

(昭和 41 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

無限長の梁を伝わる振動の遮断について

正員 野崎政治*

Isolation of the Wave When It Propagates along Infinitely Long Beam

By Masaharu Nozaki, Member

Summary

This paper deals with the reflection and passing through of the stationary flexural wave when it propagates along the infinitely long beam with a local appendage on it.

In Part 1, the case of the concentrated impedance was described and some examples of absorbing the total propagating energy by the concentrated impedance was represented.

In Part 2, the case of the distributed impedance, namely that of general damping materials was dealt with. When the beam has the distributed impedance in some region the passing through of the flexural wave could be made less by increasing the impedance, but reflection of the wave also increase in this case.

The possibility of increasing the impedance was found when the thickness directional resonance of the damping materials could be used.

緒 言

最近、防衛庁の艦船においては被探知防止、ソナー（水中探信装置）の性能向上等の目的から、構造を伝達する雑音を小さくすることが重要な問題となってきた。これは一般の船舶においても、居住区における騒音低減等と関連して重要な研究テーマであると思う。本論文は無限長梁を伝達する振動の、途中に設けられた附加物による反射、透過、減衰を理論的に検討したもので、第1部は集中インピーダンスの場合を、第2部は分布インピーダンスの場合を取り扱っている。

第1部 集中インピーダンスの場合

1 梁の運動方程式の一般解

一般に梁の横方向運動は次の方程式で表わされる。

$$EI\partial^4 W/\partial x^4 + \rho A_r \partial^2 W/\partial t^2 = 0 \quad (1.1)$$

W : 梁の横方向変位 E : ヤング率

I : 断面の慣性 2 次モーメント ρ : 密度

A_r : 断面積

$$W = e^{i\omega t} w(x) \quad (1.2)$$

なる解を考えると

$$w'''' - K_B^4 w = 0 \quad \text{ここに } K_B^4 = \rho A_r \omega^2 / EI, \quad i = \sqrt{-1}$$

これより w の一般解は

$$w = Ae^{-iK_B x} + Be^{-K_B x} + Ce^{+iK_B x} + De^{+K_B x} \quad (1.3)$$

となる

ここで A, B, C, D は任意常数

原稿受付 昭和 41 年 1 月 10 日

* 防衛庁技術研究所

同様にして、縦振動の方程式は

$$\partial^2 U / \partial t^2 = C_L^2 \partial^2 U / \partial x^2 \quad (1.4)$$

$$U : 縦方向変位 \quad C_L = (E/\rho)^{1/2}$$

$$U = e^{i\omega t} u(x) \quad (1.5)$$

なる解を考えると

$$C_L^2 u'' + \omega^2 u = 0$$

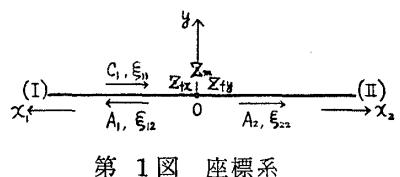
$$\text{これより } u \text{ の一般解は } K_L = \frac{\omega}{C_L} \text{ とおいて}$$

$$u = \xi_1 e^{iK_L x} + \xi_2 e^{-iK_L x} \quad (1.6)$$

となる。 ξ_1, ξ_2 は任意常数

2 集中インピーダンスがあるときの方程式

座標系は第1図のようにとり、付加物のある点を原点とする。上下対称な梁を考えその中立軸上にある付加物



第1図 座標系

の回転に対するインピーダンスを Z_m , x, y 方向のインピーダンスをそれぞれ Z_{fx}, Z_{fy} とする I 部材にそつて原点方向に振幅 C_1 なる曲げ波、振幅 ξ_{11} なる縦波が入つてくる場合を考える。このとき ∞ 点で有限な項だけを考えればよいので、各部材の変位は(1.3)、(1.6) からつぎのように表わすことができる。

$$\text{I 部材 } x_1 \text{ 方向 } u_1 = \xi_{11} e^{iK_{L1} x_1} + \xi_{12} e^{-iK_{L1} x_1} \quad (2.1)$$

$$y \text{ 方向 } w_1 = A_1 e^{-iK_{B1} x_1} + B_1 e^{-iK_{B1} x_1} + C_1 e^{+iK_{B1} x_1} \quad (2.2)$$

$$\text{II 部材 } x_2 \text{ 方向 } u_2 = \xi_{22} e^{-iK_{L2} x_2} \quad (2.3)$$

$$y \text{ 方向 } w_2 = A_2 e^{-iK_{B2} x_2} + B_2 e^{-iK_{B2} x_2} \quad (2.4)$$

K につけられた二つのサフィックスのうち後者は部材をあらわしている。

原点における変位、力、モーメントの平衡を (2.1)～(2.4) で表わすと次の連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & +i\eta_3^{-\frac{1}{2}} & +\eta_3^{-\frac{1}{2}} \\ -1 & \eta_1 + \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +i & -1 & -i\eta_2\eta_3^{-\frac{3}{2}} - i\gamma & +\eta_2\eta_3^{-\frac{3}{2}} - i\gamma \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -\eta_2\eta_3^{-1} - \delta & +\eta_2\eta_3^{-1} + i\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{11} \\ -C_1 \\ -iC_1 \\ -\xi_{11} \\ +iC_1 \\ +C_1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{ここで } \eta_1 = A_{r2}/A_{r1} \quad A_{rk} : k \text{ 部材の断面積}$$

$$\eta_2 = I_2/I_1 \quad I_k : k \text{ 部材の断面 2 次モーメント}$$

$$\eta_3 = r_{g2}/r_{g1} \quad r_{gk} : k \text{ 部材の環動半径}$$

$$\beta = \frac{\omega Z_{fx}}{EA_{r1}K_{L1}}, \quad \gamma = \frac{\omega Z_{fy}}{K_{B1}^3 EI_1}, \quad \delta = \frac{\omega K_{B2} \cdot Z_m}{K_{B1}^2 EI_1}$$

