(昭和 39 年5月造船協会春季講演会において講演)

一次元的温度分布を有する矩形板の熱弾塑性 応力問題に関する研究 (第1報)

正員 辻

甬

Studies on Elastoplastic Thermal Stresses in Rectangular Plates with Uniaxial Temperature Variation (lst Report)

By Isamu Tuzi, Member*

Summary

The problems of elastoplastic thermal stresses in rectangular plates are studied for the case of one-dimensional temperature distribution. The theory is based on the assumption of elastoplastic material obeying a strain-hardening temperature-dependent von Mises yield condition and associated flow rule. The other mechanical and thermal properties of the material are assumed to be temperature independent and the Bauschinger effect is neglected. This is an extension of the usual theory for an elastic perfectly plastic material.

At first the theory used is outlined in general form. Then the basic equations are derived for determining transient and residual thermal stresses, taking account of external forces and moments applied at the both ends of the plate. Generally, the problem can be solved by the method of successive approximations using a step-by-step procedure in time.

An application of the theory is made for a symmetrically heated plate under thermal cycling without external forces. For simplicity and clarity, a rectangular shaped distribution of temperature is assumed and the yield locus is considered to be linear function of temperature and equivalent plastic strain. Under these assumptions, the analysis is exceedingly simplified and the solution can be obtained easily. In the particular example considered here, it is shown that for an elastic perfectly plastic material residual stresses and apparent strains after any number of same cycles are unchanged though it is possible for equivalent plastic strain accumulation to occur, but for a strain-hardening material those are gradually changed with increasing number of same cycles until elastic shakedown state is reached or an ultimate strain is reached at which time failure occurs.

1 緒 言

船体の建造時には溶接,ガス切断,加熱を応用した成型加工など熱の出入を伴う加工が少なくないが,これらの加工では必然的に熱弾塑性応力状態を生じ,その結果一般に加工された部材には応力や変形が残る。矩形板についてこの種の問題を解析的に取り扱つたものに渡辺教授¹⁾の先駆的な研究があげられ,また著者²⁾は同様の方法を用いてガス切断時の収縮変形を解析した。これらの研究では塑性域における負荷および除荷が温度上昇および温度下降に対応して起こるとして,全歪理論により解析がなされているが,得られた結果は実験結果と比較的良い一致を示している。しかしながら任意の負荷形式に対して塑性域からの除荷条件を明確ならしめるためには,一般に歪増分理論による考察を必要とする。数理塑性論の進展とともに,これを熱応力問題に適用するための多くの試みがなされて来たが,中でもJ.H.Weiner, H.G.Landau らの一連の研究³⁾⁴⁵は歪増分理論に基づいた熱弾塑性応力問題の解法の基礎を形成したものといえよう。また栖原教授⁶⁾⁷⁾⁸はこの種の問題の2,3の基本

原稿受付 昭和 38 年 12 月 11 日

^{*} 九州大学工学部

的現象のみをとりあげて問題を単純化し、加熱冷却に伴う除荷の限界条件を求めて冷却後板に残留する変形の一般的特性を論じた。以上の解は材料の降伏応力の温度依存性のみを考慮し、初期応力のない場合に限られているが、実際の加工を行なう場合には処女材料を扱うことはむしろまれで、初期応力のいかんによつては同一の熱サイクルを与えても解は全く異なつたものとなることが考えられる。また最近 A. Mendelson ら⁹は本質的に全歪 理論によるものであるが、歪硬化を取り入れた興味ある解法を発表し、しばしば歪硬化も無視し得ないことを指摘している。

そこでこの論文では、まず完全塑性体について展開されて来た従来の歪増分理論による解法を歪硬化材に拡張 することを試みた。材料は弾塑性的挙動のみが支配的であると考えて、この報告では一次元的温度分布を有する 矩形板の熱弾塑性応力問題に関する基礎関係式を導き、簡単な温度分布を仮定して繰り返し熱サイクルによる板 の変形を解析した。

2 一般的な von Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss の方程式

本節では応力テンソル, 歪テンソルの成分を σ_{ij} , ε_{ij} で, またそれらの偏差成分を s_{ij} , e_{ij} で表わす。添字 記号は通常の総和規約に従うものとすれば、これらは次式で定義される。

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{mm}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$(1)$$

ただし

歪成分を弾性, 塑性および熱膨脹成分に分け, 特に弾性と塑性を区別 する ときは, 右上または右下にそれぞれ E, P なる添字を つける。実験的事実にもとづいて材料の塑性的挙動は偏差応力テンソル s_{ij} , 塑性歪テンソル s_{ij}^{P} , および温度Tの間になりた つ関係で定まると考え,降伏条件を,

$$f(s_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, T) = 0 \tag{2}$$

で表わすとき、この降伏条件に従う材料の塑性歪増分は次式で与えられる10)。

$$\dot{s}_{ij}^{P} = \begin{cases} 0 & \text{ttl} f < 0, \quad \text{ttl} f = 0 \quad \text{th} \circ \circ \quad \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0 \\ \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{\lambda} & \text{ttl} f = 0 \quad \text{th} \circ \circ \quad \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \ge 0 \end{cases}$$

$$(3)$$

ここで関数fはその偏微分を含めて連続で、fの符号は応力も歪も受けない状態で負であるものとし、λ は正の スカラー関数である。また・は諸量の時間 t に関する導関数, すなわち rate を表わし、 微小時間 dt を乗ずれ ば諸量の増分となる。ここでは便宜上, 特記のほかは dt や省略し, これらを増分と呼ぶことにする。

以下の取り扱いでは材料は von Mises の降伏条件に従うものとし、等価応力 σ 、および等価塑性歪増分 ϵ_p を次式で定義する。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \{s_{ij} s_{ij}\}^{1/2} \tag{4}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \dot{\varepsilon}_{ij}^{P} \dot{\varepsilon}_{ij}^{P} \}^{1/2}$$
(5)

これらの定義式を用いて、von Mises の降伏条件は一般的に次のような形で表わされる。

$$f = \bar{\sigma} - Y(\bar{\varepsilon}_P, T) = 0, \quad \text{trtl} \quad \bar{\varepsilon}_P = \int_0^{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}_P dt \tag{6}$$

ここで *ē*_P は等価塑性歪増分の負荷径路に沿う積分を示し、Y は降伏応力の歪硬化および温度依存性を表わす正値の関数で、実験的に定められるべき性質のものである。(6)式を *sij* で偏微分して 3/2*ā* を *i* に含ませることにすれば、(3)の第2式は負荷の条件が満足されている限りにおいて、次のように書くことができる。

$$\dot{\varepsilon}_{i}{}^{P}_{j} = s_{ij} \cdot \lambda \tag{7}$$

(4), (5), (7) 式を用いると、 λ は次のように表わされる。

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_P}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}_P}{\bar{\sigma}^2} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P}{\bar{\sigma}^2} = \frac{3}{2} \frac{\ddot{W}_P}{\bar{\sigma}^2} > 0 \tag{8}$$

