

(昭和 40 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

平板の曲げ, 振動および座屈問題に対する エネルギー法の一般的適用法について (II)

正員 吉 識 雅 夫
正員 川 井 忠 彦

On the Method of Application of Energy Principles to
Problems of Elastic Plates (II)

By Masao Yoshiki, *Member*
Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

Applying the general method of solution proposed in the preceding paper, two important vibration problems frequently encountered in shipbuilding practice will be studied, the first of which is rectangular plates whose edges are intermittently welded to rigid girders or frames and the other is a perforated rectangular plate. Taking several examples, numerical analysis was extensively carried out and comparison between their results obtained and that of other investigators duly showed practical applicability of their method.

1 緒 言

第一報において述べた平板の境界値問題, 固有値問題の一般的解析法の応用例として船体構造の振動に関連する二つの問題について研究し, ある程度の成果が得られたので報告する次第である。

第一の問題は溶接薄板構造においてしばしば見られる断続溶接された板における周辺の拘束度が板の振動特性に及ぼす影響の問題であり, 第二の問題は有孔板の振動特性の問題である。これらの固有値問題は工學上重要な問題であるが, その境界条件が複雑であるため従来余り研究されていない問題である^{2)~5)}。そこで著者等は部分的に固定された単純支持正方形板と中央に円孔を有する周辺固定正方形板の振動解析を実行し, 他の研究結果と比較検討しその実用性を確認した。

2 周辺を部分的に固定された単純支持正方形板の自由振動

前の報告¹⁾第3章函数 $\varphi(x, y)$ の決定 (3) で述べたように凸多角形板で第 i 番目の辺を表わす境界曲線 C_i 上で, 境界条件が一様でない場合には平板全体の撓み函数を一つの式で表わすことは一般に不可能であり, 平板を適当ないくつかの領域 Ω_j に分割し, 各領域 Ω_j における板の撓み $W_j(x, y)$ を一般論で述べた方法に従って次式のごとく仮定する。

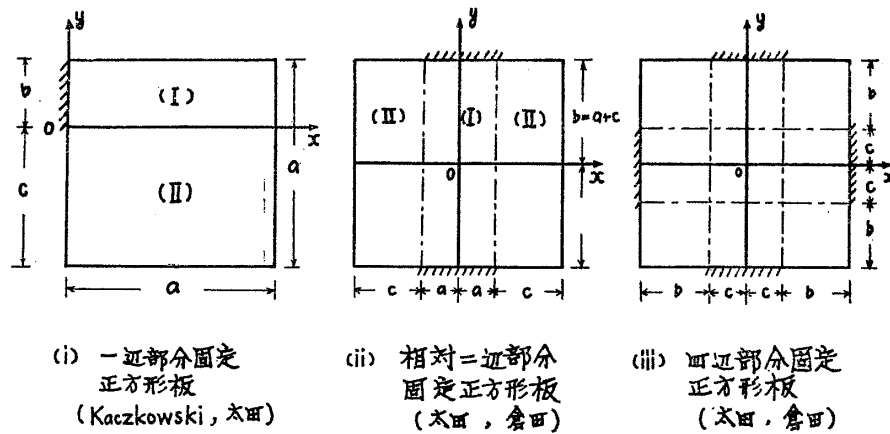
$$W_j(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{(j)} S_{mn}(x, y) \quad (1)$$

ここに $S_{mn}^{(j)}(x, y) = \varphi_j(x, y) x^m y^n$

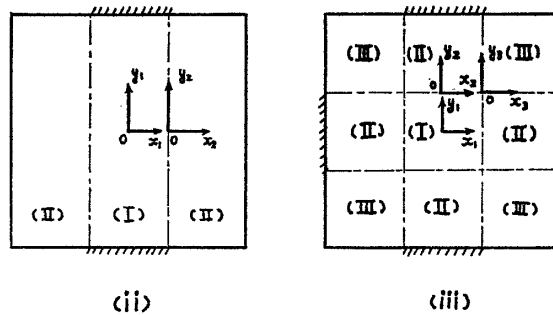
で $\varphi_j(x, y)$ は $W_j(x, y)$ に課せられた幾何学的境界条件を満足するように導入するある定つた函数を表わしている。そして新たに導入した境界線上において, 相隣二つの平板領域に関する四つの量, すなわち $W, \frac{\partial W}{\partial n}, M_n$ および V_n の連続条件のうち, はじめの二つの幾何学的境界条件

$$W_j(x, y) = W_{j+1}(x, y); \quad \frac{\partial W_j}{\partial n} = -\frac{\partial W_{j+1}}{\partial n} \quad (2)$$

