

(昭和 38 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

薄い帯板の面内塑性曲げについて

正員 辻 勇*

On the Plastic Bending of a Thin Strip in its Plane

By Isamu Tuzi, *Member*

Summary

The problem of pure bending of a thin strip in its plane is treated as one of generalized plane stress for a strainhardening rigid plastic material. The method is based upon the deformation theory of plasticity, and the material is assumed to follow the yield condition of von Mises. The solution can be obtained solving a basic non-linear differential equation numerically. Especially for the rigid perfectly plastic material, a heuristic solution is found in closed form. Some numerical results are presented and approximate expressions for stress and strain distributions are derived. These results are compared with experimental measurements.

Consequently, it is shown that the effect of any strainhardening characteristic on the strain distribution is very small, but is large on the stress distribution and the foregoing analysis is useful for practical purpose.

1 緒 言

船体を構成する部材の中には薄い帯板をその面内に塑性的に曲げて成型する物が少なくないが、このような条材の曲げ加工ではその加工法や成型限度がしばしば問題となるのであって、このために曲げ加工時における部材の応力や歪の状態を明らかにする必要があることはいうまでもない。このような問題に関する基礎的研究として本論文では矩形断面を有する薄い板が板面内に働く曲げモーメントにより塑性的に曲げられる場合を取り扱う。板の厚さは他の寸法に比して十分小なるものとすれば厚さ方向の応力を無視して一般化された平面応力問題とみなす事ができる。このような問題についてこれまでに逐次近以法による解¹⁾や線型の降伏条件を用いた解^{2),3)}が得られているが、これらはいずれも材料の加工硬化を無視した完全剛塑性体に関するものである。最近、H. Lippmann⁴⁾により断面の変形を考慮し適当な加工硬化法則を導入した解が、von Mises の降伏条件および Tresca の降伏条件を塑性ポテンシャルとした歪増分理論を用いて電子計算機により求められており、現状では最も妥当な理論的立場にもとづいた解であると考えられるけれどもほとんど全面的に数値解法によらねばならず計算精度を増すためには膨大な計算を必要とする難点がある。

この論文では以上のことを考慮し実用的に十分な近似の範囲において塑性曲げの進行に伴う歪および応力の分布、断面形状の変化、中立軸の移動等を明らかにする目的で von Mises の降伏条件を採用した場合の全歪理論による解析を行ない実験結果との比較考察を行なった。

2 基礎仮定並びに基礎関係式

2.1 基礎仮定

以下においては記述を簡単にするために帯板を梁、板厚を梁幅、板幅を梁高と呼ぶことにする。

(1) 最初幅 w_0 、高さ t_0 であった矩形断面梁が端面に働く一様な曲げモーメント M によって Fig. 1 に示

原稿受付 昭和 38 年 6 月 15 日

* 九州大学工学部

す状態に曲げられるものとし*, 梁は十分長く歪および応力はその長さ方向に一様に分布するものとする。従ってある変形の状態に対して求めんとする諸量はすべて曲率中心 O からの距離 r のみの関数として表わされる。また Fig. 1 に示す如く曲げられた状態での内, 外面および中立面(伸びなしの面)の曲率半径をそれぞれ a, b, ρ , 梁高を t , 任意の位置における梁幅を w . 応力および歪を σ, ε で表わしその半径方向, 円周方向, および幅方向の成分には r, θ, z なる添字を附することとする。

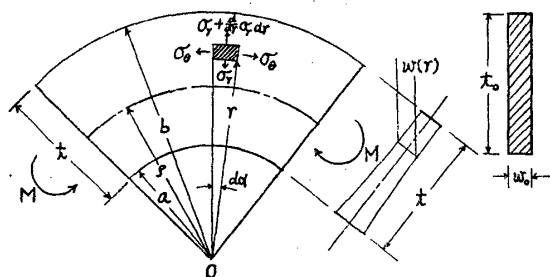


Fig. 1 Geometry of Bent Strip by End Couples.

(2) 梁幅は他の寸法に比べて小で, 幅方向の応力成分は無視できるものとする。

(3) 曲げモーメント M は断面全体が塑性域となる如く十分大なるものとし歪の弾性成分を無視する。即ち材料は剛塑性体であると仮定する。

(4) 塑性変形は体積不変のもとに生じ, 全変形過程を通じて材料は等方性を保つものとみなす。また部材の

塑性座屈, 局部収縮, 破壊等は考慮しない。

2.2 釣合方程式

仮定(1)によって半径方向応力 σ_r および円周方向応力 σ_θ は主応力となるから, Fig. 1 において中心角 $d\alpha$, 半径 r および $r+dr$ によって切り取られる微小扇形部分に働らく力の半径方向成分の総和を求め, これを 0 に等しいとおいて 2 次以上の微小量を省略し整理すれば次のような釣合方程式が得られる。

$$\frac{d(w\sigma_r)}{dr} = \frac{w(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r} \quad (1)$$

2.3 歪の定義式

最初 l_{j0} なる長さであった微小要素が変形のある段階において l_j になったとすれば全歪理論ではこの状態における歪は次式で定義せられる。

$$\varepsilon_j = \ln \left(\frac{l_j}{l_{j0}} \right) \quad (j=r, \theta, z) \quad (2)$$

(2) 式はいわゆる対数歪の定義式であってこれが成立する条件はまた全歪理論が正当性を持つ条件でもある。以下では歪成分 ε_j は対数歪を表わし, 通常の工学歪成分は $\bar{\varepsilon}_j$ で表わすことにすれば両者の間には次の関係がある。

$$\varepsilon_j = \ln(1 + \bar{\varepsilon}_j) \quad (j=r, \theta, z) \quad (3)$$

(2) 式を各歪成分について書き下せばこの場合次のようになる。

$$\varepsilon_\theta = \ln \left(\frac{r}{\rho} \right) \quad (4)$$

$$\varepsilon_r = \ln \left(\frac{dr}{dr_0} \right) \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \ln \left(\frac{w}{w_0} \right) \quad (6)$$

これらの式は, また変形の幾何学的考察から歪増分の積分として直接導くこともできる。

2.4 加工硬化を考慮した降伏条件

本論文では材料の降伏条件として von Mises の条件を用い次のように等価応力 σ_{eq} および等価歪 ε_{eq} を定義する。

$$\sigma_{eq} = (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2)^{1/2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2)^{1/2}} \quad (8)$$

弾性歪を無視したことによって塑性歪は全歪となり体積一定の条件は次のように表わせる。

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \quad (9)$$

* 全歪理論に従がい剛塑性体に関する停留原理を用いれば, この場合梁の横断面は平面のままに回転し円周方向の歪は直線分布をすることが導かれる⁵⁾。

さて σ_{eq} と ε_{eq} との間には単軸引張試験における真応力と塑性歪の関係に等しい関数関係が成り立つものと考えこれを近似的に次式で表わす。

$$\sigma_{eq} = \sigma_e + \lambda \varepsilon_{eq}^m \quad (10)$$

但し σ_e は材料の初期降伏値を、 λ および m は加工硬化特性を表わす材料常数で $1 \geq m \geq 0$ とする。

2.5 応力-歪関係式

全歪理論では塑性歪と偏差応力との間に1対1の対応関係があると考え。この関係を通常の主応力、主歪成分を用いて表わせば次のようになる。

$$\frac{\varepsilon_r}{2\sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{\varepsilon_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} = \frac{\varepsilon_z}{-(\sigma_r + \sigma_\theta)} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} \quad (11)$$

(11)式には体積一定の条件が暗に含まれている。

2.6 基礎方程式

(6)式を用いて(1)式から w を消去し、得られた関係式から次に(4)、(11)式を用いて ε_z を消去すれば次のような基礎方程式が得られる。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} + \sigma_r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \cdot \ln \left(\frac{r}{\rho} \right) \right\} \quad (12)$$

(12)式を降伏条件(7)式と連立させて解くことがさしあたっての問題である。

3 基礎方程式の解法

3.1 基礎微分方程式

ここで以下の解析に便なる如く次のような無次元化を行なう。

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_e} = R \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_e} = \Theta \quad \frac{\lambda}{\sigma_e} = \bar{\lambda} \quad \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_e} = \bar{\sigma}_{eq} \quad \frac{r}{\rho} = X \quad (13)$$