以上において I 部材と II 部材は同一材料であるとした。

3 方程式の解

3.1 縦波だけが伝わつて来る場合

(2.5) を解いて

$$\left. \begin{aligned} R(\text{反射係数}) &= \frac{\xi_{12}}{\xi_{11}} = \frac{1 - \eta_1 - \beta}{1 + \eta_1 + \beta} = \frac{1 - \eta_1 - \beta_1 - i\beta_2}{1 + \eta_1 + \beta_1 + i\beta_2} \\ T(\text{透過係数}) &= \frac{-\xi_{22}}{\xi_{11}} = \frac{2}{1 + \eta_1 + \beta} = \frac{2}{1 + \eta_1 + \beta_1 + i\beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここで $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ とおいた。

3.2 曲げ波だけが伝わつてくる場合

I 部材と II 部材が同一材料、同一形状の場合について考える。前節 (2.5) 式を解いて、つぎの解を得る。

無限長の梁を伝わる振動の遮断について

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C_1 \frac{-2i\gamma + 2i\delta + \gamma\delta}{E_1} = C_1 \frac{2\gamma_2 - 2\delta_2 + \gamma_1\delta_1 - \gamma_2\delta_2 + i(-2\gamma_1 + 2\delta_1 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1)}{E_2} \\ B_1 &= C_1 \frac{-2\gamma - 2i\delta - (1+i)\gamma\delta}{E_1} \\ &= C_1 \frac{-2\gamma_1 + 2\delta_2 - \gamma_1(\delta_1 - \delta_2) + \gamma_2(\delta_1 + \delta_2) - i\{2\gamma_2 + 2\delta_1 + \gamma_1(\delta_1 + \delta_2) + \gamma_2(\delta_1 - \delta_2)\}}{E_2} \\ A_2 &= C_1 \frac{-2\gamma + 2\delta - 8i}{E_1} = C_1 \frac{-2\gamma_1 + 2\delta_1 + i(-2\gamma_2 + 2\delta_2 - 8)}{E_2} \\ B_2 &= C_1 \frac{2\gamma - 2i\delta}{E_1} = C_1 \frac{2\gamma_1 + 2\delta_2 + i(2\gamma_2 - 2\delta_1)}{E_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここで $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= (2+2i)\gamma + (-2+2i)\delta + i\gamma\delta + 8i \\ &= E_2 = 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\delta_1 - 2\delta_2 - (\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1) + i(2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\delta_1 - 2\delta_2 + \gamma_1\delta_1 - \gamma_2\delta_2 + 8) \end{aligned} \right\}$$

以下簡単のため $C_1 = 1$ とする。

なお、当然のことであるが、0点に入つてくるエネルギーは、0点から放射されるエネルギーと0点のインピーダンスで消費されるエネルギーの和に等しいことが証明できる。

4 検 討

4.1 縦波の場合

(3.1) 式から、透過波を小さくするにはできるだけ絶対値の大きなインピーダンスを使えばよいこと、 $\beta_1 = 1 - \gamma_1$ かつ β_2 を可及的に小にしたとき反射波が小さくなること等がわかる。もちろん物理的な条件から $\beta_1 \geq 0$ である。

4.2 曲げ波の透過波および反射波をいずれも0にするための条件

透過波を0にし、かつ反射波をできるだけ小さくするのが集中インピーダンスに要求される条件である。透過波を0にするには(3.2)より

$$\left. \begin{aligned} -2\gamma_1 + 2\delta_1 &= 0 \\ -2\gamma_2 + 2\delta_2 - 8 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

同様にして、反射波を0にするには(3.2)より

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma_2 - 2\delta_2 + \gamma_1\delta_1 - \gamma_2\delta_2 &= 0 \\ -2\gamma_1 + 2\delta_1 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(4.1) (4.2) から物理的に有意な解を求める

$$\gamma_1 = 2, \gamma_2 = -2, \delta_1 = 2, \delta_2 = 2$$

これより

$$Z_{f,y} = (2-2i) \cdot \omega^{1/2} \cdot \rho A_r (C_L \cdot r_g)^{1/2} \quad (4.3)$$

$$Z_m = (2+2i) \omega^{-1/2} \rho A_r (C_L \cdot r_g)^{3/2} \quad (4.4)$$

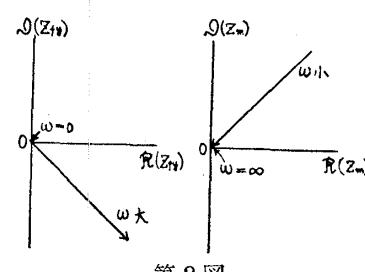
r_g : 梁の環動半径

(4.3) (4.4) を複素平面でしめすと第2図のようになる。図中の \Re , \Im はそれぞれ実部, 虚部をしめす。 ω の全領域でこのような特性をもつ $Z_{f,y}$, Z_m を得るのは困難であろうが、特定の遮断したい周波数が与えられた場合には、所要のインピーダンスを持つようにするのは、理論的には可能である。後に計算例をしめす。

4.3 曲げ波の透過波を0にし反射波を最小にする条件

(4.3), (4.4) なるインピーダンスが、他の制約のために合成できない場合には、透過波を0とし、反射波をできるだけ小さくするのが望ましいことが多い。これは

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \delta_1 \\ \gamma_2 &= \delta_2 - 4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1) \text{ のもとで}$$



第2図

のもとで

$$|A_1|^2 = \frac{\delta_1^4 + \delta_1^2(2\delta_2^2 - 8\delta_2) + \delta_2^4 - 8\delta_2^3 + 32\delta_2^2 - 64\delta_2 + 64}{\delta_1^4 + 8\delta_1^3 + \delta_1^2(2\delta_2^2 - 8\delta_2 + 32) + \delta_1(8\delta_2^2) + \delta_2^4 - 8\delta_2^3 + 32\delta_2^2} \quad (4.5)$$