だけは少くとも満されるように未知係数 $a_{mn}^{(j)}, a_{mn}^{(j+1)}$ の関係を決定し, 独立にとられた未知係数についてのみ変分操作を行なう必要がある。そこでわれわれは次の第1図に示すような三種の正方形板固有値問題について



第1図 三種の部分固定単純支持正方形板の固有値問題



第2図 (ii) および (iii) の場合の解析に使用する補助座標系 (二軸対称振動の場合)

第1表 各固有値問題において仮定した板の撓み函数 $W_j(x, y)$

固有値問題	領域	撓み函数 $W_j(x, y)$
$a = b + c$	(I)	$x^2(x-a)(y-b)(A_{00} + A_{10}x + A_{01}y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + A_{30}x^3 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3)$
	(II)	$x(x-a)(y+c)(B_{00} + B_{10}x + B_{01}y + B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + \dots)$
$b = a + c$	(I)	$(y_1^2 - b^2)(A_{00} + A_{20}x_1^2 + A_{02}y_1^2 + A_{40}x_1^4 + A_{22}x_1^2y_1^2 + A_{04}y_1^4 + A_{60}x_1^6 + A_{42}x_1^4y_1^2 + A_{24}x_1^2y_1^4 + A_{06}y_1^6)$
	(II)	$(y_2^2 - b^2)(x_2 - c)(B_{00} + B_{10}x_2 + B_{20}x_2^2 + B_{02}y_2^2 + B_{30}x_2^3 + B_{12}x_2y_2^2 + \dots)$
	(I)	$A_{00} + A_{20}x_1^2 + A_{02}y_1^2 + A_{40}x_1^4 + A_{22}x_1^2y_1^2 + A_{04}y_1^4 + A_{60}x_1^6 + A_{42}x_1^4y_1^2 + A_{24}x_1^2y_1^4 + A_{06}y_1^6 \quad (A_{mn} = A_{nm})$
	(II)	$(y_2 - b)^2(B_{00} + B_{01}y_2 + B_{20}x_2^2 + B_{02}y_2^2 + B_{21}x_2^2y_2 + B_{03}y_2^3 + B_{40}x_2^4 + B_{22}x_2^2y_2^2 + B_{41}x_2^4y_2 + B_{23}x_2^2y_2^3 + B_{60}x_2^6 + B_{41}x_2^4y_2^2)$
	(III)	$(y_3 - b)(x_3 - b)(C_{00} + C_{10}x_3 + C_{01}y_3 + C_{20}x_3^2 + C_{11}x_3y_3 + C_{02}y_3^2 + \dots) \quad (C_{mn} = C_{nm})$

実際に解析を行なつてみた。

第1図で鎖線は領域の分割線を示し、() 内の数字は領域の番号を表わしている。(i) の場合を除き、二つの対称軸が存在するから、われわれはこれらの正方形板の二軸対称基本振動だけに注目して解析を進めることにする。(ii) および (iii) の場合での領域の分割線上における幾何学的連続条件式の計算を簡単にするため、各領域毎に補助の座標系を第2図のごとく導入してエネルギーの計算を行なつた。

つぎの第1表は上記三種の固有値問題の解析の際仮定した各領域における板の撓み函数を示す。

第一の分割領域における板の撓み曲面を (i)(ii) の場合は10項、(iii) の場合は6項よりなる x, y の冪級数で表し、 A_{mn} を互に独立な未知係数にとつた。そして第二、第三の領域の板の撓み函数については連続条件から必然的に決められる項の他に独立に変化し得るいくつかの項がとつてある。すなわち (i) の場合は第二の領域について零でない必然的に決定される項が8つ、その他に独立の項が6つと計14項よりなる級数で撓みが表現されている。(ii) の場合には $W_2(x, y)$ を表わす16項の級数のうち10項は A_{mn} の函数として決定され、残りの6項が未定係数を含む項となつている。また、(iii) の場合には $W_2(x_2, y_2)$ の12項よりなる級数のうち4項が未定係数を含んでおり、また $W_3(x_3, y_3)$ は22項よりなつているが、そのうち17項は第一、第二の領域の連続条件式により必然的に決定され、残りの4項のものが未定係数を含む項となる。