とおけば降伏条件(7)式、応力歪関係式(11)および基礎方程式(12)は次のように書き改められる。

$$\bar{\sigma}_{eq} = (R^2 - R\Theta + \Theta^2)^{1/2} \quad (14)$$

$$\frac{\varepsilon_r}{2R - \Theta} = \frac{\varepsilon_\theta}{2\Theta - R} = \frac{\varepsilon_z}{-(R + \Theta)} = \frac{\varepsilon_{eq}}{2\bar{\sigma}_{eq}} \quad (15)$$

$$\frac{dR}{dX} = \frac{\Theta - R}{X} + R \frac{d}{dX} \left\{ \frac{R + \Theta}{2\Theta - R} \cdot \ln X \right\} \quad (16)$$

よく知られている如く θ をパラメーターとして

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_{eq} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\ \Theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_{eq} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とおけば降伏条件(14)式は恒等的に満足される。さらに又

$$\left. \begin{aligned} 2\Theta - R &= 2\bar{\sigma}_{eq} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\ \Theta - R &= \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_{eq} \cdot \cos \theta \\ \Theta + R &= 2\bar{\sigma}_{eq} \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

等々の関係が成立する。(15)式と(18)式の最初の関係を用いれば

$$\varepsilon_\theta = \ln \left(\frac{r}{\rho} \right) = \varepsilon_{eq} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \quad (19)$$

となり(10)式と(19)式によって、無次元化した等価応力 $\bar{\sigma}_{eq}$ は次のように表わされる。

$$\bar{\sigma}_{eq} = 1 + \bar{\lambda} \left\{ \frac{\ln X}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)} \right\}^m \quad (20)$$

そこで(16)式にまず(18)式の関係代入し、さらに(17)の第1式および(20)式を X に関して微分して得られた関係を代入して若干の整理を行えば、結局 θ と X との関係を表わす次の微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dX} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \bar{\Theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{X \cdot \left[\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \left\{ \frac{\ln X}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \right\} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \bar{\Theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right\} \right]} \\ \text{ただし } \bar{\Theta} &= \frac{\bar{\lambda} m \left\{ \frac{\ln X}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \right\}^{m-1}}{1 + \bar{\lambda} \left\{ \frac{\ln X}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \right\}^m} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21)式を解くに当って必要な境界条件は梁の内、外面 $r=a$ および $r=b$ において $\sigma_r=0$ となるべきことから定められる。すなわち(17)式によって境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{a}{\rho} \text{ にて } R=0 \quad \bar{\Theta} = -\bar{\sigma}_{eq} \quad \theta = -\frac{5}{6}\pi \\ X = \frac{b}{\rho} \text{ にて } R=0 \quad \bar{\Theta} = +\bar{\sigma}_{eq} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22)式の $R, \bar{\Theta}$ の符号と釣合方程式を考慮すれば、全領域で $R \leq 0$ でなければならず従って θ の変域は $-\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ を満足するように選ばれる。

3.2 非加工硬化材

加工硬化はないものとし(20)式にて $\bar{\lambda}=0$ とおけば(21)式は次のように簡単になる。

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \frac{1}{X \cdot \left\{ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \ln X \right\}} \quad (23)$$

ここで $\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \right\} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$ なることに注意すれば(23)式は解析的に積分できて解は次のようになる。

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \ln X - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = C \quad (24)$$

ただし C は積分常数で境界条件は $\bar{\sigma}_{eq}=1$ とおけば(22)式がそのまま成立する。従って積分常数 C は次の如く決まる。

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) = C = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{a}{\rho}\right) \quad (25)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) &= -\ln\left(\frac{a}{\rho}\right) \\ \rho &= \sqrt{ab} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

なる関係が得られる。これは塑性曲げ理論で良く知られている関係である。(24)式に(25)式を代入すれば

$$\ln X = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \ln\left(\frac{a}{\rho}\right) \right\} \quad (27)$$

となりこれから X と θ の関係が完全に決まる。 $X=1$ 即ち中立面の位置に相当する θ の値は(27)式で $\ln X=0$

とおけば $\theta = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{a}{\rho} \right) \right\} + n\pi$ となり θ の可能な変域と $X=1$ における σ_r の連続条件から $n=0$ および $n=-1$ がこれらを満足するものであることが分る。よって θ の変域は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq X \leq \frac{b}{\rho} \text{ にて } & \frac{\pi}{6} + \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{a}{\rho} \right) \right\} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ 1 \geq X \geq \frac{a}{\rho} \text{ にて } & -\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq -\frac{5}{6}\pi - \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{a}{\rho} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

一般に θ は $X=1$ にて不連続となり σ_θ もまたこの点で不連続となる。これは平面応力状態における Mises の楕円を考えれば明らかなことである。

3.3 線型硬化材

線型硬化材と考えて $\bar{\lambda} \neq 0$, $m=1$ とおけば(21)式は次のようになる。

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda} \left\{ \frac{\ln X}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)}{X \cdot \left[\cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \left\{ \frac{\ln X}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda} \left\{ \frac{\ln X}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right]} \quad (29)$$

この場合(29)式の解は数値積分法によって求めなければならない。(29)式にて $X \rightarrow 1$ なる極限を考えれば

$$\lim_{X \rightarrow 1} \frac{d\theta}{dX} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \bar{\lambda} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)}$$

となり $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \neq 0$ なる限り $\frac{d\theta}{dX}$ は有限で $X=1$ に対応する θ の有限確定値が存在する。

また(22)式によれば $X = \frac{a}{\rho}$ および $X = \frac{b}{\rho}$ にて $\sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = 0$, $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \pm 1$ であるから一般に(21)式は両境界面において次のようになる。

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{\sqrt{3}/2}{X} \quad (30)$$

これを積分して(22)式の境界条件を満足するように積分常数を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{a}{\rho} \text{ にて } & \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{X}{a/\rho} \right) - \frac{5}{6}\pi \\ X = \frac{b}{\rho} \text{ にて } & \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{X}{b/\rho} \right) + \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となる。(31)式は(21)式の両境界面近傍における第一近似解である。

(29)式の数値積分は Milne の方法⁶⁾ によったがこの方法では境界値のほか X に関して等間隔に配置された3つの出発値を必要とする。これは(31)式を第一近似解として Picard の反復代入法を用いれば、いくらでも正確な値を容易に決定する事ができる。さて一つの境界値 $\left(X = \frac{a}{\rho}, \theta = -\frac{5}{6}\pi \right)$ と上述の方法で定めた3つの出発値を用いて Milne の方法により積分を進行すれば、この場合にはすでに説明した如く $X=1$ に対応してある θ の有限確定値 θ_1 を数値的に求めることができる。しかしこの点で θ は不連続となるので $X=1$ において新しい境界値 θ_2 を決定しなければならない。即ち θ の可能な変域内において $X=1$ における σ_r の連続条件 $\sin \left(\theta_1 - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(\theta_2 - \frac{\pi}{6} \right)$ を満足するような θ_2 を決定し $(X=1, \theta=\theta_2)$ を改めて境界値として積分を進行し、 $\theta_2 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ に対応して $1 \leq X \leq \frac{b}{\rho}$ となるような一方の X の境界値 $X = \frac{b}{\rho}$ を求める事ができる。このようにして求めた $\frac{a}{\rho}$ および $\frac{b}{\rho}$ は、後に述べる数値計算の結果によって明らかになることであるが常に数値計算の誤差の範囲内で(26)式の関係満足していることが知られた。従って実際の計算を行なう場合にはある与えられた変形状態 $\frac{a}{\rho}$ に対して(26)式から $\frac{b}{\rho}$ を定め $\left(X = \frac{a}{\rho}, \theta = -\frac{5}{6}\pi \right)$, および $\left(X = \frac{b}{\rho}, \theta = \frac{\pi}{6} \right)$ をそれぞれ境界値として