を最小にする問題に帰着される。この条件内で実現可能な δ_1, δ_2 を求めればよい。もちろん $r_1 \geq 0, \delta_1 \geq 0$ は満足されねばならない。

5 計 算 例

縦波の場合は簡単なので、ここでは曲げ波の場合のみを考える。

5.1 ダンバーなき場合

ダンパー r_1, δ_1 がなく、 r_2, δ_2 だけで構成されるインピーダンスの場合の完全反射 ($A_2=0$) を考える。

条件式は (3.2) から

$$r_2 = \delta_2 - 4$$

集中インピーダンスの重量 W 、環動半径 R_g とすると (2.6) から

$$r_2 = \frac{\omega^2 \frac{W}{g}}{K_B^3 EI}, \quad \delta_2 = -\frac{\omega^2 R_g^2 \frac{W}{g}}{K_B EI}$$

変形して、 $W \gg \rho g A_r \lambda_B$ のとき (λ_B : 曲げ波の波長)

$$\lambda_B = 2\pi R_g \quad (5.1)$$

$$f = \frac{C_L \cdot r_g}{2\pi R_g^2} \quad (5.2)$$

(f : 振動数)

このような波長、振動数の波は集中インピーダンスによつて完全に反射することがわかる。

つぎに完全透過 ($A_1=0$) の場合を考える。

条件式は (3.2) から $2(r_2 - \delta_2) = r_2 \delta_2$

$$\therefore 2 \left(\frac{\omega^2 \frac{W}{g}}{K_B^3 EI} - \frac{\omega^2 R_g^2 \frac{W}{g}}{K_B EI} \right) = \frac{\omega^2 R_g^2 \frac{W}{g}}{K_B EI} \cdot \frac{\omega^2 \frac{W}{g}}{K_B^3 EI}$$

変形して $\pi W \gg \rho g A_r \cdot \lambda_B$ のとき

$$f = 0.0729 \frac{C_L \cdot t^{5/3}}{R_g^{4/3} \left(\frac{V_m}{b} \right)^{2/3}} \quad (5.3)$$

t : 梁の板厚 b : 梁の幅

V_m : 集中インピーダンスの体積 (集中インピーダンスは梁と同一材質とする)

この振動数の波は集中インピーダンスを完全に透過する。

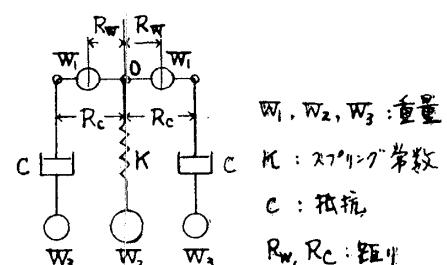
以上の (5.1)～(5.3) は M. C. Junger の文献⁽¹⁾で与えられるものとほとんど一致している。

5.2 反射波および透過波をいずれも 0 にするインピーダンス

第3図のようなエレメントよりなる装置を考えた場合 0 点における Z_{fy}, Z_m を計算して次式を得る。(インピーダンスの計算については文献 (2) 参照のこと。)

$$Z_{fy} = \frac{2 \times \frac{1}{C}}{\left(\frac{1}{C}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega W_3}\right)^2} - i \left(\frac{1}{\frac{\omega}{C} - \frac{g}{\omega W_2}} - 2\omega \frac{W_1}{g} - 2 \frac{\frac{g}{\omega W_3}}{\left(\frac{1}{C}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega W_3}\right)^2} \right) \quad (5.4)$$

$$Z_m = \frac{2 \times \frac{1}{C} R_c^2}{\left(\frac{1}{C}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega W_3}\right)^2} + i \left(\frac{2 \frac{g}{\omega W_3}}{\left(\frac{1}{C}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega W_3}\right)^2} R_c^2 + 2\omega \frac{W_1}{g} R_w^2 \right) \quad (5.5)$$



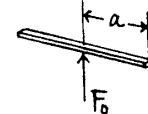
第3図

いま一例として進行波が伝達する beam の断面が 0.3cm 厚×3.8cm 幅の場合を考えると、完全に進行波を吸収するのに必要なインピーダンスは (4.3), (4.4) から

$$\left. \begin{aligned} Z_{fy} &= (2-2i)\omega^{1/2} \times 0.192 \times 10^{-2} \frac{\text{kg-sec}}{\text{cm}} \\ Z_m &= (2+2i)\omega^{-1/2} \times 0.854 \times 10^2 \text{ kg-cm-sec.} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

(5.4)～(5.6) から ω が与えられると、これに対応して適当な $W_1, W_2, W_3, K, C, R_W, R_C$ を定めることができ。 $f=100, 1000$ の場合に対する数値例を下表にしめす。

f	W_1	W_2	W_3	K	C	R_W	R_C
100	0.5kg	0.2kg	0.4kg	68.8kg/cm	0.05kg/cm/S	2.92cm	8.42cm
1000	0.5	0.2	0.2	6762*	0.155	0.54	2.66



第4図

この表で $f=1000$ の場合 K が非常に大きな値になるが (*印) ($K+W_2$) の系の代りに
弾性体 (例えば両端自由な梁等) を使うことも考えられる。(第4図)

両端自由な梁を中央点で加振した場合の駆動点インピーダンス Z_0 は Snowdon により次式で与えられる。⁽³⁾

$$\begin{aligned} \frac{Z_0}{i\omega M_b} &= \frac{1}{na} \left[\frac{\sinh na \cos na + \cosh na \sin na}{1 + \cosh na \cdot \cos na} \right] \\ (na)^4 &= \frac{\omega^2 \rho a^4}{\kappa^2 E} = \frac{\omega^2}{\kappa^2 C_L^2} \cdot a^4 \end{aligned} \quad (5.7)$$