第2表 未定係数間に課せられる条件式

問題	連続条件式	未定係数間の関係式
(i)	$(W_1)_{y=0} = (W_2)_{y=0}$	$B_{00} = 0, B_{m0} = -\frac{b}{c} A_{m-1,0}, (1 \leq m \leq 4), B_{m0} = 0 \quad (m \geq 5)$
	$(\frac{\partial W_1}{\partial y})_{y=0} = (\frac{\partial W_2}{\partial y})_{y=0}$	$B_{01} = 0, B_{m1} = \frac{c+b}{c^2} A_{m-1,0} - \frac{b}{c} A_{m-1,1} \quad (1 \leq m \leq 3), B_{41} = \frac{c+b}{c^2} A_{30}$ $B_{m1} = 0 \quad (m \geq 5)$
(ii)	$(W_1)_{x_1=a} = (W_2)_{x_2=0}$	$B_{00} = \frac{b^2}{c} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} a^k A_{k,0}, B_{0m} = \frac{b^2}{c} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} a^k A_{k,m} - \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}-m} a^k A_{k,m-2}$ $B_{08} = -\frac{1}{c} A_{06}, B_{0m} = 0 \quad (m \geq 10) \quad (k: \text{even})$
	$(\frac{\partial W_1}{\partial x_1})_{x_1=a} = (\frac{\partial W_2}{\partial x_2})_{x_2=0}$	$B_{10} = \frac{b^2}{c^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} (a^k + k a^{k-1} c) A_{k,0}, \quad (2 \leq m \leq 6)$ $B_{1m} = \frac{b^2}{c^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}-m} (a^k + k a^{k-1} c) A_{k,m} - \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}-m} (a^k + k a^{k-1} c) A_{k,m-2}$ $B_{18} = -\frac{1}{c^2} A_{06}, B_{1m} = 0 \quad (m \geq 10) \quad (k: \text{even})$
(iii)	$(W_1)_{y_1=c} = (W_2)_{y_2=0}$	$B_{m0} = \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}-m} c^k A_{m,k} \quad (0 \leq m \leq 6) \quad B_{m0} = 0 \quad (m \geq 8) \quad (k: \text{even})$
	$(\frac{\partial W_1}{\partial y_1})_{y_1=c} = (\frac{\partial W_2}{\partial y_2})_{y_2=0}$	$B_{m1} = \frac{2}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}-m} c^{k-1} (\frac{kb}{2} + c) A_{m,k}, \quad (0 \leq m \leq 6) \quad B_{m1} = 0 \quad (m \geq 8) \quad (k: \text{even})$
	$(W_2)_{x_2=c} = (W_3)_{x_3=0}$	$C_{00} = \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l} A_{k,l}, C_{01} = \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l-1} (lb+c) A_{k,l},$ $C_{02} = -\frac{2}{b^4} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l-1} (\frac{l}{2}b+c) A_{k,l} + \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^k B_{k,2},$ $C_{03} = -\frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^k B_{k,2} + \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^k B_{k,3}, C_{04} = -\frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^k B_{k,3}$ $C_{0m} = 0 \quad (m \geq 5) \quad (k: \text{even})$
	$(\frac{\partial W_2}{\partial x_2})_{x_2=c} = (\frac{\partial W_3}{\partial x_3})_{x_3=0}$	$C_{10} = \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l-1} (kb+c) A_{k,l},$ $C_{11} = \frac{1}{b^4} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l-2} (kb+c)(lb+c) A_{k,l}$ $C_{12} = -\frac{2}{b^5} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{b}{2}-k} c^{k+l-2} (kb+c)(\frac{l}{2}b+c) A_{k,l} + \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^{k-1} (kb+c) B_{k,2}$ $C_{13} = -\frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^{k-1} (kb+c) B_{k,2} + \frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^{k-1} (kb+c) B_{k,3}$ $C_{14} = -\frac{1}{b^2} \sum_{k=0}^{\frac{b}{2}} c^{k-1} (kb+c) B_{k,3}, C_{1m} = 0 \quad (m \geq 5) \quad (k: \text{even})$