積分計算を行なえば良いのである。

3.4 指数硬化材

この場合は $1 > m > 0$, $\bar{\lambda} \neq 0$ であって(21)式をそのまま数値積分する必要がある。しかし(21)式で $X \rightarrow 1$ としたその極限を考えると $\lim_{X \rightarrow 1} \frac{d\theta}{dX} = \infty$ となり $X=1$ において θ の値は不定となる。これは指数硬化材とみなすと $\varepsilon_{eq} \rightarrow 0$ なる極限において加工硬化曲線の切線係数が ∞ になるという特異性にもとづくことである。しかしこの場合にも(26)式の関係が成立するものとして3.3で述べた数値積分の手法をそのまま用い、 $X=1$ に十分近い所で計算を止めれば実際問題として解を得る妨げにはならない。即ち指数硬化材では $X=1$ に限りなく近づくにつれて θ , 従って σ_r は不定となるのであるが $X=1$ の極めて近傍を除外して $X \sim \theta$ の関係を求めこれから σ_r を計算して得られた値を結ぶ曲線を $X=1$ まで極く僅か延長すれば $X=1$ における σ_r の値は事実上一致する。従って実際問題としては加工硬化の特性いかににかかわらず(26)式の関係は一般的に成立つものと考えて良いのである。

4 曲げによる変形の解析

前節において応力状態を規定するパラメーター θ と変形後の場所を規定する変数 $X = \frac{r}{\rho}$ との関係は基礎微分方程式(21)を解いて求められ、非加工硬化材については解析的に導かれる関係(26)式が他の硬化特性を有する材料に対しても一般的に適用されることを明らかにした。(26)式は

$$\frac{a}{\rho} = \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{-1/2} \quad (32)$$

と書くことができるから以後の解析では変形状態を規定する変数として変形後の梁高 t と内面の曲率半径 a との比 t/a を用いる。 t/a を与えれば(32)式より直ちに a/ρ が定まるから前述の如く X と θ の関係が全領域に対して決定され、従って(20)式より任意の点 X に対する σ_{eq} の値が定まり、(17)式より無次元化された応力、 R , Φ の値が定まる。応力-歪関係式(15)を(18), (19)式を使って書き改めれば

$$\frac{-\varepsilon_r}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\varepsilon_\theta}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-\varepsilon_z}{\sin\theta} = \varepsilon_{eq} = \frac{\ln X}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (33)$$

となりこれによって任意の点 X における歪成分の値がすべて求められる。通常の工学歪に換算するには(3)式の関係を使えば良い。

変形後の梁高 t は未知であるがこれは次のようにして求められる。変形前の梁の単位長さ当りの体積を V_0 とすれば

$$V_0 = w_0 t_0 \quad (34)$$

である。また変形後のそれを V とすれば

$$V = \int_a^b w \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right) dr = w_0 \int_a^b e^{\varepsilon_z} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right) dr \quad (35)$$

である。体積不変の仮定によって $V = V_0$ であり、(9)式の関係を使えば

$$\frac{t_0}{\rho} = \int_{X=\frac{a}{\rho}}^{X=\frac{b}{\rho}} e^{\varepsilon_z} \cdot X dX = \int_{X=\frac{a}{\rho}}^{X=\frac{b}{\rho}} e^{-\varepsilon_r} dX \quad (36)$$

となる。さらに(36)式を(32)式を用いて変形すれば

$$\frac{t}{t_0} = \frac{t/a}{(1+t/a)^{1/2} \cdot \int_{X=\frac{a}{\rho}}^{X=\frac{b}{\rho}} e^{-\varepsilon_r} dX} \quad (37)$$

となりこれによって任意の変形状態 t/a に対して梁高 t を計算することができる。

曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = \int_a^b w \cdot \sigma_\theta r dr = w_0 \int_a^b e^{\varepsilon_z} \cdot \sigma_\theta \cdot r dr \quad (38)$$

実際の計算に便利のように(38)式を無次元化すれば

$$\frac{M}{w_0 t_0^2 \sigma_e} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{t}{a} \right) \int_{x=\frac{a}{\rho}}^{x=\frac{b}{\rho}} e^{sz} \cdot \Theta \cdot X dX \quad (39)$$

となる。(36), (37), (39)式の右辺の計算は図式積分または数値積分によらねばならない。以下に述べる数値計算では Simpson の方法によった。なおここではモーメントのみを考えているから

$$F = \int_a^b w \cdot \sigma_\theta dr = 0 \quad (40)$$

となるべき事は明らかで(40)式は数値計算結果の check に用いられる。

5 数値計算結果とその考察

5-1 材料常数の決定

基礎微分方程式の積分を行なうためには加工硬化特性を表わす材料常数 σ_e , λ , m 等の値を決定する必要がある。方程式の解に直接関係するのは m と $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma_e}$ の二つである。Fig. 2 は通常の構造用圧延鋼板(板厚 15 mm)より試料を切り出し 920°C で一時間焼鈍せる後、直径約 10 mm, 平行部の長さ約 50 mm の丸棒試験片に仕上げ引張試験を行なって真応力と塑性歪の関係求めたものである。図中の実線は指数硬化材とみなして $m=0.43$, $\lambda=61.6 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_e=19.0 \text{ kg/mm}^2$ とした場合、鎖線は線型硬化材とみなして $m=1$, $\lambda=61.6 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_e=34.9 \text{ kg/mm}^2$ とした場合の加工硬化曲線を示している。指数硬化材とみなしこのような材料常数値を採れば塑性歪の小さい範囲を除いて比較的良く実験結果を近似し得ることが分る。以下の計算ではこれらの値を使用した。

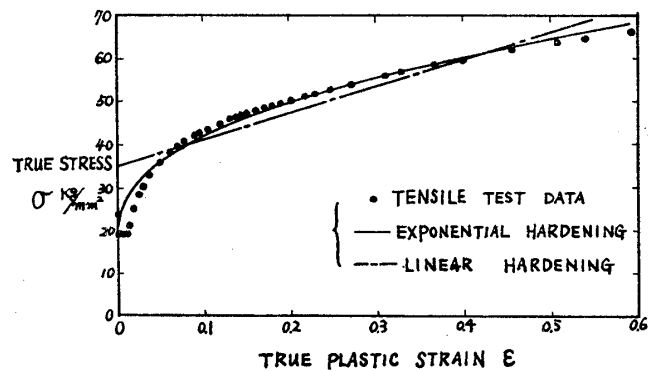


Fig. 2 Strain-Hardening Characteristics (0.2% C Mild Steel Tensile Test)

5-2 指数硬化材とみなした場合

σ_{eq} と ε_{eq} の間に単純引張試験で示されたような指数硬化関係が成り立つものとして計算した結果について述べる。数値計算は $t/a=0.1, 0.3, 0.5$ および 1.0 の4つの場合について行なった。Fig. 3 は円周方向の工学

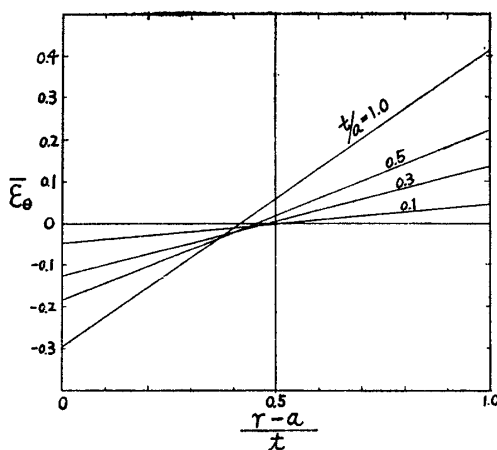


Fig. 3 Distribution of Circumferential Strain on Bent Cross Section

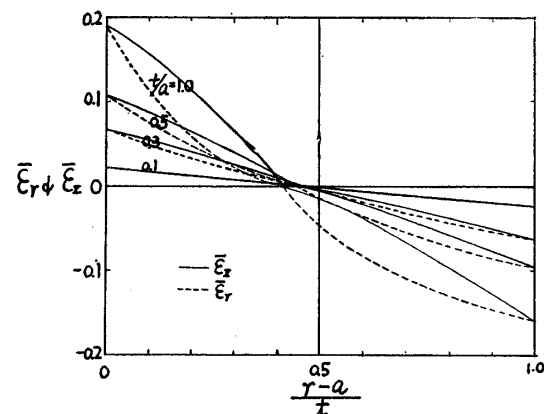


Fig. 4 Distribution of Radial & Lateral Strain on Bent Cross Section.