117

造船協会論文集 第115号

よつて、i>0 なることは塑性仕事増分 \dot{W}_p が正であるという条件と同等である。次に(6)式の時間微分を考えると、

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{P} = \frac{\dot{\tilde{\sigma}} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T}}{\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\varepsilon}_{P}}}$$
(9)

なる関係が得られ、(8)、(9)両式より、

$$\dot{\lambda} = \frac{3\left(\dot{\bar{\sigma}} - \frac{\partial Y}{\partial T}\dot{T}\right)}{2\bar{\sigma}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}_{P}}\right)} \tag{10}$$

となる。 $\partial Y / \partial \bar{\epsilon}_P = \partial \bar{\sigma} / \partial \bar{\epsilon}_P$ は等温下における等価応力一等価塑性歪曲線の切線係数である。(3),(6),(7), (10) 式を考慮すれば,(6) 式の形で与えられる降伏条件に従う材料の塑性歪増分は、次式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{i}{}^{P}_{j} = \begin{cases} 0, \quad \text{trtl} \begin{cases} \bar{\sigma} < Y \text{ ittl}, \\ \bar{\sigma} = Y \text{ choo} \dot{\sigma} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} < 0 \\ \\ \frac{3\left(\dot{\sigma} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T}\right)}{2\bar{\sigma}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}_{P}}\right)} s_{ij} \text{ trtl} \quad \bar{\sigma} = Y \text{ choo} \dot{\sigma} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \ge 0 \end{cases}$$

$$(11)$$

(11) 式の最後の条件式における等号は中立状態を示すもので、この場合明らかに塑性歪増分は0 である。また *i* は (4) 式の時間微分を考えて、

$$\sigma_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = \left(s_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right)\left(\dot{s}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\sigma}_{mm}\right) = s_{ij}\dot{s}_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\dot{\sigma}_{mm}$$

なる関係を用いれば、次のように書ける。

$$\dot{\vec{\sigma}} = \frac{\sigma_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \left(\frac{1}{3}\right) \sigma_{kk} \dot{\sigma}_{mm}}{\left(\frac{2}{3}\right) \vec{\sigma}}$$
(12)

弾性偏差歪増分 \hat{e}_{ij}^{I} と偏差応力増分 \hat{s}_{ij} との間には、Hooke の法則によつて次式が成りたつ。

$$\dot{e}_{ij}^{E} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} \qquad G:$$
 前盼弾性率 (13)

また平均垂直応力を $\sigma_m(=\sigma_{kk}/3)$, 平均垂直歪を $\varepsilon_m(=\varepsilon_{kk}/3)$, 材料の線膨脹係数を α として熱膨脹による歪を αT で表わせば,

$$\dot{\epsilon}_m = rac{\dot{\sigma}_m}{3K} + lpha \dot{T}, \quad K: \& tate{tate{tate}}$$
 (14)

である。

(11) 式には塑性変形における体積不変の仮定が暗に含まれているから、塑性歪成分は平均垂直歪成分をもたない。よつて(11),(13),(14) 式を加え合わせると全歪増分は次のようになる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}_m = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K} + \dot{\varepsilon}_{ij}^P + \alpha \dot{T}$$
(15)

ただし上式の $\hat{\epsilon}_{ij}^{P}$ は (11) 式で与えられるもので, (15) 式は温度変化および歪硬化を考慮した Prandtl-Reuss の方程式である。

3 一次元熱弾塑性応力問題の基礎関係式

ここでは、一次元的温度分布を有する矩形板の熱弾塑性応力問題に共通な基礎関係式を導いておく。Fig.1 に 示すような板幅に比べて長さの長い単位厚の板を考え、座標軸を図のようにとり、板幅を 2C、板の長さを 21 で表わす。このような板に時間的に変化する一次元的温度分布 T(y,t) が与えられたものとし、外力は端末に加 わる軸力 F、およびモーメント M を考慮する。問題の取り扱いにあたつて設けた主要な仮定は次のごとくであ

る。





関係に一定であるとみなす。

(i) 板の長さ方向以外の応力はすべて0とみなし,また 板の横断面は変形の過程を通じて平面に保たれるものとす る。

(ii) 温度分布は板の長さ方向に一様で、少なくとも時間 *t*に関して連続である。

仮定(i)によれば応力状態は次のようになる。

$$\sigma_x \equiv \sigma, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

また歪の適合条件式は a, b を時間のみの関数として,

(19)

(16)

119

とおくことにより満足される。(16) 式で与えられる応力状態に対しては、(4) 式より $\sigma = \{\sigma_x^2\}^{1/2} \equiv [\sigma^2]^{1/2} \equiv |\sigma|$ となるから降伏条件は次のようになる。

 $\varepsilon_x = a(t) + b(t) \cdot y$

 $\dot{\sigma} = \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|}$

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \sigma^2 = Y^2(\bar{\varepsilon}_P, T) \tag{18}$$

また (12) 式より,

となる。ここで以下の取り扱いに便なるよう H.G.Landau ら 4 にならつて弾性域では 1, 塑性域では 0 となる ような単位階段関数 g(y,t) を定義すれば, Prandtl-Reuss の方程式は通常の応力, 歪成分を用いて次のように 書ける。

$$\begin{split} \dot{\varepsilon}_{x} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + (1 - g) \frac{2\sigma}{3} \mu + \alpha \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{y} &= \dot{\varepsilon}_{z} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma} - (1 - g) \frac{\sigma}{3} \mu + \alpha \dot{T} \\ \mu &= \frac{3 \left(\dot{\sigma} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \right)}{2 \bar{\sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}_{p}} \right)} \end{split}$$

(20)

ここで E は弾性率、 ν はポアソン比を表わす。(20) 式より、弾塑性境界で歪増分の連続性が保たれるためには $\nu = 1/2$ でなければならないことが知られるから、以下の議論はこのような場合に限定する。また $\epsilon_{L}^{2} = -2\epsilon_{L}^{2} = -2\epsilon_{L}^{2}$ なるゆえに、 $\epsilon_{L}^{2} = \epsilon_{P}$ とおけば(5)式の定義によつて、

$$\tilde{\varepsilon}_P = |\tilde{\varepsilon}_x^P| \equiv |\tilde{\varepsilon}_P| \tag{21}$$

