz = r + \psi(N+1) \quad (19)$$

ψ 函数表で数値を容易に求めることができる。 r は Euler の常数であつて

$$r = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\sum_{s=1}^s \frac{1}{s} - \log s \right] \quad (20)$$

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \sum_{s=1}^{z-1} \frac{1}{s} - r. \quad (21)$$

したがって次のような整然たる級数和で表現される。

$$\bar{x}(N) = \sum_{s=1}^N \frac{1}{s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \quad (22)$$

N の値がきめて大きいときには

$$Ne^{-x} = u \quad (23)$$

という変換によつて積分はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \cdot N(1-e^{-x})^{N-1} e^{-x} dx &= \int_0^N \exp\left\{(N-1)\log\left(1-\frac{u}{N}\right)\right\} \log \frac{u}{N} du \\ &\doteq \int_0^\infty e^{-u} (\log N - \log u) du = \log N + \gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

3 指数分布の限界値

短期ならびに長期の限界はつぎに述べるようなものと考えられる。この場合は Gauss-Laplace 分布あるいは

Rayleigh 分布のように極値も反曲点も無いのであるが、既述の考え方を多少観点をかえて応用して、まず短期の方は確率密度曲線上における傾斜角最大の条件から

$$x=0, \quad dp(x)/dx = -1, \quad p(x)=1. \quad (25)$$

これは最多頻度の位置であつて、ここにおける接線の足の座標は

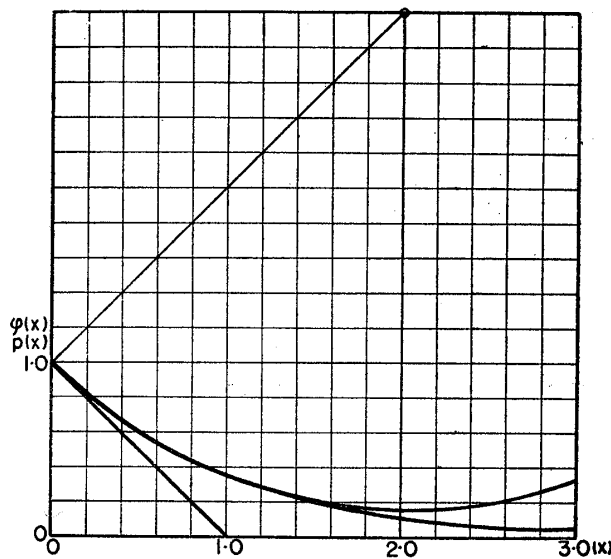
$$X = x - \frac{p(x)}{dp(x)/dx} = 1. \quad \therefore X = \bar{x} \quad (26)$$

すなわち全体の平均値に一致する。この値の発現度は

$$\varphi(x) = e^{-1} = 0.367 \doteq 0.333 = \frac{1}{3}$$

となつて全体の約 1/3 の位置に在る。偶然かも知れないが Sverdrup と Munk の有義平均に対応しているように思われる。この値を統計的に含む個数は

$$N = 1/\varphi(x) = e = 2.718 \doteq 3$$



第8図 指数分布の確率密度、積分確率、限界値

指数分布はその形状が前記二分布で極値と反曲点と接近した極限と見ることができから、前記の位置における曲率中心の横座標を考えると

$$X = x - \frac{d^2p(x)/dx^2}{dp(x)/dx} \left\{ 1 + \left(\frac{dp(x)}{dx} \right)^2 \right\} = 2 \quad (29)$$

すなわち平均値の2倍が限界となる。この発現度と相当個数は

$$\varphi(x) = e^{-2} = 0.135 \doteq 0.100 = 1/10 \quad (30)$$

すなわち約 1/10 平均という見当である。

$$N = 1/\varphi(x) = e^2 = 7.389 \doteq 8. \quad (31)$$

4 限界値と調波成分

不規則な動揺はスペクトルあるいはフーリエ解析を行つてその性質を調べるのであるが、成分振幅と限界値との間には統計的につぎのような関係が見出される。

すなわち調波成分をその成分振幅の大きさの順に配列して

$$\xi = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad C_1 > C_2 > \cdots > C_N \quad (32)$$