歪 $\bar{\varepsilon}_\theta$ の, Fig. 4 は半径方向および幅方向の工学歪 $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_z$ の横断上の分布を示したもので横軸に変形後の横断面上の位置を示す変数 $\frac{r-a}{t}$ をとっている。真歪で考えれば内、外面 $r=a$ および $r=b$ における ε_θ は絶対値等しく符号反対で $\varepsilon_r, \varepsilon_z$ の値は対応する点の ε_θ の符号を逆にしたものの $1/2$ に等しい。これは (26) および (33) 式より明らかなことである。 $\bar{\varepsilon}_r$ と $\bar{\varepsilon}_z$ の分布の相違は変形の増大と共に著しくなる。Fig. 5 および Fig. 6 は Θ

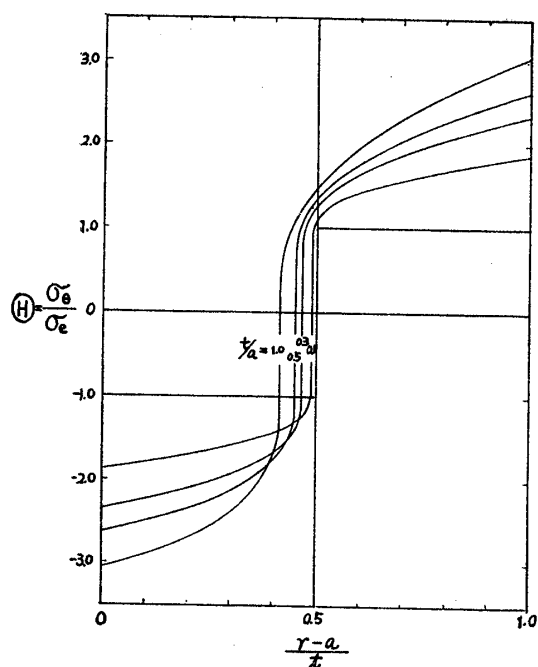


Fig. 5 Distribution of Non-dimensionalized Circumferential Stress on Bent Cross Section.

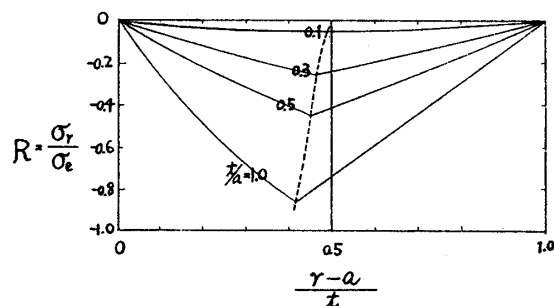


Fig. 6 Distribution of Non-dimensionalized Radial Stress on Bent Cross Section.

および R の横断面上の分布を図示したものである。Fig. 5 によれば曲げの進行に伴って中立面の近傍では除荷を生ずることが明らかで、従ってこの近傍では応力比が複雑に変わり全歪理論の仮定が厳密には成り立たなくなることが分る。しかし中立面の移動量は比較的小さいので、この近傍における解はその妥当性を欠くとしても全体の応力分布に及ぼす影響はさほど大きくはないと考えて良いであろう。

Fig. 7 は半径方向の歪分布を積分して求めた梁高の変化率 t/t_0 を、Fig. 8 は中立面の位置 $\frac{\rho-a}{t_0}$ を、いずれも横軸に曲率 t_0/a をとって表わしたものである。こ

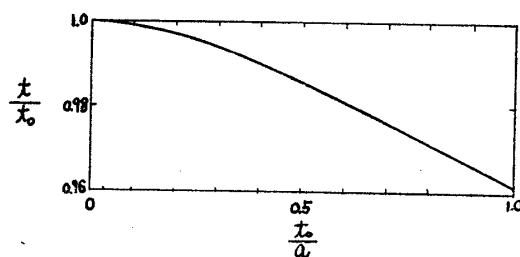


Fig. 7 Height Change during Bending

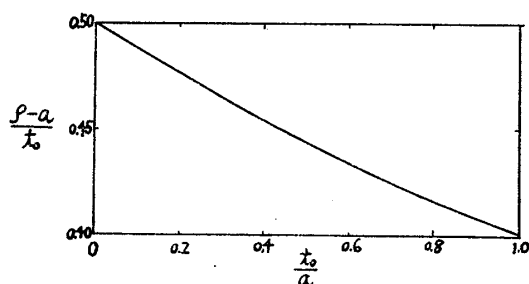


Fig. 8 Change in Position of Neutral Axis during Bending.

これらの図から曲げの進行に伴って梁高は僅かではあるけれども次第に減少し、最初中央面にあった中立面は次第に内方に移動することが知られる。

Fig. 9 は無次元化した曲げモーメントと曲率の関係を示すもので図の実線は指数硬化材として計算した結果である。参考までに非硬化材として計算した結果が点線で記入してある。いずれの場合にも $t_0/a=0$ に対して良く知られているように $\frac{M}{w_0 t_0^2 \sigma_e} = \frac{1}{4}$ となる。指数硬化材では変形の初期における曲げモーメントの増加が著しいが、 t_0/a の値がほぼ 1 の程度に達すれば曲げモーメントはほぼ一定となり、さらに変形が大となれば漸次減少して最大値を有する点のあることが考えられる。もちろんこの曲線の形状は加工硬化特性のいかんによって当然異なり得るものである。非硬化材では曲げの進行に伴って曲げモーメントは一様に減少し常に不安定平衡状態にあることが分る。これは曲げの進行に伴って梁高が減少する事によるものである。