M_b : 梁の質量 ρ : 密度

a : 梁の長さの1/2 κ : 梁断面の環動半径

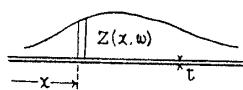
前例において $f=1000$ の場合 ($K+W_2$) の系に要求されるインピーダンスは $-6.75i\text{ kg/cm/sec}$ である。ゆえにいま自由梁とし 0.3cm 厚×3.8cm 幅の断面を使うとすると (5.7) 式から梁の長さは約 10cm となる。

以上一応の計算例をしめしたが、集中インピーダンス法では

1. 各々のエレメントの数値変動に対する全体のインピーダンスの変化が大きい。
2. 各エレメントおよびその接続部における機械的遊びの影響を計算に入れるがたい。

等の欠点がある。

第2部 分布インピーダンスの場合



曲げ波が分布したインピーダンスを付加された梁の中を伝達する場合の反射透過について考える。

第5図

6 インピーダンスを持つ部分の運動方程式の解

梁の単位長さについての W 方向のインピーダンスを $Z(x, \omega)$ とすると、梁の運動方程式は (1.1) にインピーダンスによる項を加えて

$$EI\partial^4 W/\partial x^4 + \rho A_r \partial^2 W/\partial t^2 = -Z(x, \omega) V \quad (6.1)$$

W : 変位 $V=\partial W/\partial t$

(ここでは簡単のため W 方向以外のインピーダンスはすべて省略して考えることにする)

(6.1) において

$$W=w(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (6.2)$$

とすると

$$EIw'''' - \rho A_r \omega^2 w(x) = -Z(x, \omega) i\omega \cdot w(x) \quad (6.3)$$

ここで複素項はすべて実部と虚部に分け、実部に (r), 虚部に (j) なるサフィックスを付す。

すなわち $w=w_r(x)+iw_j(x)$, $Z=Z_r(x, \omega)+iZ_j(x, \omega)$ とおいて (6.3) に入れ、実部と虚部を左辺にまとめて、それぞれを 0 とおいて

$$\left. \begin{aligned} EIw_r''' - \rho A_r \omega^2 w_r - (w_j Z_r + w_r Z_j) \omega &= 0 \\ EIw_j''' - \rho A_r \omega^2 w_j + (w_r Z_r - w_j Z_j) \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

いま付加物のインピーダンスが x 方向に一定の場合を考える。 $Z = Z_r + iZ_j = \text{const.}$ なるゆえ (6.4) は常数係数の連立微分方程式となる。

$$\left. \begin{array}{l} w_r = Pe^{\lambda x} \\ w_j = Qe^{\lambda x} \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

とおいて (6.4) に入れると

$$\left. \begin{array}{l} EI\lambda^4 - (\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega) P - Z_r \omega \cdot Q = 0 \\ Z_r \omega P + \{EI\lambda^4 - (\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega)\} Q = 0 \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

0 でない P, Q が存在するためには

$$\left| \begin{array}{cc} EI\lambda^4 - (\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega) & -Z_r \omega \\ Z_r \cdot \omega & EI\lambda^4 - (\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega) \end{array} \right| = 0 \quad (6.7)$$

これより

$$\lambda^4 = \frac{1}{EI} \{(\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega) \pm Z_r \cdot \omega i\} \quad (6.8)$$

この根のうち、第1象限にある2根を $\lambda_q (q=1, 2)$ とすると他の根は $i\lambda_q, -\lambda_q, -i\lambda_q$ と表わされる。(6.8)における(+) 符号の根を $q=1$, (-) 符号の根を $q=2$ とする。

$$(6.6) \text{ から } \frac{P}{Q} = \frac{EI\lambda^4 - (\rho A_r \omega^2 + Z_j \omega)}{-Z_r \cdot \omega} = \begin{cases} -i & \dots \dots (6.8) \text{ の正号をとつたとき} \\ +i & \dots \dots (6.8) \text{ の負号をとつたとき} \end{cases}$$

すなわち

$$Q = \begin{cases} +iP & \dots \dots (6.8) \text{ の正号をとつたとき} \\ -iP & \dots \dots (6.8) \text{ の負号をとつたとき} \end{cases}$$

この結果を $w = w_r + iw_j$ に入れると (6.8) 式の正号の根はすべて消えることがわかる。ゆえに

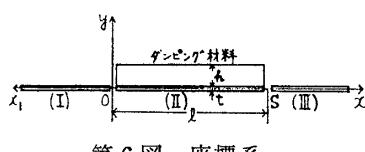
$$w = P_1 e^{i\lambda_2 x} + P_2 e^{i\lambda_2 x} + P_3 e^{-i\lambda_2 x} + P_4 e^{-i\lambda_2 x} \quad (6.9)$$

$P_1 \sim P_4$ は任意常数

と表わすことができる。以下 λ_2 を単に λ と書くことにする。

7 長さ l の間にだけ減衰材料が附加された場合の解

座標系を第6図のようにとる。II部材（長さ l ）に減衰材料が付加されているとする。各部材の変位はつぎのように表わされる。以下簡単のため各部材の材料、断面形状は同一とし、また (2.2), (2.4) 式と同じ符号を使うこととする。



$$\left. \begin{array}{l} \text{I 部材の変位 } A_1 e^{-iK_B x_1} + B_1 e^{-K_B x_1} + C_1 e^{+iK_B x_1} \\ \text{II 部材の変位 } P_1 e^{\lambda x} + P_2 e^{i\lambda x} + P_3 e^{-\lambda x} + P_4 e^{-i\lambda x} \\ \text{III 部材の変位 } A_2 e^{-iK_B x_2} + B_2 e^{-K_B x_2} \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