第2表には見掛けの境界線上における連続条件式より求められる未知係数 $a_{mn}^{(j)}$ 間の関係式を示したものである。一方板の有する全ポテンシャルエネルギー Π は各分割領域ごとに計算されたポテンシャルエネルギーの総和として当然考えられる。このようにして Π が (i) および (ii) の問題では A_{mn} , B_{mn} の二種, (iii) の問題では A_{mn} , B_{mn} および C_{mn} の三種の未定係数群の二次形式として求められるわけであるが, これらの未定係数は第2表で与えられた関係式によつて互に完全には独立になり得ない。すなわち B_{mn} , C_{mn} の未定係数群のうち数多くのものが A_{mn} の函数として表わされていることになる。

このことに注意しながら $\delta\Pi=0$ の条件式を求める必要がある。例えば (iii) の問題では $\Pi=\Pi(A_{mn}, B_{mn}, C_{mn})$ であるから

$$\frac{\partial\Pi}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial\Pi}{\partial A_{mn}} + \sum_{ij} \frac{\partial\Pi}{\partial B_{ij}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial A_{mn}} + \sum_{rs} \frac{\partial\Pi}{\partial C_{rs}} \frac{\partial C_{rs}}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (3)$$

のごとく Π の停留条件式を計算しなければならない。(3) の条件式は A_{mn} の全部と B_{mn} , C_{mn} の係数群のうち A_{mn} と独立なものの凡てについて求めることが必要である。このようにして (3) 式が必要な数だけ凡て求まつたならばそれらの斉次連立一次方程式より未知係数群を消去して振動方程式が求められ, それを解けば固有値が決定されることは一般論で述べた通りである。以上三種の固有値問題をつぎの第3表に示すような条件下で数値解析を行なつた。その解析結果を第4表に示す。

第3表 部分固定正方形板の固有振動問題における解析条件

問題	条 件	項数	撓み函数のうちの独立な未定係数
(i)	$2b=2c=a=L$	16	$A_{00}, A_{10}, A_{01}, A_{20}, A_{11}, A_{02}, A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}; B_{02}, B_{12}, B_{03}, B_{22}, B_{13}, B_{04}$
(ii)	$6a=2b=3c=L$	16	$A_{00}, A_{20}, A_{02}, A_{40}, A_{22}, A_{04}, A_{60}, A_{42}, A_{24}, A_{06}; B_{20}, B_{30}, B_{40}, B_{22}, B_{32}, B_{24}$
(iii)	$6b=6c=L$	14	$A_{00}, A_{20}, A_{40}, A_{22}, A_{60}, A_{42}; B_{02}, B_{03}, B_{22}, B_{23}; C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{24}$

第4表 部分固定正方形固有値問題の解析結果

問題	$\lambda L^2/\pi^2$			
	Kaczowski	倉 田	太 田	著 者
(i)	2.137 ^(10.2%) 2.338 ^(0.7%)		2.26 (4.1%)	2.354
(ii)		2.767 (3.4%)	2.75 (4.0%)	2.861
(iii)		3.442 (3.4%)	3.41 (4.4%)	3.557

() 内は著者の計算との差

L : 正方形板の辺長

第4表からわかるように, この問題では基本固有値に関する限り, 16次位の特有方程式を立てて計算をすれば工学上差支えない精度の解が求められると結論してよいようである。Kaczowski²⁾は積分方程式, 倉田⁴⁾は微分方程式を用いて級数解を, また太田⁵⁾は二重 Fourier 級数に撓み函数を仮定してエネルギー法により解を求めている。

この問題の解析結果だけからこれら四つの方法の優劣の判定は困難であるが, 本報告で取扱つた例題に関する限り計算の煩雑さと労力の点を除外して, 他の三者の得た解析結果はわれわれの解よりも若干精度は上回っているようである。しかしながらそのいずれの方法も高々矩形板の問題にしか適用できないし, また自由境界条件を含むような場合には適用が不可能であると考えられる。