5.3 加工硬化特性の影響

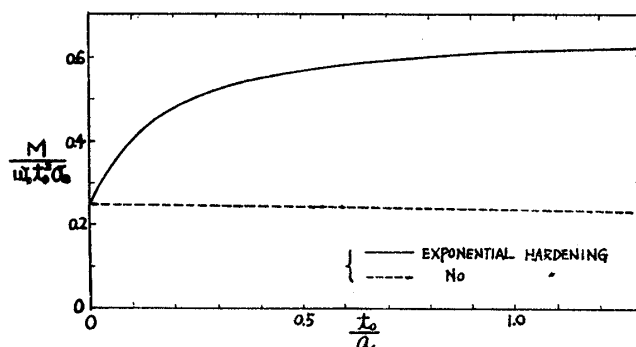
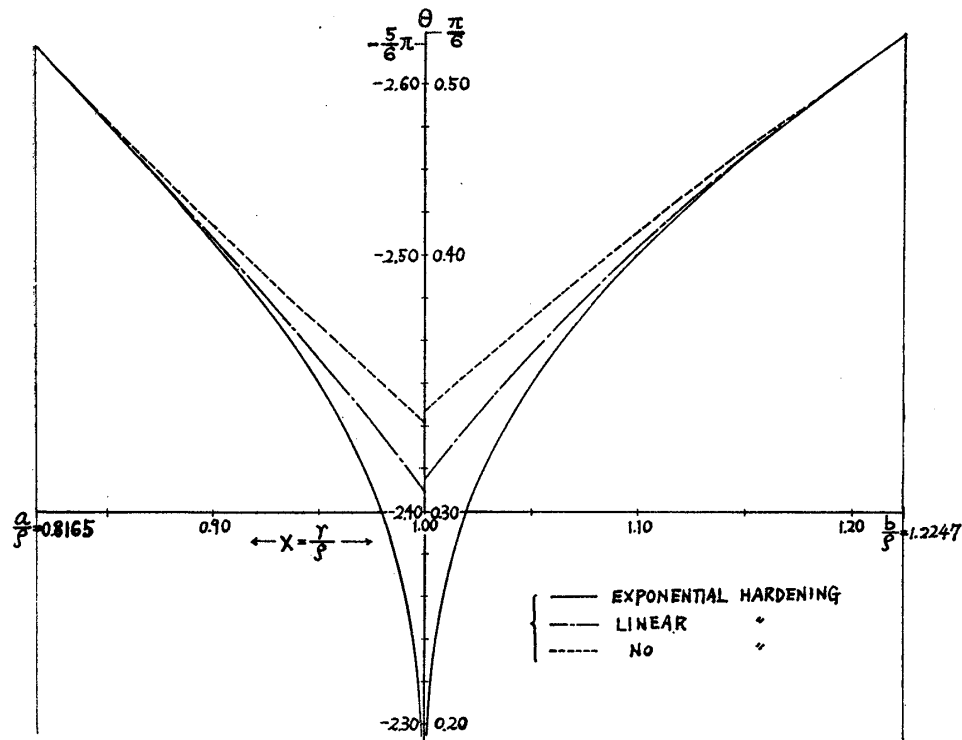
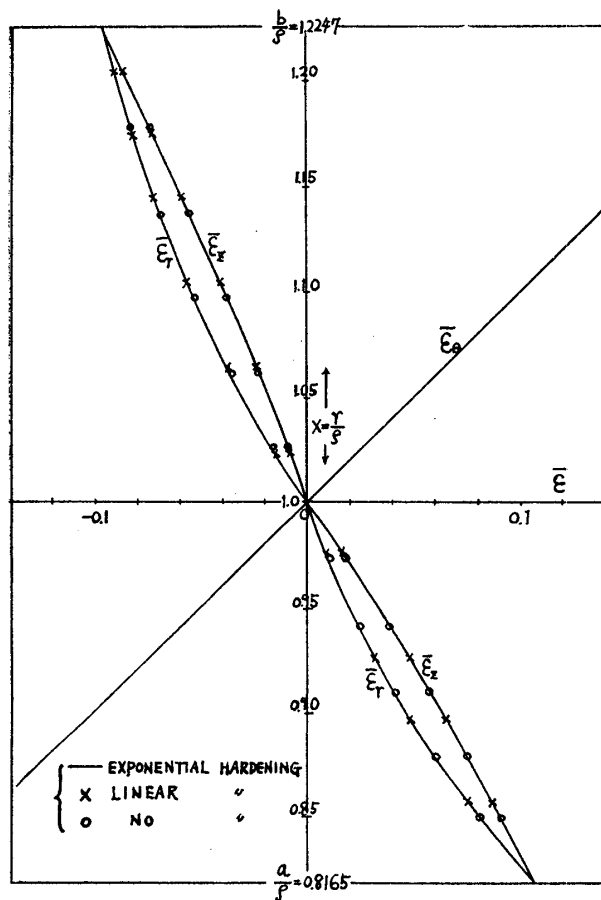


Fig. 9 Relation between Bending Moment and Curvature.

Fig. 10 Effect of Strain-Hardening Characteristic on $\theta \sim X$ Relation. $t/a=0.5$ Fig. 11 Effect of Strain-Hardening Characteristic on Strain Distribution $t/a=0.5$

加工硬化の特性いかに応力や歪分布に及ぼす影響は(21)式の解である θ と X の関係によって決まることである。そこでこの影響を調べるために一例として $t/a=0.5$ の場合について非硬化材線型硬化材、および指数硬化材とみなした場合の計算を行ない、その結果を Fig. 10 に示した。Milne の方法による積分のきざみは $dX=0.02$ としたが $X=1$ の近傍ではさらに細かくする必要がある、このような場合には Runge-Kutta 法を併用した。図から明らかな如く θ と X の関係は $X = \frac{a}{\rho}$ および $X = \frac{b}{\rho}$ の近傍では三者共ほぼ同一であるが、 $X=1$ に近づくにつれてその相違が大となり指数硬化材では既に説明した如く $X \rightarrow 1$ なるにつれて θ は不定となる。また前述の境界面近傍における近似解(31)式を図示すれば Fig. 10 の非硬化材の場合の曲線(図中点線)とほぼ完全に一致する。これは(27)式にて $\theta - \frac{\pi}{6} \ll 1$ と考えれば(31)式の関係が導かれることから当然予測され得ることである。Fig. 11 は Fig. 10 の関係を用いて歪分布を計算し図示したものである。ここでは縦軸に X を、横軸に工学歪をとって指数硬化材に対する結果を実線で、線型硬化材および非硬化材に対する値をそれぞれ×印および○印で記入したが $X=1$ の近傍を除けば三者の値はほとんど同一で図上ではその相違を判別し難い程度であ

る。これは一定の変形状態を考えれば円周方向歪の分布は加工硬化特性に無関係に決まり、この事実のために ϵ_θ と θ の値から定まる $\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_z$ の分布の相違は非常に小さくなることを示している。これから加工硬化特性のいかに歪分布に及ぼす影響は極めて小さく事実上無視できる程度であると結論する事ができよう。しかし当然予測される事ではあるがこれが応力分布に及ぼす影響は可なり著しい。Fig. 12 はこの場合の応力分布を計算し比較したものである。円周方向の無次元化応力 Θ の分布形状はそれぞれの場合の加工硬化曲線にほぼ近いものとなる。なお 5-1 で求めた材料常数值を用い、指数硬化材と線型硬化材について実際の応力値を比較すれば応力の高い点では両者はほぼ同一の値となる。従って線型硬化材とみなしてもこのような点では可なり良い近似が得られることが分る。非硬化材の応力分布は従来良く知られているものと^{1,9)}ほぼ同一の傾向を示している。

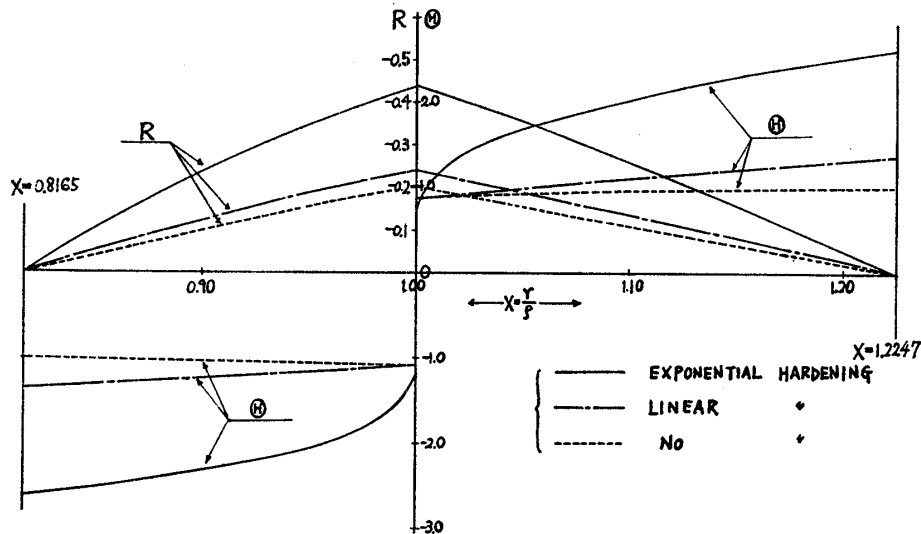


Fig. 12 Effect of Strain-Hardening Characteristic on Non-dimensionalized Stress Distribution. $t/a=0.5$

6 近 似 解 法

前節で明らかにした如く歪分布あるいは断面形状の変化を求めるためには非硬化材と仮定しても可なり良い近似が得られるのであって、かかる場合には基礎微分方程式の解析的な解が得られているので計算は非常に簡単になる。しかし応力分布、若しくは曲げモーメントを求めようとすれば材料の加工硬化特性をできるだけ忠実に考慮する必要があるこのためには相当面倒な数値計算を必要とする。そこで本節では材料の加工硬化特性を考慮に入れてしかも数値計算の過程を省略できる近似解法を考えることにする。前節でまた基礎微分方程式の第一近似解である(31)式の関係が有用であることを述べた。これによれば $X=1$ の近傍では θ と X の関係は基礎微分方程式を数値的に解いたものと可なり異なったものとなるけれども、もともとこの近傍では厳密な数値解法によるものといえども若干の矛盾が生じて来るのであって、歪および応力の最大値は内外面に生ずることを考えればこの点で境界条件を満足している(31)式の関係を用いて計算を進めることによってほぼ妥当な結果が得られるであろうことは容易に想像される。