いま、 C_1 を I 部材から原点に向けて入つてくる既知の曲げ波の振幅とし、0点、S点における境界条件から8つの未知係数のうち A_1, A_2 を求めれば曲げ波の反射、透過が求められることになる。

0点およびS点における変位、力、曲げモーメントの平衡から次の連立方程式を得る。

いまの場合減衰材料が梁の中立軸から偏心しているので、縦波も生じるがその量は小さいと思われる所以ここでは省略した。

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ iK_B & K_B & 0 & 0 & \lambda & i\lambda & -\lambda & -i\lambda \\ -K_B^2 & K_B^2 & 0 & 0 & (\lambda)^2 & (i\lambda)^2 & (-\lambda)^2 & (-i\lambda)^2 \\ -iK_B^3 & K_B^3 & 0 & 0 & (\lambda)^3 & (i\lambda)^3 & (-\lambda)^3 & (-i\lambda)^3 \\ 0 & 0 & -e^{-iK_B l} & -e^{-K_B l} & e^{i\lambda l} & e^{i\lambda l} & e^{-\lambda l} & e^{-i\lambda l} \\ 0 & 0 & iK_B e^{-iK_B l} & K_B e^{-K_B l} & \lambda e^{i\lambda l} & i\lambda e^{i\lambda l} & -\lambda e^{-\lambda l} & -i\lambda e^{-i\lambda l} \\ 0 & 0 & K_B^2 e^{-iK_B l} & -K_B^2 e^{-K_B l} & (\lambda)^2 e^{i\lambda l} & (i\lambda)^2 e^{i\lambda l} & (-\lambda)^2 e^{-\lambda l} & (-i\lambda)^2 e^{-i\lambda l} \\ 0 & 0 & -iK_B^3 e^{-iK_B l} & K_B^3 e^{-K_B l} & (\lambda)^3 e^{i\lambda l} & (i\lambda)^3 e^{i\lambda l} & (-\lambda)^3 e^{-\lambda l} & (-i\lambda)^3 e^{-i\lambda l} \end{array} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ iK_B C_1 \\ K_B^2 C_1 \\ -iK_B^3 C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

この方程式の解に出てくる8階の行列式は、行列式の上から4行について Laplace の展開を行ない、Vandermonde の公式を適用することにより比較的簡単に計算を行なうことが可能である。

この方程式を解いて次の解を得る。なお簡単のため $C_1=1$ とおいた。

$$A_1 = i \left(\frac{\lambda^4}{K_B^4} - 1 \right) \times \begin{cases} e^{(-\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^2 + e^{(\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)^2 - 4 \left(\frac{\lambda^4}{K_B^4} - 1 \right) \\ + e^{(-\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)^2 + e^{(\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^2 \\ - e^{(-\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right)^4 \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 - e^{(\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right)^4 \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 + 4 \left(\frac{\lambda^4}{K_B^4} - 1 \right)^2 \\ - e^{(-\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)^4 - e^{(\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^4 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$A_2 = 4e^{iK_B t} \frac{\lambda}{K_B} \begin{cases} -e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right)^2 + e^{+\lambda t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right)^2 \\ + ie^{-i\lambda t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^2 - ie^{+i\lambda t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)^2 \\ - e^{(-\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right)^4 \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 - e^{(\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right)^4 \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} + 1 \right)^2 \\ + 4 \left(\frac{\lambda^4}{K_B^4} - 1 \right)^2 - e^{(-\lambda+i\lambda)t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)^4 - e^{(\lambda-i\lambda)t} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^4 \end{cases} \quad (7.4)$$

8 減衰のある棒の縦振動における駆動点インピーダンス⁽⁴⁾

従来は減衰材料の働きとしては、梁と平行な方向の変形による damping を考える場合が多かつたが、減衰材料が soft でかつ厚い場合には減衰材料の厚さ方向における変形を考慮する方が適当であると考えられるようになつてきた。厚さ方向の変形を考慮したものには、最近 E. E. Ungar 等の論文⁽⁵⁾があるが、これは系全体の loss factor を求めたもので反射波の影響等は含まれていない。ここではヒステリシス型のダンピングを有する第7図のような棒が縦振動をする場合の駆動点インピーダンスを求めこれを(6.1)式におけるZとしようとするものである。すなわち棒の長さが、ダンパー材の厚さに相当する。第7図にしめすように、棒OTがO点において駆動されるときの、駆動点における力と速度を求めるべき。

棒の運動方程式は

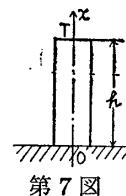
$$\rho_d A_d \partial^2 u / \partial t^2 = K_d * A_d \partial^2 u / \partial x^2 \quad (8.1)$$

u : 縦方向変位 A_d : 断面積

ρ_d : 密度 K_d : 適当な弾性係数

$K_d^* = K_d (1 + i\eta_d)$ η_d : 減衰材料の loss factor

サフィックスの d はダンパーをしめす。



第7図

とすると

$$C_d^2 (1 + i\eta_d) v'' + \omega^2 v = 0$$

$$v(x) = e^{\mu x}$$

とおいて

$$\mu^2 C_d^2 (1 + i\eta_d) + \omega^2 = 0$$

$$\therefore \mu = \pm \left\{ \frac{\omega}{C_d} \frac{1}{D_E} \left(\frac{D_E - 1}{2} \right)^{1/2} + i \frac{\omega}{C_d} \frac{1}{D_E} \left(\frac{D_E + 1}{2} \right)^{1/2} \right\}$$

ここで

$$D_E = (1 + \eta_d^2)^{1/2}$$

負符号に対応する根を μ_1 、正符号に対応する根を μ_2 とすると一般解は

$u = (v_1 e^{\mu_1 x} + v_2 e^{\mu_2 x}) e^{i\omega t}$ となる。 v_1, v_2 は任意常数、今 $x=0$ において $u=U_0 e^{i\omega t}$ なる変位をうけるときを考える。