となる。よつて以下の取り扱いでは # 方向の塑性歪増分に関する添字 # を省略する。そこで(20)の第1式は次のように書ける。

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\dot{\sigma}}{E} + (1 - g)\dot{\varepsilon}_P + \alpha \dot{T}$$
(22)

また (22) 式の ɛp は (11), (18), (19) 式を考慮すれば次式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{P} = \begin{cases} 0, \quad \text{trib} \quad \begin{cases} \sigma^{2} < Y^{2}, \quad \text{trid}, \\ \sigma^{2} = Y^{2} \quad \text{trid}, \\ \sigma^{2} = Y^{2} \quad \text{trid}, \\ \sigma^{2} = Y^{2} \quad \text{trid}, \\ \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \\ \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \\ \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \\ \sigma \mid \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{P}}\right) \end{cases} \quad \text{trid} \quad \sigma^{2} = Y^{2} \quad \text{trid}, \\ \sigma \dot{\sigma} = \frac{\sigma \dot{\sigma}}{|\sigma|} - \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} \ge 0 \end{cases}$$

$$(23)$$

一方、(17)式より次の関係がえられる。

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{a} + \dot{b}y$$

(24)

造船協会論文集 第115号

(22), (24) 式を等置して 2 方向の機械的な歪を 2 で表わせば

$$\dot{\varepsilon} \equiv \dot{\varepsilon}_x - \alpha \dot{T} = \dot{a} + \dot{b}y - \alpha \dot{T} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + (1 - g)\dot{\varepsilon}_P \tag{25}$$

となる。よつて任意時刻 t において、考える点が弾性状態にあれば $\dot{\sigma} = E(\dot{a} + \dot{b}y - \alpha \dot{T})$ で g(y,t) = 1、考える点 が塑性状態にあれば (18) 式より $\dot{\sigma} = \operatorname{sgn} \dot{Y}$ で g(y,t) = 0、となるから、これらを一括して書けば次のようにな る。

$$\dot{\sigma} = E \cdot g(\dot{a} + \dot{b}y - \alpha \dot{T}) + (1 - g)(\operatorname{sgn} \dot{Y})$$
⁽²⁶⁾

ただし sgn(signum function) は引張降伏に対して +1, 圧縮降伏に対して -1 をとるような符号関数とし, Y は (21) 式を考慮すれば次式で与えられる。

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}_P} |\dot{\varepsilon}_P|, \quad \bar{\varepsilon}_P = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_P| dt$$
⁽²⁷⁾

ここで任意時刻における断面全体の釣合を考えると、端面から十分遠い点では次式がなりたたねばならない。

$$\left.\begin{array}{c}
\int_{-c}^{+c} \sigma(y,t) dy = F \\
\int_{-a}^{+c} \sigma(y,t) y dy = M
\end{array}\right\}$$
(28)

上式を t に関して微分し,仮定 (ii) を考慮して微積分の順序を交換した後,(26)式を代入して積分し a, b に ついて解けば,次のような関係が得られる。

$$\dot{a} = \frac{-L_{3E} \cdot \dot{P} + L_{2E} \cdot \dot{Q}}{L_{2E}^2 - L_E L_{3E}}$$

$$\dot{b} = \frac{L_{2E} \cdot \dot{P} - L_E \cdot \dot{Q}}{L_{2E}^2 - L_E L_{3E}}$$

$$(29)$$

$$\dot{P} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} g \cdot \alpha \dot{T} dy - \int_{-\sigma}^{+\sigma} (1-g) \left(\operatorname{sgn} \frac{\dot{Y}}{E} \right) dy + \frac{\dot{F}}{E}$$

$$\dot{Q} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} g \cdot \alpha \dot{T} y dy - \int_{-\sigma}^{+\sigma} (1-g) \left(\operatorname{sgn} \frac{\dot{Y}}{E} \right) y dy + \frac{\dot{M}}{E}$$

$$(30)$$

$$L_{E}(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(y,t) dy$$

$$L_{2E}(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(y,t) y dy$$

$$L_{3E}(t) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} g(y,t) y^{2} dy$$
(31)

(31) 式は最初 H.G. Landau ら⁴⁾によつて定義せられたもので、 L_E は弾性域の長さ、 L_{2E} , L_{3E} はそれぞれその 1次および 2 次モーメントである。(29) 式を (25) 式に代入すれば、

$$\dot{\varepsilon} = \dot{a} + \dot{b}y - \alpha \dot{T} = \frac{(-L_{3E} \cdot \dot{P} + L_{2E} \cdot \dot{Q}) + (\dot{L}_{2E} \cdot \dot{P} - L_{E} \cdot \dot{Q})y}{L_{2E}^2 - L_{E}L_{3E}} - \alpha \dot{T}$$
(32)

となる。

任意時刻においてすべての量が既知であるとき、与えられた増分 \dot{T} , \dot{F} , \dot{M} に対する歪増分 $\dot{\epsilon}$ を求めるため には \dot{Y} , 従つて $\dot{\epsilon}_{P}$ を求めなければならないが、これを決定する (23) 式には未知量 $\dot{\sigma}$ が含まれている。また 材料の応力-歪曲線に明瞭な降伏点が現われるような場合には、 $\dot{\sigma}$ は弾塑性境界で不連続となる。そこで (23) 式の条件式を書き改めることを考える。まず (25) 式より $\dot{\sigma}=E\{\dot{\epsilon}-(1-g)\dot{\epsilon}_{P}\}$ となるから、この式の両辺に σ をかけて $\sigma\dot{\epsilon}_{P}=\dot{W}_{P}$ なることを考慮すれば、次のような関係が得られる。

$$\sigma \dot{\sigma} = E\{\sigma \dot{\varepsilon} - (1 - g) \dot{W}_P\} \tag{33}$$

よつて (23) 式の条件式は次のように書き改められる。

$$\frac{\sigma}{|\sigma|}\dot{\varepsilon} - \frac{\partial(Y|E)}{\partial T}\dot{T} - (1-g)\frac{\dot{W}_P}{|\sigma|} \leq 0$$
(34)