このように考えてくると著者等の方法はこの問題においては特に優れた点を見出せないが, その応用範囲の広さまた計算の難易という点において他の方法に優つており十分実用性があると確信している。なお以上にあげた方法の他に任意形状の平板問題の解析に広く使用できる方法としては階差方程式による方法や, 最近欧米諸国で研究が急激な勢いで発展しつつあるマトリックス解析法がある。これらの方法はわれわれの方法と同様に非常に一般性があり, 電子計算機に掛け易いという点では優れているが, われわれの解と同程度の精度を出すために

はかなり網目を細かくとる必要があり、従つて遙かに高次の特有方程式を解かなければならないものと思われる。いずれにしても任意形状の断続溶接平板(固定縁、支持縁あるいは自由縁のさらに複雑な混合境界値あるいは固定値問題をも含めて)の問題は原理的にこれで解決されたものと思う。実際の数値計算は東大生研に設置されている OKITAC 5090-C 電子計算機を用い、未定係数間の関係式を手で求めただけで、それ以後の計算はすべて電子計算機が遂行している。

3 中央に円孔を有する周辺固定矩形板の自由振動

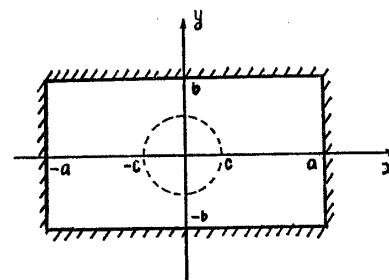
第3図に示すような中央に自由円孔を有する周辺固定矩形板の自由振動の問題を考える。

前報第3章第4節に述べた方法によつて板の撓み函数 $W(x, y)$ を次のように仮定する。

$$W(x, y) = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 f(x, y) \quad (4)$$

ここに

$$f(x, y) = \begin{cases} a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4 + \dots & \text{(二軸対称振動)} \\ a_{01}y + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + a_{41}x^4y + a_{23}x^2y^3 \\ \quad + a_{05}y^5 + \dots & \text{(一軸対称振動, この場合 } y \\ \quad \text{軸が対称軸である)} \\ a_{11}xy + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{51}x^5y + a_{33}x^3y^3 \\ \quad + a_{15}xy^5 + \dots & \text{(二軸非対称振動)} \end{cases}$$



第3図 中央に円孔を有する周辺固定矩形板

この場合円孔周辺は自由縁であるため板の撓み $W(x, y)$ にはその境界条件の影響はなく、外部境界の周辺固定条件のみ充たすように撓みを仮定すればよい。またこの問題でも明らかに二つの対称軸が存在するので解析のはじめから板の撓みを以上のよう三つの場合に分けて仮定し、計算を簡単にすることができる。

さて(4)式のごとく撓み $W(x, y)$ を仮定すれば、それ以後の計算は全く前報に述べた一般論に従つて行えばよいわけで、結局次のような振動数方程式が得られる。

(i) 二軸対称振動

$$\begin{vmatrix} \Phi_{0000} - \lambda^2 I_{0000} & \Phi_{0020} - \lambda^2 I_{0020} & \Phi_{0002} - \lambda^2 I_{0002} & \dots \\ \Phi_{2000} - \lambda^2 I_{2000} & \Phi_{2020} - \lambda^2 I_{2020} & \Phi_{2002} - \lambda^2 I_{2002} & \dots \\ \Phi_{0200} - \lambda^2 I_{0200} & \Phi_{0220} - \lambda^2 I_{0220} & \Phi_{0202} - \lambda^2 I_{0202} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

(ii) 一軸対称振動

$$\begin{vmatrix} \Phi_{0101} - \lambda^2 I_{0101} & \Phi_{0121} - \lambda^2 I_{0121} & \Phi_{0103} - \lambda^2 I_{0103} & \dots \\ \Phi_{2101} - \lambda^2 I_{2101} & \Phi_{2121} - \lambda^2 I_{2121} & \Phi_{2103} - \lambda^2 I_{2103} & \dots \\ \Phi_{0301} - \lambda^2 I_{0301} & \Phi_{0321} - \lambda^2 I_{0321} & \Phi_{0303} - \lambda^2 I_{0303} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