境界条件は

$$x=0 \text{ にて } v_1 + v_2 = U_0$$

$$x=h \text{ にて } \mu_1 v_1 e^{\mu_1 h} + \mu_2 v_2 e^{\mu_2 h} = 0$$

これより

$$u = \frac{U_0}{\mu_2 e^{\mu_2 h} - \mu_1 e^{\mu_1 h}} (\mu_2 e^{\mu_2 h + \mu_1 x} - \mu_1 e^{\mu_1 h + \mu_2 x}) e^{i\omega t}$$

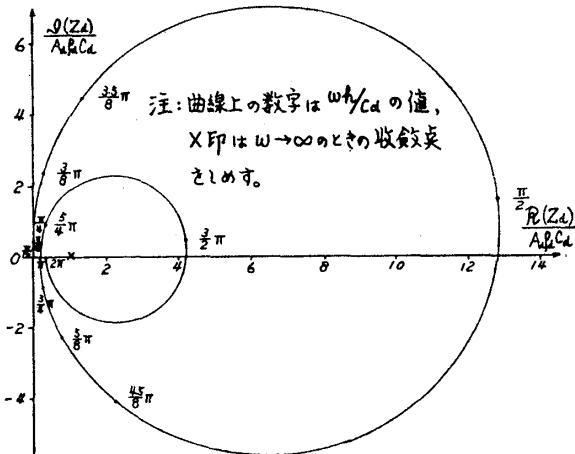
$$F_{x=0} = -K_d * A_d u'_{x=0} = -K_d * A_d \frac{U_0}{\mu_2 e^{\mu_2 h} - \mu_1 e^{\mu_1 h}} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 (e^{\mu_2 h} - e^{\mu_1 h}) e^{i\omega t}$$

ゆえに

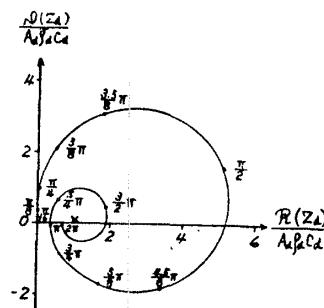
Z_d (driving point impedance)

$$\begin{aligned} Z_d &= \frac{i A_d \rho_a C_d}{\left\{ \frac{1}{D_E} \left(\frac{D_E - 1}{2} \right)^{1/2} + i \frac{1}{D_E} \left(\frac{D_E + 1}{2} \right)^{1/2} \right\}} \\ &\times \frac{\left\{ 1 - \exp \left[\frac{-2}{D_E} \left(\frac{D_E - 1}{2} \right)^{1/2} - i \frac{2}{D_E} \left(\frac{D_E + 1}{2} \right)^{1/2} \right] \frac{\omega h}{C_d} \right\}}{\left\{ 1 + \exp \left[\frac{-2}{D_E} \left(\frac{D_E - 1}{2} \right)^{1/2} - i \frac{2}{D_E} \left(\frac{D_E + 1}{2} \right)^{1/2} \right] \frac{\omega h}{C_d} \right\}} \end{aligned}$$

$\eta_d = 0.10, 0.25$ の場合について $\frac{Z_d}{A_d \rho_a C_d}$ を求めると、それぞれ図 8～9 のようになる。図中 R , S はそれぞれ実部、虚部をしめす。 η_d が大きくなると図形が小さくなることがわかる。



第8図 $\eta_d=0.10$ の場合



第9図 $\eta_d=0.25$ の場合

9 検討

ここで (7.3), (7.4) により反射波 A_1 および透過波 A_2 についての検討を行なう。damping 材料は梁の全幅 (b) にわたり貼付され、厚さ h とする。図 8～9 からも明らかなる通り、当然のことであるが、付加物のインピーダンスの実部は正である。

すなわち

$$Z_d = Z_r + i Z_j \quad (9.1)$$

において $Z_r > 0$

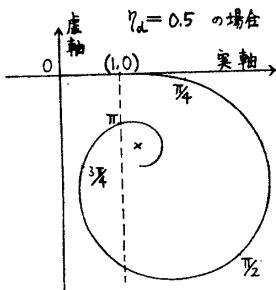
(6.8) 式から

$$\frac{\lambda^4}{K_B^4} = 1 + \frac{Z_j}{\rho A_r \omega} - \frac{Z_r}{\rho A_r \omega} i \quad (9.2)$$

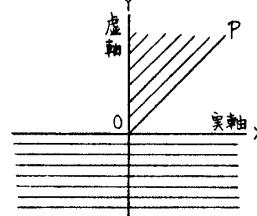
ここに

$$K_B^4 = \frac{\rho A_r \omega^2}{EI}$$

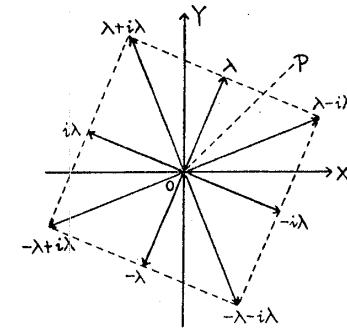
これを複素平面でしめすと図 10 となる。これは図 8～9 のようなグラフを $\frac{b \cdot \rho_a \cdot C_d}{\rho A_r \cdot \omega}$ 倍し、時計方向に 90° だけ回転させ、原点を (1.0) に移動したものである。すなわち複素平面において λ^4/K_B^4 の存在し得る範囲は実軸から下の部分である。(第 11 図横線部) ただし Z_r が 0 でない限り実軸上には存在し得ない。ゆえに $\lambda^4/K_B^4 = Re^{i\theta}$ とおいた場合 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ したがつて第 1 象元において λ の存在する範囲は図 11 の斜線部となる。(OY, OP 線上をのぞく。) ここで $e^{\pm i\theta}$, $e^{\pm i\lambda l}$, $e^{\pm(\lambda+i\lambda l)l}$, $e^{\pm(\lambda-i\lambda l)l}$ の大小を調べてみよう。土 λ , 土 $i\lambda$; 土 λ