除荷に対しては上式の<号が相当し、この場合 $\dot{W}_P=0$ でなければならない。また中立状態に対しては等号が 成立し、この場合も $\dot{W}_P=0$ である。残る可能性は負荷の場合であつて、この場合にのみ $\dot{W}_P>0$ 、かつ $\dot{\epsilon}_P$ =0,

g=0 である。以上の条件を考慮すれば、(23) 式は次のように書き改められる。

$$\begin{split} \sigma^2 &\leqslant Y^2 \ \text{$\ddagger trl$}, \\ \sigma &= \pm Y \ \text{\vec{c}} \Rightarrow \neg \ \hat{\epsilon} \mp \frac{\partial(Y/E)}{\partial T} \dot{T} \\ \leqslant \varphi & = \pm Y \ \text{\vec{c}} \Rightarrow \neg \ \hat{\epsilon} \mp \frac{\partial(Y/E)}{\partial T} \dot{T} \\ & = \pm Y \ \text{\vec{c}} \Rightarrow \neg \ \hat{\epsilon} \mp \frac{\partial(Y/E)}{\partial T} \dot{T} \\ & \\ \hat{\epsilon}_P &= \frac{\hat{\epsilon} \mp \frac{\partial(Y/E)}{\partial T} \dot{T}}{1 + \frac{\partial(Y/E)}{\partial \bar{\epsilon}_P}}, \quad g = 0 \end{split}$$

ただし (35) 式の複号は同順とする。(35) 式の $\dot{\epsilon}_P$ を (27) 式に代入し,得られた \dot{Y} を (30) 式に, さらにこ の \dot{P} , \dot{Q} を (32) 式に代入すれば,一般に $\dot{\epsilon}$ に関する第2種 Fredholm 型積分方程式が得られ,何らかの方 法でこれを解いて $\dot{\epsilon}$ が求められれば,(35) 式より $\dot{\epsilon}_P$ および新らしい弾塑性境界が決まり,(27) 式より \dot{Y} が 決まる。このような過程を与えられた負荷径路に沿つて step by step で反復すれば,初期条件を $t=t_0$ にて $\sigma=\sigma_t(y,t_0), \epsilon=\epsilon_t(y,t_0)$ として,任意時刻における応力および歪は次式で与えられる。

$$\sigma = \sigma_{i}(y, t_{0}) + \int_{t_{0}}^{t} \{gE\dot{\varepsilon} + (1-g)(\operatorname{sgn}\dot{Y})\}dt$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{i}(y, t_{0}) + \int_{t_{0}}^{t} \dot{\varepsilon}dt$$
(36)

4 積分形式の解

時刻 $t_0 < t < t_1$ の間において考える点が常に弾性状態にあるか,または塑性状態にあつても除荷を生じないならば, $t < t_0$ あるいは $t > t_1$ の状態いかんにかかわらず積分形式の解が得られる。すなわち考える時間内に考える点が常に弾性状態にあれば,(25) 式を積分して次の関係が得られる。

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\sigma}(y,t) dt = \sigma - \sigma_t = E\{(a-a_0) + (b-b_0)y - \alpha(T-T_0)\}$$

$$for t \in L \ a_0 = a(t_0), \ b_0 = b(t_0), \ T_0 = T(y,t_0), \ \sigma_t = \sigma(y,t_0) \}$$
(37)

また時刻はにおいて塑性状態にある点では、降伏条件が満足されるから次式がなりたつ。

$$\sigma = \operatorname{sgn} Y \tag{38}$$

よつて考える時間内に塑性域からの除荷を生じない限り、任意時刻 t における応力は (37), (38) 両式を一括し て次のように書くことができる。

$$\sigma(y,t) = g[\sigma_i + E\{(a-a_0) + (b-b_0)y - \alpha(T-T_0)\}] + (1-g)(\operatorname{sgn} Y)$$
(39)
(39) 式を (28) 式に代入し, a, b について解けば次の関係が得られる。

$$\begin{array}{c} a - a_0 = \frac{-L_{3E} \cdot P + L_{2E} \cdot Q}{L_{2E}^2 - L_E L_{3E}} \\ b - b_0 = \frac{L_{2E} \cdot P - L_E \cdot Q}{L_{2E}^2 - L_E L_{3E}} \end{array}$$

$$(40)$$

$$P = \int_{-\sigma}^{+\sigma} g \left\{ \alpha (T - T_0) - \frac{\sigma_i}{E} \right\} dy - \int_{-\sigma}^{+\sigma} (1 - g) \left(\operatorname{sgn} \frac{Y}{E} \right) dy + \frac{F}{E}$$

$$Q = \int_{-\sigma}^{+\sigma} g \left\{ \alpha (T - T_0) - \frac{\sigma_i}{E} \right\} y dy - \int_{-\sigma}^{+\sigma} (1 - g) \left(\operatorname{sgn} \frac{Y}{E} \right) y dy + \frac{M}{E}$$

$$(41)$$

またこの場合, εは弾性, 塑性のいかんを問わず次式で与えられる。

$$\varepsilon = a + by - \alpha T \tag{42}$$

(41), (42) 式はそれぞれ (30), および (32) 式の積分形である。塑性域では定義によつて次の関係がある。 $\varepsilon = \left(\operatorname{sgn} \frac{Y}{E} \right) + \varepsilon_P + \varepsilon_0$ (43)

ただし上式の ε_P は考える時間内にあらたに生じた塑性歪, ε_0 は時刻 $t=t_0$ における固有歪を示すものとし,

121

(35)

$$\varepsilon_0 = \int_0^{t_0} \dot{\varepsilon}_P dt$$

である。(43) 式を $\left(\operatorname{sgn} \frac{Y}{E}\right) = \varepsilon - \varepsilon_P - \varepsilon_0$ と変形して (41) 式に代入し,得られた P,Q を (40) 式に代入しさらに a, b を (42) 式に代入すれば、 ε に関する第2種 Fredholm 型の積分方程式が得られる。しかしこの中には未知関数 $\varepsilon_P(y,t)$,および g(y,t) が含まれているので、一般には直接これを解くことはできず、逐次近似法によらなければならない。解法の手順はいろいろ考えられるけれども、一般的に次の順序に従う。

(1) 考える時間内に生じた塑性歪 $\varepsilon_P(y,t)$ を適当に仮定する。これが困難な場合には $\varepsilon_P=0$ とすれば良い。 (2) ε_P を仮定したことによつて時刻 tにおける弾塑性領域の分布 g(y,t),および塑性域の応力Yが定まる から、これらを用いて (41) 式の積分を行なう。