(iii) 二軸非対称振動

$$\begin{vmatrix} \Phi_{1111} - \lambda^2 I_{1111} & \Phi_{1131} - \lambda^2 I_{1131} & \Phi_{1113} - \lambda^2 I_{1113} & \dots \\ \Phi_{3111} - \lambda^2 I_{3111} & \Phi_{3131} - \lambda^2 I_{3131} & \Phi_{3113} - \lambda^2 I_{3113} & \dots \\ \Phi_{1311} - \lambda^2 I_{1311} & \Phi_{1331} - \lambda^2 I_{1331} & \Phi_{1313} - \lambda^2 I_{1313} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

ここに Φ_{mnrs} , I_{mnrs} は第一報の記号によるものとする。また明らかに $\Phi_{mnrs} = \Phi_{rsmn}$, $I_{mnrs} = I_{rsmn}$ であり、 Φ_{mnrs} および I_{mnrs} の数値計算はつぎの公式を基に行なっている。

p, q がともに偶数ならば

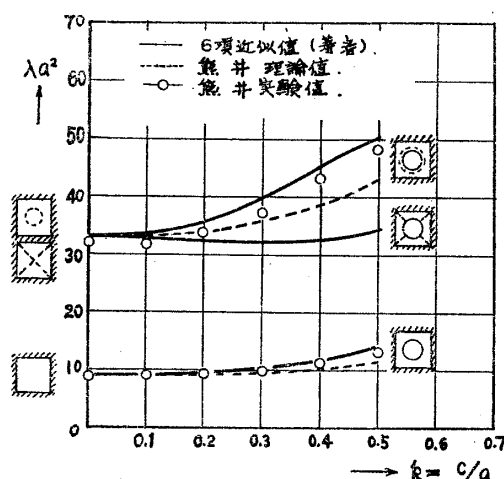
$$\left. \begin{aligned} I_{pq} &= \frac{1}{a^{p+1}b^{q+1}} \iint_D x^p y^q dx dy = \iint_D \xi^p \eta^q d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^p \eta^q d\xi d\eta - \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq k^2} \xi^p \eta^q d\xi d\eta \\ &= a^{p+q+2} \left[\frac{4k_0^{q+1}}{(p+1)(q+1)} - \frac{2\pi k^{p+q+2} \{(p-1)(p-3)\dots 3 \cdot 1\} \{(q-1)(q-2)\dots 3 \cdot 1\}}{(p+q+2)(p+q)(p+q-2)\dots 4 \cdot 2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{ここに } k_0 = \frac{a}{b}, k = \frac{c}{a}, \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}$$

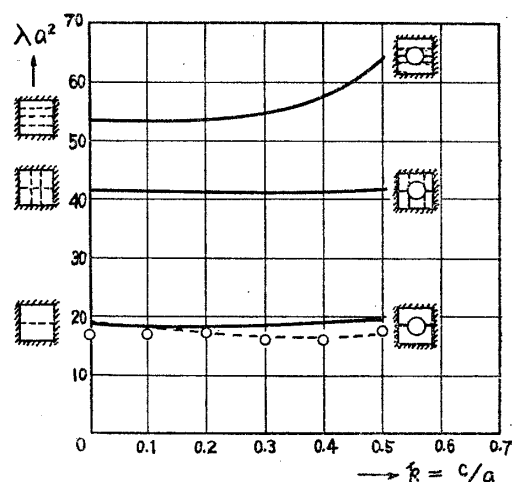
また p, q のうち少くとも一つが奇数ならば

$$I_{pq} = 0$$

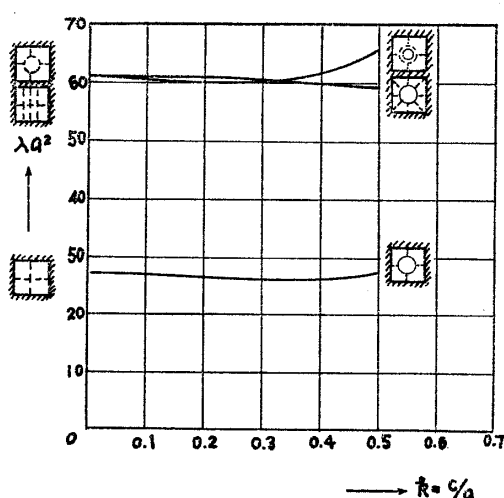
実際の数値計算は撓み函数の式 (4) においてはじめの 6 項をとり、第 2 章の例題と同様諸係数の計算プログラムを作成し、特有方程式の根を求めるサブルーチンに直結させ、航空宇宙技術研究所にある Burrough's Datatron