第 10 図



第 11 図



第 12 図

$\pm i\lambda$ を複素平面でしめすと 12 図を得る。 $e^{\pm i\lambda l}$, $e^{\pm i\lambda l}$ のうちで絶対値の大きなものは、指数部の実部が大きなものであるから $e^{-i\lambda l}$ が最大、次が $e^{i\lambda l}$ である。今この両者の絶対値の比を考えてみよう。

$$\frac{|e^{-i\lambda l}|}{|e^{i\lambda l}|} = \frac{\left| \exp \left[-iR^{1/4}K_B l \left(\cos \frac{1}{4}\theta + i \sin \frac{1}{4}\theta \right) \right] \right|}{\left| \exp \left[R^{1/4}K_B l \left(\cos \frac{1}{4}\theta + i \sin \frac{1}{4}\theta \right) \right] \right|} = \frac{\exp \left[R^{1/4}K_B l \sin \frac{1}{4}\theta \right]}{\exp \left[R^{1/4}K_B l \cos \frac{1}{4}\theta \right]} = (e^{R^{1/4}K_B l})^{\sin 1/4\theta - \cos 1/4\theta}$$

$$\text{ここで } K_B l = \frac{2\pi}{\lambda_B} \times l = 2\pi \times \frac{l}{\lambda_B} \quad \lambda_B : \text{波長}$$

ほとんどの場合 $R^{1/4} > 1$, ゆえに l が波長の 2 倍とすれば

$$e^{R^{1/4}K_B l} > 25 \times 10^4 \quad \text{ゆえに } 54^\circ < \frac{1}{4}\theta \leq 90^\circ \quad \text{なる限り}$$

$$\frac{|e^{-i\lambda l}|}{|e^{i\lambda l}|} > 10 \quad \text{このとき } 216^\circ < \theta \leq 360^\circ$$

つぎに $e^{\pm(\lambda \pm i\lambda)l}$ のうちでは $e^{(\lambda - i\lambda)l}$ が最大、次が $e^{-(\lambda + i\lambda)l}$ であるが上と同様にして $\theta < 336^\circ$ なる限り

$$\frac{|e^{(\lambda - i\lambda)l}|}{|e^{-(\lambda + i\lambda)l}|} > 10$$

以上のことと要約すると damper の長さが波長 λ_B の 2 倍のとき $216^\circ < \theta < 336^\circ$ の条件を満足すれば $e^{\pm i\lambda l}$, $e^{\pm i\lambda l}$ の中では $e^{-i\lambda l}$ が最大で他の項は $1/10$ 以下の大きさとなる。同様にして $e^{\pm(\lambda \pm i\lambda)l}$ の中では $e^{(\lambda - i\lambda)l}$ に対し、他の項は $1/10$ 以下となることがわかつた。なお一般に振動数が高い場合には、damper の長さ l は波長の 2 倍以上の場合が多い。以後このような場合だけを考えることにする。 l が波長の 2 倍以上のときは θ に対する制限はもつとゆるくなる。なお波長と振動数との関係は

$$\lambda_B = \left(\frac{2\pi}{f} \cdot C_L \cdot r_g \right)^{1/2} \quad (9.3)$$

$$f : \text{振動数} \quad C_L : (E/\rho)^{1/2}$$

$$r_g : \text{梁の環動半径}$$

ここで (7.3), (7.4) 式から $|A_1|$, $|A_2|$ の λ^4/K_B^4 による変化を考える。前述した理由から近似的には A_1 , A_2 の分母子の中では $e^{(\lambda - i\lambda)l}$, $e^{-i\lambda l}$ を含んだ項だけを考えればよい。さらに幸いなことに、その係数も他の項の係数よりは絶対値が大きい。

9.1 $|A_1|$ ($l > 2\lambda_B$ のとき)

$$\begin{aligned} |A_1| &\doteq \left| \frac{\frac{\lambda^4}{K_B^4} - 1}{e^{(\lambda - i\lambda)l} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\left(\frac{\lambda}{K_B} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{K_B} - i \right)}{\left(\frac{\lambda}{K_B} - 1 \right) \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)} \right| = \left| \frac{\left(\cos \frac{\theta}{4} + \frac{R^{1/4} + R^{-1/4}}{2} \right) \left(-\sin \frac{\theta}{4} + \frac{R^{1/4} + R^{-1/4}}{2} \right)}{\left(-\cos \frac{\theta}{4} + \frac{R^{1/4} + R^{-1/4}}{2} \right) \left(\sin \frac{\theta}{4} + \frac{R^{1/4} + R^{-1/4}}{2} \right)} \right|^{1/2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

すなわち l を大きくしても、これだけの反射は避けられないことになる。そして λ/K_B の絶対値が大きくなると $|A_1| \rightarrow 1$ 。つまりインピーダンスが大きいときは反射量が大きくなることがわかる。反射を小さくするには、進

行波が入つてくる方の damper の板厚を薄くし、次第に増厚するとか、始めの部分には soft な材料を使用する等の工夫をし、入射端のインピーダンスを小さくすることが望ましい。

また (9.4) から $|A_1| < 1$ なること。 θ が $360^\circ \rightarrow 180^\circ$ のとき $|A_1|$ は単調に増加すること等がわかる。

9.2 $|A_2|$ ($l > 2\lambda_B$ のとき)