そこで

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq X \leq \frac{b}{\rho} \text{ に対して } Z &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{X}{b/\rho} \right) \leq 0 \\ 1 \geq X \geq \frac{a}{\rho} \text{ に対して } Z &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{X}{a/\rho} \right) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

とおけばこれと(31)式を用いて次のような関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) &= \pm \sin Z \\ \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) &= \pm \cos Z \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= \pm \left(\frac{1}{2} \sin Z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos Z \right) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= \pm \left(\frac{1}{2} \cos Z - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin Z \right) \\ \sin \theta &= \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin Z + \frac{1}{2} \cos Z \right) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ただし(42)式の複号は $1 \leq X \leq \frac{b}{\rho}$ に対して+, $1 \geq X \geq \frac{a}{\rho}$ に対して-を採るものとする。(33)式と(42)式の2番目の関係を用いれば ε_{eq} は次のように書くことができる。

$$\varepsilon_{eq} = \frac{|\ln X|}{\cos Z} \quad \text{ただし} \quad \frac{\pi}{\sqrt{3}} > \left| \ln \left(\frac{a}{\rho} \right) \right| = \ln \left(\frac{b}{\rho} \right) \quad (43)$$

よって

$$\bar{\sigma}_{eq} = 1 + \bar{\lambda} \left(\frac{|\ln X|}{\cos Z} \right)^m \quad (44)$$

となる。

(44)式を(17)式に代入し(42)式の関係を使えば応力成分は一括して次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} R &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \bar{\lambda} \left(\frac{|\ln X|}{\cos Z} \right)^m \right\} \sin Z \\ \Theta &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \bar{\lambda} \left(\frac{|\ln X|}{\cos Z} \right)^m \right\} (\sin Z + \sqrt{3} \cos Z) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ただし(45)式の複号は(42)式の規約に従う。歪成分は(33)式に(42)式関係を代入すれば次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \ln X \\ \varepsilon_r &= -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} \tan Z) \cdot \ln X \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3} \tan Z) \cdot \ln X \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

よって(36), (37)式より次のような関係が得られる。

$$\frac{t_0}{\rho} = \int_{X=\frac{a}{\rho}}^{X=\frac{b}{\rho}} \exp \cdot \left\{ \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} \tan Z) \cdot \ln X \right\} dX \quad (47)$$

$$\frac{t}{t_0} = \frac{t/a}{(1+t/a)^{1/2} \cdot (t_0/\rho)} \quad (48)$$

変形が小さく従って $|\tan Z| \ll 1$ とみなせば(47)式はさらに簡単化せられ既に知られている次のような関係⁷⁾を得る。

$$\frac{t_0}{\rho} = \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{b}{\rho} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{\rho} \right)^{3/2} \right\} \quad (49)$$

曲げモーメントは(39)式に以上の結果を代入して

$$\frac{M}{w_0 t_0^2 \sigma_e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{t_0} \right)^2 \int_{X=\frac{a}{\rho}}^{X=\frac{b}{\rho}} (\pm) \left[\exp \cdot \left\{ -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3} \tan Z) \cdot \ln X \right\} \right] \cdot \left\{ 1 + \bar{\lambda} \left(\frac{|\ln X|}{\cos Z} \right)^m \right\} (\sin Z + \sqrt{3} \cos Z) X dX \quad (50)$$

と表わされる。(50)式の複号も(42)式の規約に従う。変形が小さければ断面の変形は無視され σ_r も小さいと考えられるから単純理論の仮定がそのまま成り立つものとする曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M = w_0 \rho^3 \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \sigma \varepsilon d\varepsilon \quad (51)$$

ただし ε_0 は最外周の歪を表わしこの場合 $\varepsilon_0 = \frac{t_0}{2\rho}$ であり, σ は中央面の上下で $\sigma = \pm (\sigma_e + \lambda |\varepsilon|^m)$ である。この関係を用いて(51)式の積分を行ない, 中立面は中央面と一致することを考慮して $\frac{t_0}{\rho} = \frac{2}{2(a/t) + 1}$ なる関係を用いると

$$\frac{M}{w_0 t_0^2 \sigma_e} = \frac{1}{4} + \frac{\bar{\lambda}}{2(2+m) \left(\frac{2a}{t} + 1 \right)^m} \quad (52)$$

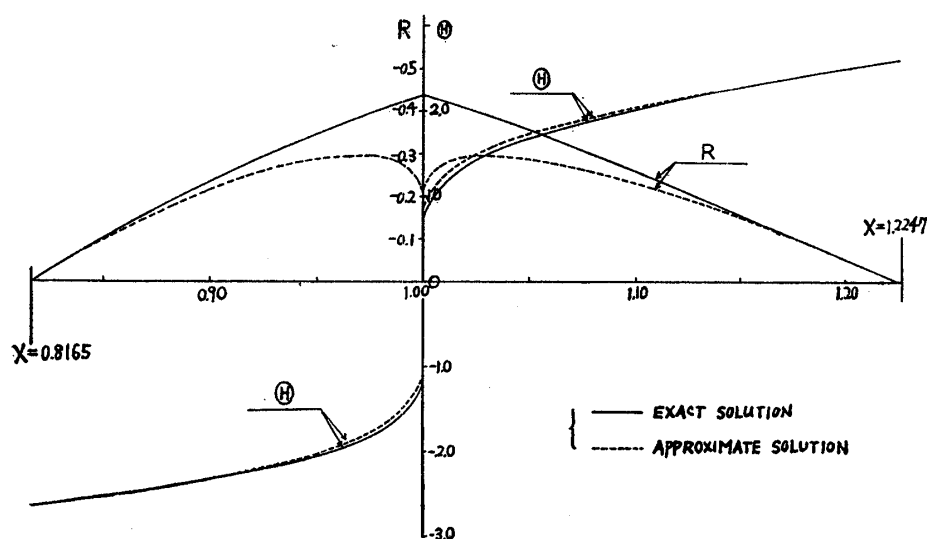


Fig. 13 Comparison of Exact and Approximate Solutions for Non-dimensionalized Stress Distribution. $t/a=0.5$

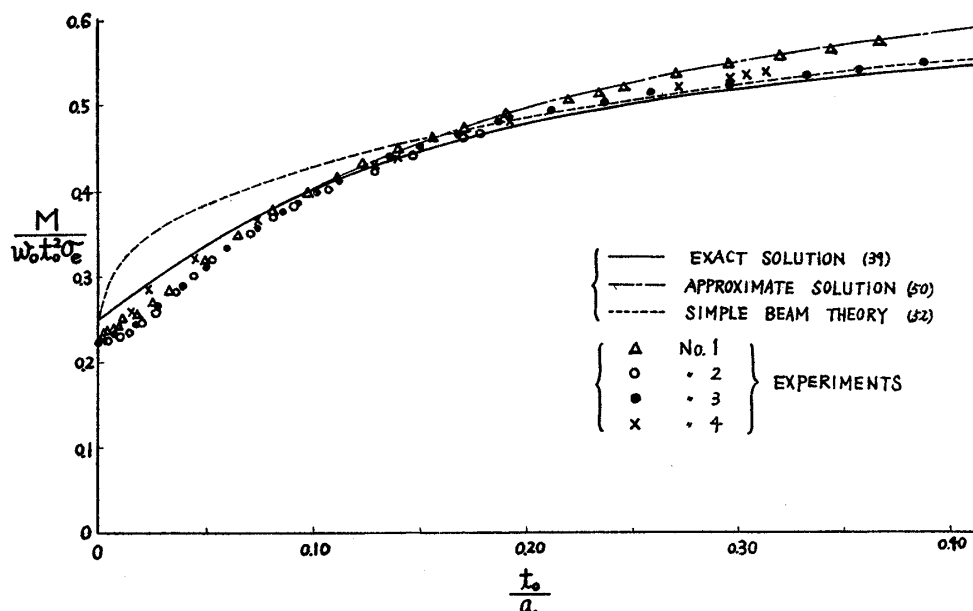


Fig. 14 Relation between Bending Moment and Curvature. Comparison of Results of Various Theories and Experiments.