(3) (31) 式の定義式に従つて L_E , L_{2E} , L_{3E} を計算し, (40) 式より a, b を求める。

(4) (42) 式より ε を計算し、(43) 式より ε_P を求めると、弾塑性境界を規定する関数 g(y,t) の第1近似 が得られる。以下このような操作を反復し、得られた $\varepsilon_P(y,t)$ および g(y,t) が前段のそれと所要の誤差範囲内 で一致するまで繰り返す。以上のごとき方法で逐次近似解が収斂するならば、所要の精度の解が得られる。とく に温度分布 T(y,t) が y に関して解析的に積分可能で、前述の積分方程式が縮退核を有するような場合には、解 析的な解が得られる⁹。さらに歪硬化を無視し、関数 T および Y が y に関して解析的に積分可能な場合には、問 題を代数的に解くことができる。しかしいずれにしても、本節の議論は (35) 式によつて塑性域からの除荷を 生じないことが保証されている場合に限られることに注意する必要がある。考える時間内において、全領域 が常に弾性的である場合は g=1 とおけばよく、 $L_E=2C$ 、 $L_{2E}=0$ 、 $L_{3E}=\frac{2}{3}C^3$ となる。よつて $a_0+b_0y-\alpha T_0=$ $\varepsilon_1(y,t_0)$ $\int_{0}^{\alpha} \sigma_1(y,t_0)dy = E$ $\int_{0}^{+\alpha} \sigma_2(y,t_0)dy = M$ ようけば (42) 式 かちの ようにする

$$\int_{-C} \int_{-C} \int_{-C}$$

$$\varepsilon(y,t) = \varepsilon_{i} + \frac{1}{2C} \left\{ \int_{-\sigma}^{+\sigma} \alpha(T-T_{0}) \, dy + \frac{F-F_{0}}{E} \right\} + \frac{3y}{2C^{3}} \left\{ \int_{-\sigma}^{+\sigma} \alpha(T-T_{0}) \, y \, dy + \frac{M-M_{0}}{E} \right\} - \alpha(T-T_{0}) \tag{45}$$

これは外力が重畳せられた場合の熱弾性応力式である。

5 繰り返し熱サイクルを受ける矩形板の熱弾塑性応力と変形

本節では以上述べた理論の簡単な応用例として,極めて単純化された熱サイクルの繰り返しによる板の応力および変形状態を解析する。この種の問題は具体的には多層溶接を行なつた場合の残留応力状態とか,繰り返し熱サイクルによるパイプやトラス構造の熱疲労などに関係がある。

5-1 問題の取り扱い

塑性域の応力や歪を求めるには、まず $Y(\varepsilon_{P}, T)$ の関数形を規定しなければならない。一般に軟鋼では温度上 昇とともに降伏応力は低下し、塑性仕事の増加とともに降伏応力は上昇して歪硬化現象を示す。これらの事実を 考慮して、降伏応力の温度ならびに歪硬化依存性を次のような線型関数で近似する。

$$Y(\bar{\varepsilon}_{P, T}) = Y_0(1-kT)(1+h\bar{\varepsilon}_P)$$

(46)

(44)

ここで Y₀ は材料の基準温度における初期引張降伏値で、このときの最大弾性歪を ϵ_{Y0} とすれば、Y₀= $E\epsilon_{Y0}$ である。以下の取り扱いでは、簡単なために k, h を実験的に定められる正の材料常数とみなすが、必要であれば部分的に線型であるとみなして、(46) 式の近似度を高めることはさして困難ではない。また Bauschinger 効果はこれを無視した。

さらに数値計算に便なるよう、次のごとき無次元変数を導入する。

$$e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{Y0}}, \quad e_0 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{Y0}}, \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{Y0}}, \quad e_P = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_{Y0}}, \quad e_Y = \frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_{Y0}} = \frac{(Y/E)}{\varepsilon_{Y0}}$$
$$\bar{e}_P = \frac{\bar{\varepsilon}_P}{\varepsilon_{Y0}} = \frac{\int_0^t |\dot{\varepsilon}_P| dt}{\varepsilon_{Y0}} = \int_0^t |\dot{e}_P| dt$$
$$\tau = \frac{\alpha T}{\varepsilon_{Y0}}, \quad \dot{A} = \frac{\dot{a}}{\varepsilon_{Y0}}, \quad \dot{B} = \frac{C\dot{b}}{\varepsilon_{Y0}}$$

(47)

____(2.t)

一次元的温度分布を有する矩形板の熱弾塑性応力問題に関する研究 (第1報)

$$\begin{split} \eta &= y/C \\ s &= \frac{\sigma}{E\varepsilon_{Y0}} = \frac{\sigma}{Y_0}, \ s_Y = \frac{Y}{E\varepsilon_{Y0}} = \frac{Y}{Y_0}, \ s_t = \frac{\sigma_t}{E\varepsilon_{Y0}} \\ n &= \frac{k\varepsilon_{Y0}}{\sigma}, \ m = h\varepsilon_{Y0} \end{split}$$

さて Fig.2 に示すごとく、周辺自由な板の一部 $-\beta < \eta < \beta$ にて一定の温度であるような矩形型温度分布が与 えられたものとし、温度Tは0から一様に上昇して T_{max} に 達した後一様に降下して0にいたる間の熱サイクルを繰り返す ものとする。初期歪がなく硬化も無視した場合、ただ1回のこ 3 のような熱サイクルによつて生ずる残留歪の一般的特性はすで x 10 に栖原教授⁸⁾によって論ぜられている。問題の対称性によって 2 板の半幅のみを考えればよく、解を求めるに必要な諸式は(47) 式で定義した無次元変数を用いると、次のように簡単になる。 Fig. 2 Rectangular Shaped Distribu-まず (46) 式は



 $e_Y = (1 - n\tau) (1 + m\bar{e}_P) \qquad \bar{e}_P = \int_0^t |\dot{e}_P| dt$ (48)

となる。時刻 t_0 における諸量を既知として $t_0+dt=t$ における諸量を求めるために、この間の増分を考えると、 (48) 式より

$$\dot{e}_{Y} = m(1 - n\tau) |\dot{e}_{P}| - n(1 + m\bar{e}_{0})\dot{\tau}, \quad \bar{e}_{0} = \int_{0}^{\tau_{0}} |\dot{e}_{P}| dt$$
(49)

となり、また対称性を考慮すると、(30)、(31)、(32) 式より

$$\dot{e} = \frac{\int_{0}^{1} g\dot{\tau} d\eta - \int_{0}^{1} (1-g) (\operatorname{sgn} \dot{e}_{Y}) d\eta}{\int_{0}^{1} g d\eta} - \dot{\tau}$$

$$= \int_{0}^{1} \dot{\tau} d\eta + \int_{0}^{1} (1-g) \dot{e}_{P} d\eta - \dot{\tau}$$
(50)