で表わすとき、確率密度関数は R を包絡線として

$$p(R) = R \int_0^\infty \prod_{n=1}^N J_0(C_n r) J_0(Rr) r dr \quad (33)$$

となる。 R の最大値は

$$\text{Max. } R = \sum_{n=1}^N C_n \quad (34)$$

すなわち成分各位相が完全に合致した瞬間である。

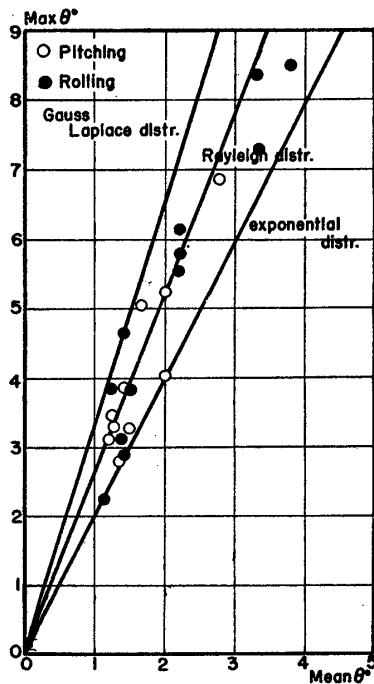
$$\omega_n t + \varphi_n = 0, 2\pi, \dots \quad n=1, 2, \dots, N \quad (35)$$

この $\text{Max. } R$ は $\text{Max. } \xi$ と同等のものであると考えておく。つぎに2乗平均値は

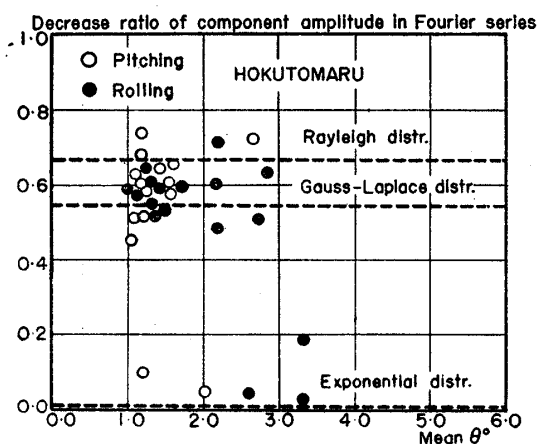
$$\text{Mean } \xi^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} C_n^2 \quad (36)$$

成分振幅 C_n ($n=1, 2, \dots, N$) の配列状態は多種多様であるがここではその平均的性質を総括的にまとめて、初項 C_1 、公比 r の無限等比級数と置けば $N \rightarrow \infty$, $C_N \rightarrow 0$ として

$$\frac{\text{Max. } \xi}{\{\text{Mean } \xi^2\}^{1/2}} = \frac{C_1/(1-r)}{\{1/2 \cdot C_1^2/(1-r^2)\}^{1/2}} = \sqrt{2 \frac{1+r}{1-r}} \quad (36)'$$



第9図 各種分布に対する限界値の観測値



第10図 各種分布に対する調波成分の減少比率

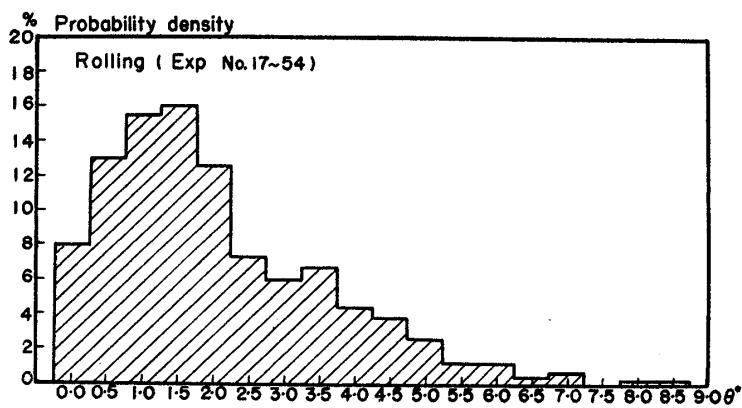
もし最大限界値を定義して、曲率半径最小の中心の水平距離とすれば、左辺の値は前述のごとく Gauss-Laplace 分布に対して 2.618, Rayleigh 分布に対して 3.170 であるから、これを基礎にして公比を算出すれば

$$r = 0.546 (\text{Gauss-Laplace}), 0.668 (\text{Rayleigh}) = 1/2 \sim 2/3. \quad (37)$$