となる。

Fig. 13 は以上で述べた近似解法による応力分布の計算結果を $t/a=0.5$ の場合について図示したもので、図中の実線は厳密解を点線は近似解を示している。予期せる如く両者は $X=1$ の近傍を除外すればほぼ良好な一致を示している。歪分布が十分な近似度を有することは近似解を導いた過程を考えれば言及する必要はない。Fig. 14 は近似解法による曲げモーメントと曲率の関係を厳密解と比較したもので、鎖線は (50) 式点線は (52) 式によるものである。近似解法による結果は曲率が小さい間は厳密解とほとんど一致するが変形が進むにつれてその相違は次第に大きくなり図の範囲内では最大約 10% 程度大なる値を示す。単純理論による値は曲率が小さい範囲でやや大きな曲げモーメントを与えるが図の範囲内では大差のない結果が得られることが分る。

7 軟鋼帯板の面内純曲げ試験

以上の解析の妥当性を検討するためには実験結果との比較考察が必要となるが、このような目的に対して有用な実験結果はこれまでほとんど得られていない。これは軸力を伴わぬ状態で大きな曲げ変形を与えることが普通

の試験装置では困難であること、薄い帯板をその面内に塑性的に曲げようとすれば圧縮側に局部座屈、引張側に局部収縮等を生じ易く一様に大きな変形を与えることがかなり困難であること、塑性歪の正確な測定がかなり難しいことなどの理由によるものと思われる。そこで以上の点を考慮して行なった実験の概略について簡単に説明する。

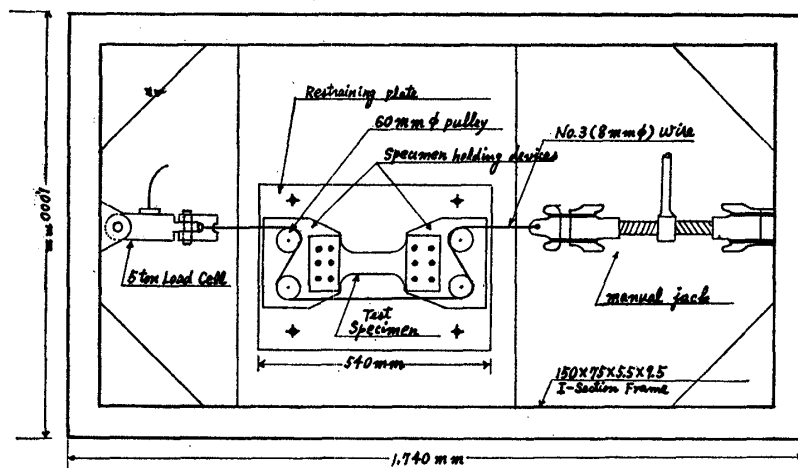


Fig. 15 Bending Apparatus used for Testing.

曲げ試験装置の概略は Fig. 15 に示す如きものであって試験片はその両端をそれぞれ2つの滑車を内蔵する試験片支持装置にボルトを介して結合され、この滑車には図に示す如くS字型にワイヤーロープがかけられている。手動ジャッキによってワイヤーには張力が加えられ、これによって試験片の両端には常に曲げモーメントのみが加わる。張力は電気抵抗線式張力計によって0.5%以下の誤差で測定され、モーメントアームも試験片の形状が決まれば種々の異なった変形状態に対応してあらかじめ十分正確に求められるから、このような方法によるモーメントの測定誤差は最大1%以下であると考えられる。曲率は1/1000 mmまで直読できるダイヤルゲージを利用した簡単な曲率計によって測定した。求め得る最小曲率はほぼ $10^{-5}(\text{mm}^{-1})$ である。装置は常に試験片の面内にのみ外力が加わるように試験の都度調整されたのはもちろんであるが、さらに面外の不測な変形を抑制するために試験片支持装置を両面から厚さ15 mmの鋼板ではさみその間に十分な量のグリースを充填した。従って試験片支持装置は両拘束板の間を自由に移動することができてこの間の摩擦はほとんど問題にならない。試験片は材質、焼鈍条件共に先に引張試験を行なったものと全く同一で平行部断面は約 $50 \times 10 \text{ mm}$ 、平行部の長さは約100 mmであり、平行部の断面寸法は特に一様となるように注意して仕上げた。実験の再現性と異なった変形状態に対する測定を行なうため以上の如き試験片を5枚作製した。歪の計測は電気抵抗線歪計（共和電業製LE-1ゲージ長18 mm）とPhoto-grid法を併用した。歪計は主として歪の小さい所での測定とPhoto-grid法による歪測定のcheckのために用いられた。Photo-gridの格子間隔は1 mmで変形後にこの間隔の変化を1/1000 mmまで測定して $\bar{\epsilon}_\theta$ 、 $\bar{\epsilon}_r$ を求めた。板厚方向の平均歪 $\bar{\epsilon}_z$ は1/1000 mmまで測定できるポイントマイクロメーターで試験前後の板厚を測定し求めたものである。なお予備試験によってSpring-backのための曲率変化は除荷直前のモーメントまで弾性的に負荷したと考えた場合得られるものとほぼ同等とみなしても差し支えないことが知られたので、以後に記す曲率はすべて全曲率から以上の如くして求めた弾性曲率を差し引いた残留曲率である。

8 実験結果とその考察

ここで述べるものは予備試験を除くほぼ同一形状、寸法の4枚の試験片に対する実験結果であって便宜上これ等をTest No. 1~4と呼ぶことにする。No. 1は $t_0/a=0.123$ および0.225の状態において2回完全に除荷後再負荷を行なったが、他の試験片はいずれも除荷を含まない単純な負荷過程のもとに最終変形状態に至らしめた。またNo. 1およびNo. 3は最終変形状態において試験片の圧縮側にかなり明瞭な座屈状変形を生じた。Fig. 14にはNo. 1からNo. 4までの試験によって得られた曲げモーメントと曲率に関する実験点が記入されている。加工硬化曲線の近似度や以上述べた事実を考慮すれば実験値は理論曲線とかなり良く一致し比較的再現性のあるものであって、近似解法による結果も妥当なものといえることができる。単純理論では変形の小さい