となる。さらに(36)式は,

$$\left. \begin{array}{c} s = s_i + \{g\dot{e} + (1-g) \left(\operatorname{sgn} \dot{e}_Y \right) \} dt \\ e = e_i + \dot{e} dt \end{array} \right\}$$

$$(51)$$

となる。最後に(46) 式を(35) 式に代入して無次元化すれば、次のような関係が得られる。

$$s_{t}^{2} < \{(1-n\tau_{0})(1+m\bar{e}_{0})\}^{2} \pm t: t;, \\ s_{t} = \pm \{(1-n\tau_{0})(1+m\bar{e}_{0})\} \subset \dot{e} \pm (1+m\bar{e}_{0})n\dot{\tau} \le 0\} \xrightarrow{t_{x}} b: t_{x} \xrightarrow{t_{y}} g = 1 \\ s_{t} = \pm \{(1-n\tau_{0})(1+m\bar{e}_{0})\} \subset \dot{e} \pm (1+m\bar{e}_{0})n\dot{\tau} \ge t_{x} : b: t_{x} \xrightarrow{t_{y}} g = 0 \\ \dot{e}_{P} = \frac{\dot{e} \pm (1+m\bar{e}_{0})n\dot{\tau}}{1+m(1-n\tau)}, g = 0$$

$$(52)$$

ただし上式の複号は同順で、 $s_{i_1} \tau_{0_1} \bar{e}_0$ 等は時刻 t_0 における既知量、 τ および gは時刻 tにおける値である。 与えられた条件によつて、この場合、

$$\tau(\eta, t) = \begin{cases} \text{constant.} : 0 \leq \eta < \beta \\ 0 & : \beta < \eta \leq 1.0 \end{cases}$$
(53)

であるから,加熱域を①,常温域を②とすれば,各々の領域における応力, 歪およびそれらの増分は各々の領域 内で一定で,弾塑性境界は常に加熱境界と一致する。このように弾塑性境界,換言すれば g の分布が不変である 場合には、除荷を生じない限りにおいて温度増分ををどのようにとろうとも、歪増分理論による計算と積分形式 である全歪理論によるそれとは結果において完全に一致し、前者では増分間になりたつ関係のみを考えればよい から,計算はより簡単になる。

5-2 塑性域からの除荷条件

ここでは簡単なために常温域②が塑性状態になることはないと仮定して、塑性域からの除荷を生ずる条件を吟

123

造船協会論文集 第115号

味する。領域①が塑性状態にある場合、(50)式は次のようになる。

$$\dot{e} = \frac{-\beta(\operatorname{sgn}\dot{e}_Y)}{(1-\beta)} - \dot{\tau}$$
(54)

(A) 加熱の場合 i>0

加熱時には、領域①は圧縮塑性状態となるから、もし除荷を生ずるとすれば(52)式より

$$\dot{e} - (1 + m \bar{e}_0) n \dot{\tau} > 0$$

でなければならない。(54) 式に(49) 式を代入し,得られた関係をさらに(55) 式に代入し,除荷条件が満足 される場合には *e*_P=0 であることを考慮すると,(55) 式は次のようになる。

$$-\dot{\tau}\left\{1+\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right)n\left(1+m\bar{e}_{0}\right)\right\}>0$$
(56)

しかるに上式の { } の中は常に正値であるから、 $\dot{\tau}>0$ なる限り(56)式は成立し得ない。よつてこの場合、 加熱を続ける限り領域①は常に負荷状態にある。

(B) 冷却の場合 i<0

 $\dot{\tau} < 0$, すなわち冷却が始まると、(56) 式が満足されるから除荷を生じ、仮定によつて全領域は弾性状態となるが、冷却が進むにつれ領域①は引張塑性状態に入る。この場合、塑性域からの除荷を生ずるための条件は、(52) 式より

$$\dot{e} + (1 + m\bar{e}_0)n\dot{\tau} < 0$$
 (57)

となる。前と同様に考えて、上式は次のように書き改められる。

$$\dot{\tau} \left\{ \frac{n(1+m\bar{e}_0)}{1-\beta} - 1 \right\} < 0$$
 (58)

よつて *t*<0 に対しては,

$$\frac{n(1+m\bar{e}_0)}{1-\beta} < 1 \tag{59}$$

なる限り、塑性域からの除荷を生ずることはない。 ēo は単調に増加する正値であるから、(59) 式が満足されな くなる状態は考えられ得る。

以上を要約すると、常温域が常に弾性的であると仮定した場合、冷却中(59)式が満足される限り、塑性域からの除荷を生じ得ないことが知られ、この事実のために以下に述べる計算は著しく簡単になる。

5-3 数 値 計 算 例

最初処女状態にあつた板の一部 $-0.2 < \eta < 0.2$ なる範囲を, $T_{\min} = 0^{\circ}$ と $T_{\max} = 600^{\circ}$ の間で一様に加熱, 冷却を繰り返した場合を例にとり、数値計算を行なつた。材料常数は従来の実験結果を参照して, $\alpha = 1.47 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_{Y0} = 1.37 \times 10^{-3}$, $k = 1/932(1/^{\circ})$, h = 0 および 10 とした。よつて与えられた条件は次のようになる。

$$\tau_{\max} = 6.4380, \ \tau_{\min} = 0 \quad \beta = 0.2 \\ n = 0.1 \quad m = 0 \quad \Rightarrow \downarrow \forall 0.0137 \end{cases}$$
(60)

ここで m=0 は硬化を無視した場合である。前項の考察で知られるように、この場合加熱、冷却の1サイクル は次の4つの主要な段階に分けて考えることができる。

(i) 最初,板の全領域が弾性的である場合。

- (ii) 領域①が圧縮塑性状態にある場合。
- (iii) 冷却とともに再び全領域が弾性状態になつた場合。
- (iv) 冷却が進んで領域①が引張塑性状態になつた場合。

計算を行なうにあたつて、まず (48)~(52) 式に現われる増分を差分でおきかえて、 Δ で表わすこととし、 (52) 式の i_P を (50) 式に代入して積分すると、次のような関係が得られる。

$$\Delta e = \begin{cases} \Delta e_1 = (\beta - 1) \Delta \tau + (1 - g) \beta \left[\frac{\Delta e_1 + \operatorname{sgn}\{1 + m\bar{e}_0(t_0)\} n \Delta \tau}{1 + m\{1 - n\tau(t)\}} \right] & 0 \leq \eta < \beta \\ \Delta e_2 = \beta \Delta \tau + (1 - g) \beta \left[\frac{\Delta e_1 + \operatorname{sgn}\{1 + m\bar{e}_0(t_0)\} n \Delta \tau}{1 + m\{1 - n\tau(t)\}} \right] & \beta < \eta \leq 1.0 \end{cases}$$

$$(61)$$

全領域が弾性状態にある場合は g=1 とすればよく,また領域①が塑性状態にある場合は g=0 で,このとき $\Delta \tau$ を与えれば (61) の第1式から Δe_1 , よつて第2式から Δe_2 , (52) 式より Δe_P が求められる。以上のように,