第 4 図 周辺固定有孔板の自由振動 (二軸対称振動)



第 5 図 周辺固定有孔板の自由振動 (一軸対称振動)



第 6 図 周辺固定有孔正方形板の自由振動 (二軸非対称振動)

図の一軸対称振動の第 1 モードの場合はその逆の結果が得られて不可解であるが)。従つてわれわれの 6 項近似の解析値でも相当高い精度を保有していると考えられる。実際 $k=0$, すなわち孔のない場合の計算値はその誤差がほとんど零であることがわかった。第 4 図でもう一つ注意すべき点は正方形板であるから、 $k=0$ の場合第 2 モードと第 3 モードとが縮退 (degeneration) を起こしていることである。熊井教授の研究では理論解析の方も、第 3 モードの研究しか示されていないようである。

またこれらのグラフをみると固有振動数 λa^2 が孔の径、従つて k の値と共に単調に増大するものとほとんど k の値に無関係で一定であるものとの二種類に大別される。

そして後者の場合余りはずきりとは現れていないが、固有値 λa^2 が k のある値で最小値をとっているようである。この結果を物理的に解釈すると一般に同心円上に節線のできるような振動モードでは k の値と共に振動数は

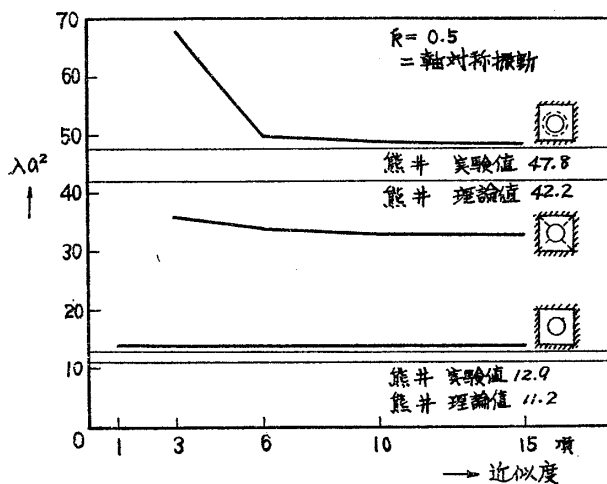
205 電子計算機によりほとんど自動的に遂行されている。

その結果をつぎの第 4 図、第 5 図および第 6 図に示す。図中点線は熊井教授⁵⁾ が微分方程式から出発して Fourier-Bessel 級数の形に求めた解析結果をプロットし直したものでその方法では円孔周辺の境界条件は完全に満足されているが、外側の正方形辺上では選点法によつて境界条件を近似的に合している。従つて外部境界上の拘束度が緩くなるから、その計算値は実際の値よりも低目に出て来る。

これに反してわれわれの方法は理論値の上界を求める Rayleigh-Ritz の方法であるから当然高目の値が得られる筈である。実実際熊井教授は実験も行なつていたのでその平均値をとつて図中丸印で示してみると予想通り実験値は、両者の中間に出て来た。しかも第 4 図の二軸対称振動の場合には、その第 1 モードも第 3 モードもわれわれの得た理論曲線の方に実験値は近く出ている (第 5

単調に増大し、円孔の存在によつて差引かれる板の曲げ歪エネルギーよりも慣性力のエネルギーが次第に大きくなることを物語っている。それに反し板の周辺に平行して節線ができるような振動モードでは板の曲げ歪エネルギーと慣性力のエネルギーの減少率が孔の無い場合の両者の比にほとんど一致し k の変化に対して振動数の変化が鈍くなると考えることができる。

数値計算は $k=0.5$ までしか行なっていないが k の値が次第に 1 に近づくにつれて物理的には板としての特性が次第に失われてくるし、また計算技術上の点でも (8) 式で与えられる I_{pq} の計算値が小さくなり、従つてその精度が急激に低下して振動数方程式中の係数の誤差が高次の項程悪くなる。このようなことから $k=0.5$ 以上