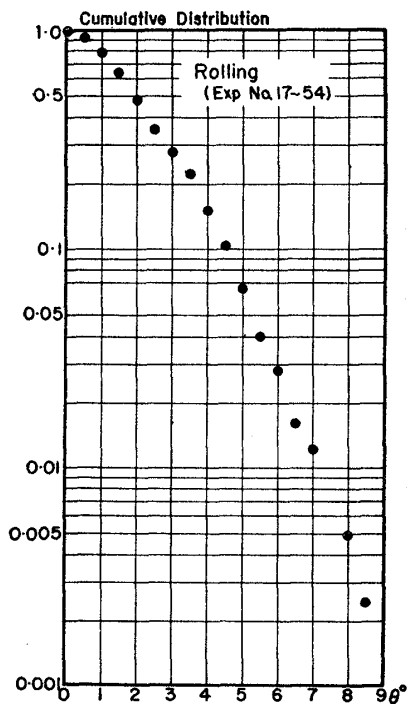
すなわち各成分振幅は約 1/2 の割合で減少していることになる。動揺スペクトルの一つ一つの山の面積を測つて調べて見ると上記の関係がほぼ成立していることを知る。

指数分布に対しては $2 \div \sqrt{2} = 1.414$ であるから

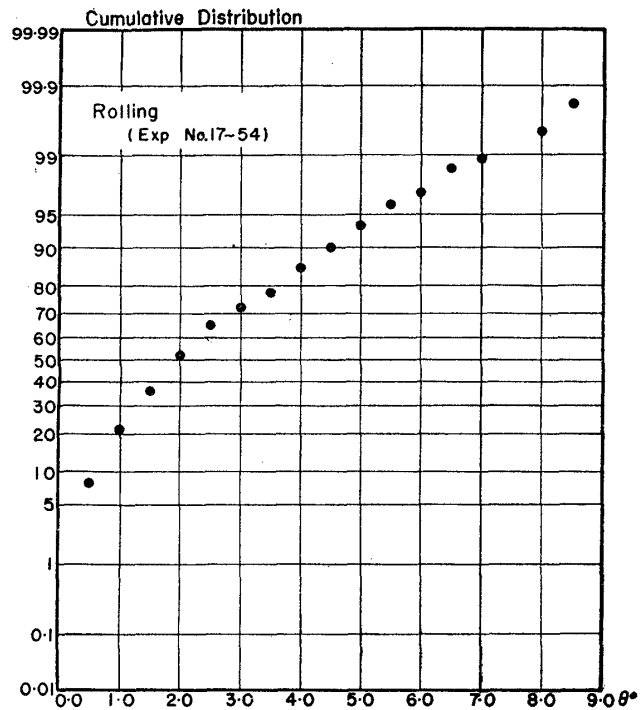
$$r = 0 \quad (38)$$



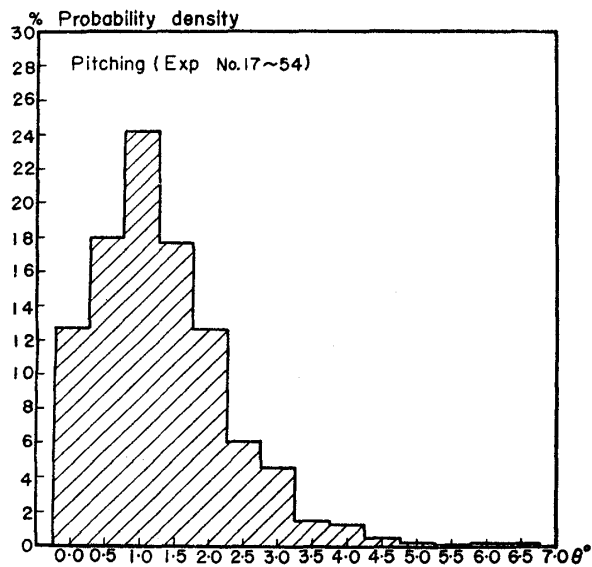
第11図 各種気象状況下における横揺の頻度の合成値



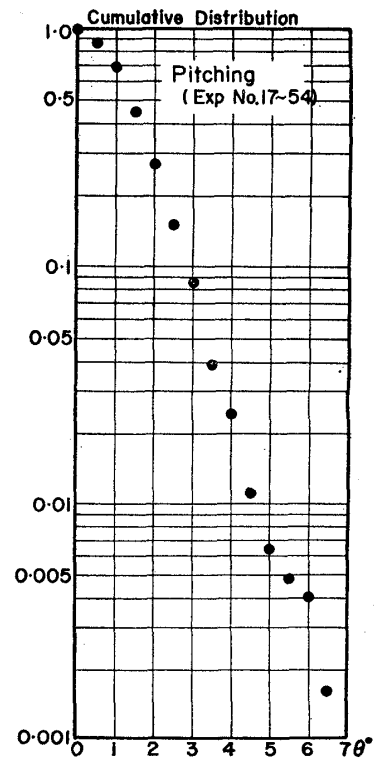
第12図 各種気象状況下における横揺の積分確率の合成値 (片対数方眼紙)