A_1 の場合と同様にして

$$\begin{aligned} |A_2| &= 4 \left| \frac{\lambda}{K_B} \frac{e^{-i\lambda l} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^2}{e^{(\lambda-i\lambda)l} \left(\frac{\lambda^2}{K_B^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{\lambda}{K_B} + i \right)^4} \right| \\ &= 2 \frac{\exp \left[-R^{1/4} K_B l \cos \frac{\theta}{4} \right]}{\frac{R^{1/4} + R^{-1/4}}{2} + \sin \frac{\theta}{4}} \end{aligned} \quad (9.5)$$

これから明らかなように、 $R > 1$ の範囲では、 R が増加するとき $|A_2|$ は減少する。また θ が $360^\circ \rightarrow 180^\circ$ のとき $|A_2|$ が急速に減少することがわかる。

9.3 $l \ll \lambda_B$ のとき

(7.3), (7.4) から

$$A_1 \underset{\lim l \rightarrow 0}{=} 0$$

$$A_2 \underset{\lim l \rightarrow 0}{=} -1$$

これは damper がない場合に近づくのであるから当然である。

9.4 以上の結果をまとめると

(i) $l > 2\lambda_B$ のとき

$\lambda^4/K_B^4 = Re^{i\theta}$ の変化に対する $|A_1|$, $|A_2|$ の変化は

	$ A_1 $	$ A_2 $
R が増加するとき	増加	減少
θ が $360^\circ \rightarrow 180^\circ$ のとき	増加	減少

これを λ^4/K_B^4 の複素平面で表示すると図 13 のようになる。

(ii) $l \ll \lambda_B$ のとき

$$|A_1| \rightarrow 0, |A_2| \rightarrow 1$$

以上から 1. $|A_1|$, $|A_2|$ はつねに相反する傾向をもつてること。2. 例えば第 10 図において λ^4/K_B^4 がなるべく原点から遠く、かつ θ の値が小さいとき透過波が小さくなることがわかる。

曲げ波の反射、透過の大体の order を見るために二三の計算を実施した。減衰材料の性質についてはまだ十分な資料がないので次のような推定の数値を使用した。

$$\eta_d = 0.1, C_d = 72 \text{ m/sec}$$

いま、beam としては板厚 3 精のものを考え、これに 1000 サイクルの振動が伝達する場合を考えることにする。次表は、減衰材料の板厚 h が 18 精、16.9 精の場合に $|A_1|$, $|A_2|$ が l/λ_B (l : 減衰材料を取付けた長さ, λ_B : 波長) によつていかに変るかをしめしたものである。1000 サイクルの場合 $h=18$ 精において、 $\frac{\omega h}{C_d} = \frac{\pi}{2}$ となり、減衰なき場合の厚さ方向の一次の共振がおこる。すなわち $h=18$ 精の場合インピーダンスは非常に大きくなる。なお $h=16.9$ 精は $\frac{\omega h}{C_d} = \frac{3.75}{8}\pi$ に対応するものである。

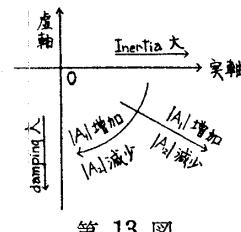
この表から l/λ_B が大きくなつたとき $|A_1|$ は一定値に近づき、 $|A_2|$ は 0 に近づくこと、 h が 18 精から 16.9 精に変ると $|A_2|$ の order が一桁大きくなることすなわち共振点からわずかずれると $|A_2|$ は急速に大きくなること等がわかる。

10 結 言

無限長の梁を伝わる定常な曲げ波が途中に設けられた付加物によつていかに反射、透過するかに関し、理論解析を行ない概略、つぎのよ

注：この表の中で $\lambda_B = 16.7$ cm

l/λ_B	$h=18$ 精		$h=16.9$ 精	
	$ A_1 $	$ A_2 $	$ A_1 $	$ A_2 $
1/2	0.39	0.19	0.28	0.55
1	0.40	0.038	0.22	0.33
2	0.39	0.002	0.23	0.12
4	0.39	0	0.24	0.02
8	0.39	0	0.24	0.001



第 13 図

無限長の梁を伝わる振動の遮断について

うな結論を得た。

1. 一定周波数の曲げ波が伝わつてくる場合、機械的エレメントを組合せた集中インピーダンスによつて、この伝達するエネルギーをすべて、吸収することが理論的には可能であるが、実際問題としては色々な困難があらう。
2. 梁のある一定区間にわたり、減衰材料を取付けた場合を、分布インピーダンスと考えて取扱つた。梁の表面に平行な変形だけを考えたのでは大したダンピング効果を期待できないが、厚さ方向の変形、とくにその共振振動数の近傍ではインピーダンスの大きな増加があるので伝達波が遮断されやすくなる。ただしインピーダンスが大きくなると反射波も大きくなるので、反射波を小さくするには入射端のインピーダンスを小さくし、徐々に大きくする等の工夫が必要である。減衰材料の長さは波長の2倍以上ないとあまり有効でないようである。

以上の理論結果を確認するための実験を今後実施したいと考えている。終りに本論文の作成にあたつては、防衛庁技術研究本部渡辺恵弘顧問のご助言を得たことを附記し、感謝の意を表したい。

参考文献

- (1) M. C. Junger "Structure-Borne Noise" in Structural Mechanics, edited by J. N. Goodier and N. J. Hoff.
- (2) E. L. Hixon "Mechanical Impedance and Mobility" in Shock and Vibration Handbook, edited by C. M. Harris and C. E. Crede.
- (3) J. C. Snowdon "Transverse Vibration of Free-Free Beams" The Journal of the Acoustical Society of America, volume 35, 1963
- (4) J. C. Snowdon "Longitudinal Vibration of Internally Damped Rods" The Journal of the Acoustical Society of America, volume 36, 1964
- (5) E. E. Ungar and E. M. Kerwin, Jr. "Plate Damping due to Thickness Deformations in Attached Viscoelastic Layers" The Journal of the Acoustical Society of America, volume 36, 1964