任意時刻 t_0 における諸量の値を既知とすれば、 $t_0+\Delta t=t$ におけるそれらの値をすべて求めることができる。 この間において、領域②の応力が常に弾性限界を越えないことと、t<0 なる場合に(59)式の条件が常に満足 されていることのみを確かめればよい。

(A) 硬化を無視した場合

Table 1 は非硬化材について,前述の4つの段階の最終時における歪および応力を求めた結果である。また s を 縦軸に, e を横軸にとれば, おのおのの領域における応力, 歪の変化する模様は Fig.3 のごとく s-e 平面上に

Number of Cycles	Dimensionless Temperature : τ Strain : e Stress : s	Region	Heating Process		Cooling Process	
			Elastic Limit	At Max. Temperature	Elastic Limit	After Cooling
1	τ	1	1, 1111	6. 4380	5.4202	0
	e	1	-0.8889	-6.3489	-5.5347	-0.2500
		2	0.2222	0.0891	-0.1145	
	S	1	-0.8889	-0.3562	0. 4580	1.0000
		3	0.2222	0.0891	-0.1145	-0.2500
2	τ	1	2.2222	6, 4380	5, 4202	0
	e	1	-2.0278	- 6. 3489	- 5. 5347	-0.2500
		3	0.1944	0.0891	-0.1145	
	s	1	-0.7778	-0.3562	0.4580	1.0000
		3	0.1944	0.0891	-0, 1145	0. 2500

Table 1 Calculated Results for Nonhardening Material. (m=0)



Fig.3 Stress and Strain History during Thermal Cycling for Nonhardening Material.

表わすことができる。すなわち, 領域①の応力, 歪は 図の 0 ABCD に沿つて変化し、この間の径路はすべ て直線的である。また領域②のそれらは、0A'B'C'D' と変化し、常に弾性状態にあることがわかる。完全冷 却時の応力および 歪は 領域①では D点, 領域②では D' 点で表わされる。つぎにこの状態からふたたび同 一の熱サイクルを反復すると、領域①は Fig.3 の E 点で圧縮塑性状態に達し、このときの温度は最初の熱 サイクルの場合の2倍である。またこのときの領域② における応力と歪は、図の E' 点で与えられる。そし てこれ以後は、最初の熱サイクルと全く同一の径路を たどり、完全冷却時にはやはり(D, D')で表わされ る状態となる。すなわち、硬化を無視すれば、見かけ の残留歪および残留応力は同一熱サイクルを何回繰り 返しても変らない。これはここで考えている問題で は、弾塑性境界が常に加熱境界と一致し、塑性域の応

力が歪履歴に無関係に一定であることを考えるならば、当然のことであつて、加熱域の応力が完全冷却時に引張 降伏値に達してさえおれば、見かけの残留歪は最高加熱温度に無関係で釣合条件 の み から決まり、 $-\beta/(1-\beta)$ で与えられることを示している。

(B) 硬化を考慮した場合

前と同様に前述の4つの段階の最終時における歪,応力を順を追つて計算し,その第3サイクルまでを Table 2 に示した。Fig.4 はこの場合の応力と歪の変化の模様を図示したものである。 歪硬化を考慮すると,領域① の応力, 歪は $0A_1B_1C_1D_1E_2B_2$のごとく常に異なつた径路をたどつて変化し,次第に硬化することがわか る。またこの場合,領域①が塑性状態にあるときの経路 $\widehat{A_1B_1}, \widehat{C_1D_1}, \widehat{E_2B_2}$はもはや線型ではない。一方こ の間において,領域②の応力,歪は $0A_1'B_1'C_1'D_1'E_2'$のごとく変化し,応力は常に弾性範囲内にある。図の

125

造船協会論文集 第115号

Number of Cycles	Dimensionless Temperature : τ Strain : e Stress : s	Region	Heating Process		Cooling Process	
			Elastic Limit	At Max. Temperature	Elastic Limit	After Cooling
1	т	1	1,1111	6, 4380	5.3242	0
	е	1	-0.8889	-6.3416	-5.4506	-0.2859
		2	0.2222	0, 0963	-0.1264	
	5	Û	-0.8889	-0.3853	0. 5057	1.1436
		2	0.2222	0.0963	-0.1264	-0.2859
2	τ	1	2, 5015	6, 4380	5.1747	0
	e	1	-2.2871	-6.3307	-5.3201	0. 3160
		2	0. 2144	0.1073	-0.1454	
	S	1	-0.8575	-0.4292	0.5814	1.2641
		2	0.2144	0.1073	-0.1453	-0.3160
3	τ	0	2,7290	6.4380	5. 0269	0
	e	1	-2.4992	-6. 3202	-5.1913	-0.3448
		2	0. 2298	0.1178	-0.1644	
	S	1	- 0. 9191	-0.4711	0.6577	1. 3791
		2	0.2298	0.1178	-0.1644	-0.3448

Table 2 Calculated Results for Linear Hardening Material (m=0.0137)

(D_1 , D_1 '), (D_2 , D_2 '), (D_8 , D_8 ')……は各熱サイクルを完 了した後の残留応力, 残留歪状態を示すもので, 熱サイ クル数の増加とともに1サイクル中に生ずる硬化の度 合は減少するけれども見かけの残留歪の大きさは次第 に増加することがわかる。Fig.5 は各熱サイクルの完 了後に残留する見かけの歪を縦軸に,繰り返し数を横 軸にとつて,得られた点を結んだものである。この図 から,最初の熱サイクルによつて与えられる残留歪の 量が支配的で以後の熱サイクルによる残留歪の増加分 は次第に減少することがわかる。このような現象は多 層溶接を行なつた場合にも見られることで,熱サイク ル数の増加とともに塑性仕事が蓄積される結果,塑性 域の変形抵抗が歪硬化のために増すと考えるならば, 容易に理解されるであろう。

(C) shakedown state

前項の考察から、熱サイクル数を次第に増して行く と、1サイクル中に生ずる塑性歪の絶対量は次第に減 少し、終局的には零となるような状態に至ることが想 像される。もしこのような状態が存在するならば、こ れは繰り返し熱サイクルによる shakedown state で ある。

いまかりに、このような状態に 達したものとする と、かかる状態における熱サイクルではもはや弾性変 形しか起こらないから、 $\dot{e}_p=0$, $e_0={\rm const.}$, $\bar{e}_0={\rm const.}$ である。よつて温度変化のない状態を考えれば、(50)









式で τ=0 とおいてこれを (51) の第2式に代入し, (48) 式を考慮すれば次の関係が得られる。

$$e = \int_{0}^{\beta} e_{0} d\eta = e_{0} + e_{Y} = e_{0} + (1 + m\bar{e}_{0})$$
(62)