第13図 各種気象状況下における横揺の積分確率の合成値 (確率方眼紙)

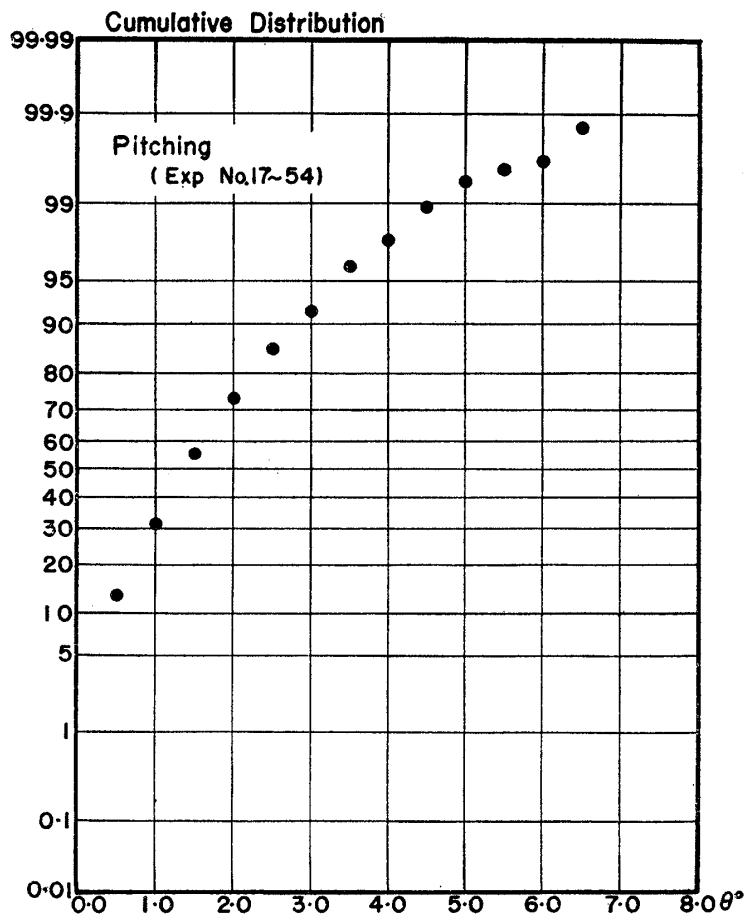


第14図 各種気象状況下における縦揺の頻度の合成値



第15図 各種気象状況下における縦揺の積分確率の合成値 (片対数方眼紙)

これは単一調波である。つまり微少振幅を包絡線的に濾過すれば残りの目立つ大きな振幅はきわめて週期的に発現することを示している。長年の航海記録を例にとれば動揺の大小と暴風発生の盛衰とが季節の年変化に正しく対応しているのがこれである。



第16図 各種気象状況下における縦揺の積分確率の合成値
(確率方眼紙)

5 結 言

船舶の動揺安全性の見地からは、ある所定の気象状況の下における平均的動揺角の他に、長い航海中にいつかは遭遇するものと統計的に推定される限界動揺角が数年間の観測実績から算出できれば、緊急の場合にも十分対処することが可能となる。この基礎になるかなり長期の動揺記録は多種多様の気象状況下の測定を集積となるのであるが、平穏な毎日の間に暴風が時折現われるものであれば、微小振幅の頻度はきわめて高く、しかもかなり大きな振幅もよく現われるところの指数分布の型式をとることが多い。もつとも観測値の数が莫大で統計的整理が困難のために、適当な間隔に区切つてその中での最大値を選出した後、これらで改めて頻度分布をつくればそれは Rayleigh 分布から Gauss-Laplace 分布に漸近するのであるが、それはとにかくこの型式はきわめて簡素かつ基本的であつてこれを時系列理論的に考察すれば以上のような諸結果に到達したのである。

解析や調査に際して御高見御示教を賜つた水品船舶局長、淵海洋課長、荒川数理予報部長をはじめ気象庁海上観測課の諸氏には深厚の謝意を表わすものである。

(昭和 36 年 11 月 22 日)

参 考 文 献

- 1) 著者“統計的最大値について”九大工学集報 第31巻第1号 昭和33年6月 pp.36~41.
- 2) R.Bennet “Stress and motion measurements on ships at sea” European Shipbuilding Vol.8, No. 5~6, 1959, pp.134~145. “波浪中の船体応力の頻度分布”造船協会誌 第373号 昭和35年10月 pp.25~32 訳出。