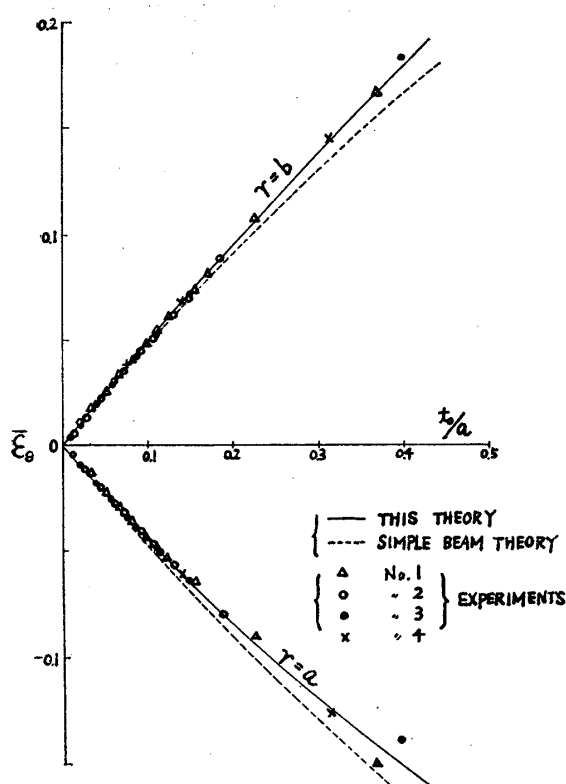


Fig. 16 Variation of Extreme Circumferential Strain during Bending

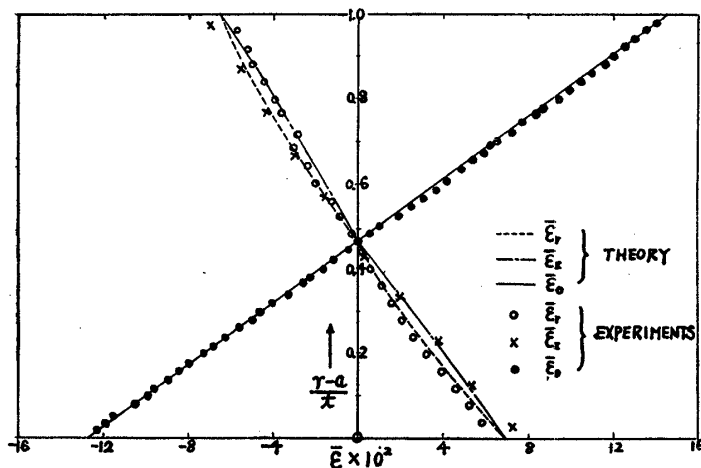


Fig. 17 Comparison of Measured and Theoretical Strain Distribution. Test No. 4 $t_0/a=0.312$

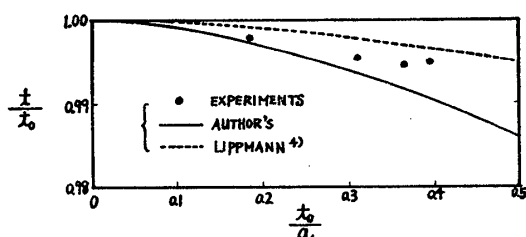


Fig. 18 Comparison of Measured and Theoretical Height Change during Bending

場合に過大なモーメントを与えることも図から明らかである。Fig. 16 は梁の内外面における円周方向歪 $\bar{\epsilon}_\theta$ と曲率 t_0/a の関係を示したもので図中の曲線は理論によるものである。図で t_0/a が約 0.18 となる状態を境としてこれより小さい歪は電気抵抗線歪計によるもの、大なる場合は Photo-grid 法によるものである。No. 1 および No. 3 の最終状態を除けば何れの計測結果も理論値と良く一致している。Fig. 17 は一例として No. 4 の最終変形状態 $t_0/a=0.312$ における各歪成分の分布を示したもので $\bar{\epsilon}_\theta$, $\bar{\epsilon}_r$ は Photo-grid の間隔を, $\bar{\epsilon}_z$ は板厚をそれぞれ 1/1000 mm まで測定して求めたものである。Photo-grid 法による計測ではこの場合最大弾性歪の程度の測定誤差は免かれず, このことを考えれば $\bar{\epsilon}_\theta$ は理論値と良く一致した値が得られているといえる。しかし $\bar{\epsilon}_r$ と $\bar{\epsilon}_z$ は詳細に見れば, 試験片の圧縮側では一応それぞれの実験値が理論値に近い値を示しているのにもかかわらず, 引張側では $\bar{\epsilon}_r$ の計測値は $\bar{\epsilon}_z$ の理論値に $\bar{\epsilon}_z$ の計測値は $\bar{\epsilon}_r$ の理論値に近い分布を示しており, 両歪の絶対値を比較した場合の大小関係は理論と実験とで全く逆の関係を示していることに気付く。このような傾向は変形の大きな場合には他の試験片の測定結果にも見られた。従ってかかる理論と実験の相違は本質的にはこ

で取り扱った全歪理論の仮定に基づく問題であると考えられるけれども, 試みに Fig. 17 に示す変形状態における板厚の変化率 w/w_0 について本理論による結果と Lippmann の歪増分理論によるもの⁴⁾とを比較したところでは, 両者はほとんど一致し特にいずれの解がここで得た実験値により良く合うという傾向は見出せなかった。変形の小さい状態では $\bar{\epsilon}_r$ と $\bar{\epsilon}_z$ の相違は事実上無視される程度である。

Fig. 18 は梁高の減少率と曲率との関係を示したものであって本理論による解と前述の歪増分理論による解が記入せられている。梁高の減少は実験の範囲内では極めて少なく, 試験片の表面の僅かな凹凸さえ

も測定結果にかなり影響するので計測値は十分正確なものとはいえない難いが実験値が本理論による値よりも大きくなっていることはこの図から明らかである。これは Fig. 17 について述べた如く $\bar{\epsilon}_r$ の計測値の絶対値が理論によるそれよりも大体において小となっていることを考えるならば凡そ予想されることである。歪増分理論によれば梁高の減少は本理論によるものより少なくなるようで, ここで得た実験結果はほぼ両理論の中間の値となっていることが分る。以上の事実を要約すればここで

なった実験の範囲内では、全歪理論による解析の結果はかなり良く実験事実を表わしているという事ができよう。

9 結 言

本論文では薄い帯板をその両端に加わる曲げモーメントのみによって板面内に塑性的に曲げる問題を取り上げ、適当な加工硬化特性を有する剛塑性体と仮定し von Mises の降伏条件により全歪理論を用いて解析し、またこれに関する実験を行なって得られた結果の比較考察を行なった。

理論解析によって得た結果の大要は次の如くである。

(1) 全歪理論に従えば問題は基礎微分方程式(21)を数値的に解くことによって解決し、特に加工硬化を無視すれば解析的な解が得られる。

(2) 曲げられた状態における伸びなしの面と内外面の曲率半径の間には加工硬化の特性いかにかわらず実質的に(26)式の関係が成り立つ。

(3) 加工硬化特性のいかに歪あるいは断面形状に及ぼす影響は極めて小さく事実上無視できる程度である。

(4) 応力および歪の分布を直接的に求める近似解法を導き、その結果は中立面の近傍を除けばほぼ妥当なものであることを明らかにした。

また上述の解析結果を実験事実と比較して次のようなことを明らかにした。

(5) 曲げモーメントと曲率の間には両者について比較的良好な一致が見られた。

(6) 円周方向歪の分布、およびその最外周における値と曲率との関係については実験値は理論解析の結果と良く一致する。

(7) 半径方向歪および幅方向歪の分布に関しては変形が大きくなるにつれて理論値と実験値との間の相違が著しくなる傾向がある。しかしここで行なった実験の範囲内ではかかる矛盾があるとしても実用上大きな問題とはならない程度である。

以上本論文では表題の問題を全歪理論によって解析して、実用上の問題には十分有用な解が得られることを明らかにした。またここでは純曲げの場合のみを取り扱ったが以上の解析は形式的には軸力を併せ有する曲げの問題にも拡張することができる。しかし以上の結論がこのような問題に全歪理論を適用することの理論的妥当性を保証するものではないことを特に附言しておきたい。

最後にこの問題に対して終始有益なご討論を頂いた栖原二郎教授ならびに実験の計画、遂行に熱心に協力してくれた山口喜久次君の労に対し深く謝意を表する。

なお本研究の一部は昭和 37 年度文部省科学研究費の援助によって行なわれたことを附記する。

参 考 文 献

- 1) J. D. Lubahn & G. Sachs : Bending of an Ideal Plastic Metal. Trans. ASME 72 (1950) 201
- 2) F. A. Gaydon : An Analysis of the Plastic Bending of a Thin Strip in its Plane, Jour. of Mechanics and Physics of Solids. Vol. 1 (1953) 103
- 3) 斎藤浩一：金属板の曲げ加工について（第3報），日本機械学会論文集 第20巻 第90号（昭和29年）49
- 4) H. Lippmann : Ebenes Hochkantbiegen eines schmalen Balkens unter Berücksichtigung der Verfestigung. Ingenieur-Archiv XXVII (1959) 153
- 5) 著者：未発表研究（九州大学工学集報一投稿中）
- 6) 森口繁一，高田 勝：数値計算法 II 岩波講座，現代応用数学，B-13-II，93
- 7) 益田森治，室田忠雄：曲げ加工に関する理論の展望，機械の研究 第10巻 第1号（1958）145