127

ここで考えている問題では, e_0 は $0 < \eta < \beta = 0.2$ の間で一定であるから,上式を積分して e_0 について解くと 次のようになる。

$$e_0 = -1.25(1 + m\bar{e}_0) \tag{63}$$

つぎに shakedown state で加熱した状態を考え、 $\dot{e}_p=0$ なることを考慮すれば、領域①では次の関係がなりたつ。

$$e = -\tau + \int_{0}^{\beta} \tau d\eta + \int_{0}^{\beta} e_{0} d\eta = e_{0} - (1 - n\tau) (1 + m\bar{e}_{0})$$
(64)

 $\beta=0.2$, $\tau= au_{max.}=6.4380$ として積分し, (63), (64) 両式より e_0 , および \bar{e}_0 を求めると次のような値が得られる。

$$e_0 = -4.7471, \quad \bar{e}_0 = 204.21, \quad 1 + m\bar{e}_0 = 3.7977$$
 (65)

よつてこの場合の残留応力および残留歪は次のようになる。

$$s = \begin{cases} 3.7977 : {\rm (ijj(i)} \\ -0.9494 : {\rm (ijj(i)} \end{cases} e = -0.9494 \tag{66}$$

以上の計算では、常温域が常に弾性的であることを暗に仮定したが、実際にそうであることは得られた結果から 確かめられる。また ēo は単調に増加する正値で、その極値が(65)式で与えられるものであるから、これを用 いて(59)式の左辺を計算すると、冷却中に塑性域からの除荷を生じ得ないことがわかる。よつて(65)、(66) 式で与えられる状態はこの問題の shakedown state であつて、これは Fig.4 に SS' で示した残留歪状態に相 当する。よつて本節で設けた仮定のもとでは、有限回の熱サイクルの後の応力、歪はこの状態に限りなく近づく ことが知られる。

以上の解は本節で仮定した降伏条件を満足し、与えられた材料常数値を持つ材料に対して正しい結果を与える と考えられるけれども、実在の材料では次の2点に注意する必要があろう。その第1は線型硬化と仮定したこと にあつて、実在の材料では塑性仕事の増加とともに歪硬化の度合は減少するのが普通である。このことを考慮すれ ば、サイクル数の増加とともにmの値は漸次減少し、遂には m=0、すなわち非硬化材とみなした場合に近くなる であろう。したがつて、ある硬化状態に達した後は一定のヒステリシスループを描くことになり、塑性仕事の蓄 積の結果、遂には破断にいたるであろう。このような現象は等温下の繰り返し捩り試験の結果にも見られる¹¹⁾。 第2は上述の shakedown state にいたるまでの等価塑性歪量が約 28% に達し、また常温時の領域①の引張降 伏応力が初期降伏値の約3.8倍にもなることであつて、このような状態では破壊等の現象を無視することは困難 であると思われる。しかし、これ以上の議論はこの論文の本旨ではないので割愛する。

6 結 言

この論文では、まず歪硬化および降伏応力の温度依存性を考慮した von Mises の降伏条件に従う材料を仮定 し、このような材料の弾塑性的挙動のみに注目して、一般化された Prandtl-Reuss の方程式を導いた。次に一 次元的温度分布を有する矩形板の熱弾塑性応力問題に以上の関係を適用して、この種の問題に共通な基礎関係 式を導いた。ここでは外力として端末に加わる軸力とモーメントが考慮されている。一次元的応力状態を仮定す ると、材料の圧縮性を無視した場合にのみ、弾塑性境界における歪の連続性が保たれる。基礎関係式は一般に諸 量の増分間になりたつ関係を与えるが、塑性域からの除荷を生じないことが保証される場合には積分形式の解が 得られ、これは全歪理論の結果と一致する。最後に上述の理論の簡単な応用例として、降伏曲面を温度および等 価塑性歪の線型関数で近似し、矩形型の温度分布を有する板の繰り返し熱サイクルによる応力、歪状態を解析し た。その結果、硬化を無視すると各熱サイクル後の残留応力、見かけの残留歪は常に一定であること、硬化を考 慮すると次第に変形硬化現象を呈し、ここで扱つた例では shakedown state が存在すること、などが明らかに された。すなわち、この種の問題では初期歪の有無、および歪硬化を考慮するか否かによつて解は全く異なつた 特性をもつことが有り得る。この報告では、簡単なために対称型温度分布を有する場合に限定したが、非対称型 温度分布を有する一つの計算例についても、全く類似の現象を生ずることが明らかにされている。しかしこの場 合、歪硬化を考慮した計算は極めて複雑となり若干の技巧も必要となるので、これに関する報告は別の機会にゆ

ずる。

最後にこの研究を行なうにあたつて,絶えざるご激励を賜わつた当造船学教室の栖原二郎教授,終始熱心に協力してくれた山口技官に厚く謝意を表する。なお,この研究は昭和 38 年度文部省科学研究費の援助をうけて行なわれたことを附記する。

- 参考文献
- 1) 渡辺正紀, 一次元的温度分布による矩形板の熱応力並びに残留応力に関する研究 造船協会論文集 第86号(後篇)昭和29年3月 173
- 2) 辻 勇, 軟鋼板のガス切断時における収縮変形の研究, 溶接学会誌 第 26 巻第2号 昭和 32年2月 26
- J. H. Weiner. An Elastoplastic Thermal-Stress Analysis of a Free plate. J. of Applied Mechanics sept. 1956 395
- H. G. Landau, J. H. Weiner. Transient and Residual Stresses in Heat-Treated Plate. J. of Applied Mechanics Decem. 1958, 459
- H. G. Landau, J. H. Weiner, E. E. Zwicky, Jr. Thermal Stress in a Viscoelastic-Plastic Plate with Temperature Dependent Yield stress. J. of Applied Mechanics June 1960, 297
- 6) 栖原寿郎, 鋼材の熱塑性加工に関する研究(その1)
 造船協会論文集 第103 号 昭和 33 年 233
- 7) 栖原寿郎,鋼材の熱塑性加工に関する研究(その2)
 造船協会論文集 第106 号 昭和 35 年 249
- 8) 栖原寿郎, 熱塑性加工について 塑性と加工 Vol.2 No.7 1961 114

 A. Mendelson, S. W. Spero.
 A General Solution for the Elastoplastic Thermal Stress in a Strain-Hardening Plate with Arbitrary Material Properties. J. of Applied Mechanics March 1962, 151

- B. A. Boley, J. H. Weiner. Theory of Thermal Stresses. John Wiley 1960 Chapt. 14
- 11) Harry Majors, JR.

L.F. Coffin, JR の論文 "A Study of the effects of Cyclic Thermal Strsses on a Ductile Metal" に対する討論, Trans. A.S.M.E. 1954. 949