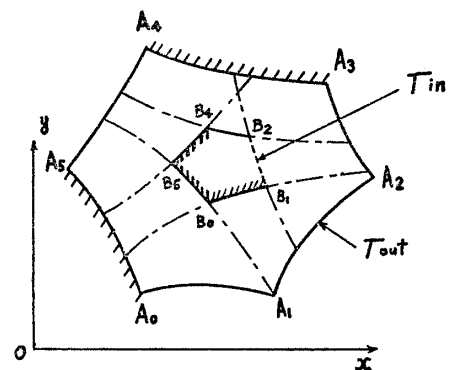


第7図 有孔板振動解析値の収束性 ($k=0.5$, 二軸対称振動)

合、例えば凸多角形孔などの場合についての撓み函数の仮定の仕方について若干考察を加えてみよう。そのような場合には第1報第3章、第3節において取扱つた場合と全く同様で、孔の周辺において、固定または支持の辺がある場合、撓み函数を一つの式で表わすことはできず、どうしても領域をいくつかに適当に分割し、その各分割領域について一般論に従つて撓み函数を仮定し、仮の分割線上で相隣る領域の撓み函数が、少くとも撓みとその傾斜の連続性を満足するように未定係数間の関係を求めてやらねばならない。(第8図参照) それ以後の計算はこの報告の第2章に述べたようにやればよい。

の場合の計算値は実験値と大幅に喰ひ違つて来るような結果も出てくる。しかしながら工学上問題となる場合は恐らく k が 0.5 以下と考えられるのでこの位の数値解析で実用上は十分であると思う。第7図は $k=0.5$ で二軸対称振動の場合について解の収束性を吟味したものであるが、この図からわかるように6項近似でも実用上は十分と考えられるが、10項近似まで解析を進めれば申し分ないであろう。

以上で有孔正方形板の固有値問題についてわれわれの行なつた研究の報告は終るが、最後に孔の形が一価連結曲線で解析的に表われないような場



第8図 多角形孔を有する曲線多角板の一例

4 結 論

前報の一般論に基づいて、船体構造上重要であるにも拘らず従来余り研究が行なわれていなかった断続溶接された正方形板と中央に円孔を有する正方形板の自由振動について、Rayleigh-Ritzの方法による解析を実行し、これまで行なわれた研究結果と良く一致することが確められた。すなわちこれら二つの問題においてもわれわれの方法の実用性が十分立証されたわけであるが、このぐらゐの複雑な問題になるとほとんどすべての計算が初等的ではあるが、その計算量はばう大となり卓上計算機はおろか、中型の電子計算機でも相当困難である。従つてどうしても大型電子計算機による計算プロセス全体の自動化が強く要望されるわけであり、われわれもこの問題を将来の研究課題としてとり上げて行く予定である。この二つの問題研究初期の段階においては、科学技術庁航空宇宙技術研究所第二機体部構造研究室築地恒夫技官の協力を得、部分固定正方形板の解析は東大生研第二部吉村信敏助手が、また有孔正方形板の解析は航空宇宙技術研究所第一機体部装備研究室泉日出夫技官が実行した。

本報告を終るに当つて、これら三氏のご協力に心から感謝する次第である。

参考文献

- 1) 吉識雅夫, 川井忠彦: 平板の曲げ振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について(I)
造船協会論文集 117 号 pp.153~163 (昭和 40 年)
 - 2) Zbigniew Kaczkowski: Orthotropic Rectangular Plates with Arbitrary Boundary Conditions,
IX^e CONGRES INTERNATIONAL DE MECHANIQUE APPLIQUEE ACTES TOME VI (1957)
 - 3) 太田友弥, 浜田実他 3 名: 部分的に固定された支持辺を持つ正方形板の基本振動数,
日本機械学会論文集第 28 巻, 194 号 (昭和 37 年 10 月)
 - 4) Muneaki Kurata & Hirokazu Okamura: Natural Vibration of Partially Clamped Plates,
Proc. of the America Society of Civil Engineers, (June, 1963)
 - 5) Toyoji Kumai: Flexural Vibration of the Square Plate with a Central Circular Hole,
Proc. of the 2nd Japan National Congress for Applied Mechanics. (1952)
-