

(昭和 42 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

# 超空洞翼列の線型理論における Munk の積分とその応用

正員 西 山 哲 男\*

Munk's Integral for Fully Cavitated Hydrofoils in Cascade by  
Acceleration Potential Concepts

by Tetsuo Nishiyama, *Member*

## Summary

It is the purpose of present paper to study analytically the hydrodynamic characteristics of fully cavitated hydrofoil in cascade by acceleration potential concepts. By taking the usual linearized assumptions, the problem can be reduced to a potential one of mixed boundary value type in acceleration field. The lift and drag of fully cavitated hydrofoil in cascade are expressed in the generalized form of Munk's integral known in thin wing theory. Numerical calculations are performed for the characteristics of fully cavitated hydrofoil of flat plate and cambered section in typical arrangements of cascade and comparisons are made with the former theories. In the last place, application of the present theory to supercavitating propellers and comparison with measured value is made.

## 1. 緒 言

超空洞水力機械，例えば軸流ポンプや船用プロペラの流体力学的特性解析や設計の見地から，直線翼列配置における超空洞翼型の特性解析が最も基本的な重要命題である。元来かかる問題は，不連続理論の立場よりホドグラフ法による Betz-Petersohn [1], Cornell [2], Acosta [3], 媒介変数による Jakobsen [4] の解法が知られているが，これらは非線型解であるために，実際問題に対して逐一数値を求めるのが繁雑且つ困難である憾みがある。

したがって，翼列翼型の特性を見通し易い形に求めることのできる線型解法が要望される所である。すでに，速度場における混合境界問題による Sutherland-Cohen [5], 相当吹出しにより空洞を置換える大場 [6], 簡易置換による Tulin [7], さらに Betz-Petersohn の非線型解を略近化した鬼頭 [8] 等の解法が発表されている。

本論文は，超空洞翼列翼型のまわりの流れを，単独翼型の加速度場を取扱う線型理論の手法 [9], [10] を拡張することにより，翼型特性を検討したものである。とくに既存解法に比し簡潔であることおよび特性は薄翼理論で知られている Munk の積分の広義表示で与えられることが，強調的に示されている。数値計算を通して，翼型特性を明かにし，既存解法によるものと比較吟味を行なっている。最後に超空洞プロペラに応用して，本線型理論の有効性を実測値と比較することにより，検討してある。

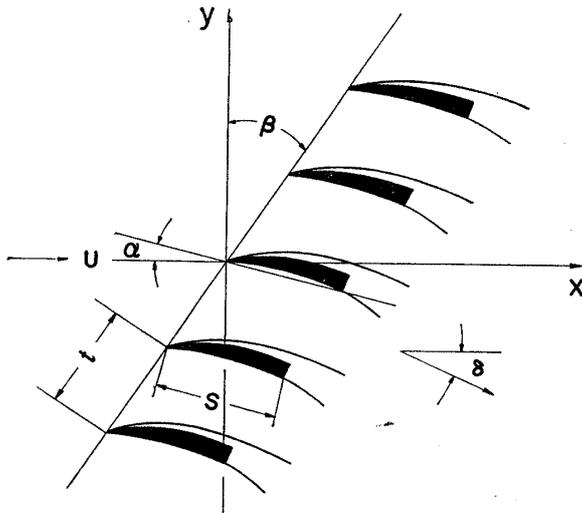
## 2. 加 速 度 場

くい違い角  $\beta$ ，ピッチ  $t$  なる翼列配置にある弦長  $s$  なる超空洞翼型を考える。座標は一様な流れの速度  $U$  の方向に  $x$  軸，これに直角に  $y$  軸をとり，原点は前縁にあるものとする。第 1 図に示すように迎角  $\alpha'$  翼列後方では  $x$  軸と  $\delta$  をなす角度の方向に流れ去るものとする。

Euler の運動方程式を線型化すると，加速度ポテンシャルを定義できるから，加速度場は次の複素加速度ポテンシャル

原稿受付 昭和 42 年 7 月 10 日

\* 東北大学工学部



1図 超空洞翼列

で与えられる。但し

$$\sigma = P_\infty - P_c / \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (4)$$

(ii) 翼型を

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq s \quad (5)$$

と置くと  $y$  方向の加速度は

$$a_y = U^2 \left( 1 + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (6)$$

であるから、(2)、(6) より次式を得る。

$$\phi(x, -0) = -U^2 \left( 1 + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{dy}{dx}, \quad 0 \leq x \leq s \quad (7)$$

さて、物理面を  $z$  面にとり、 $z$  面の翼列を次式

$$z = \frac{t}{2\pi} \left[ e^{-i\beta} \log \left( 1 - \frac{ie^{i\beta}}{\sqrt{t}} \zeta \right) + e^{i\beta} \log \left( 1 + \frac{ie^{-i\beta}}{\sqrt{t}} \bar{\zeta} \right) \right] \quad (8)$$

により、 $\zeta$  面の下半面へ写像すると  $\zeta$  面の翼弦長は単位にとつてあるから、次の関係がある。

$$s = \frac{t}{2\pi} \left[ \cos \beta \cdot \log \left\{ \left( 1 + \frac{\sin \beta}{\sqrt{t}} \right)^2 + \left( \frac{\cos \beta}{\sqrt{t}} \right)^2 \right\} + 2 \sin \beta \cdot \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{\cos \beta}{\sqrt{t}}}{1 + \frac{\sin \beta}{\sqrt{t}}} \right) \right] \quad (9)$$

$z$  面の無限上流および下流は  $\zeta$  面ではそれぞれ  $\zeta_1$  および  $\infty$  に対応している。

$$\zeta_1 = \sqrt{t} e^{-i(\pi/2 + \beta)} \quad (10)$$

したがって、複素加速度ポテンシャルをあらためて

$$w(\zeta) = \phi'(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) \quad (11)$$

$$\text{ただし, } \phi'(\xi, \eta) = \phi(\xi, \eta) - \frac{1}{2} \sigma U^2 \quad (12)$$

と置くと、(3) に対応する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi'(\xi, +0) &= 0; & \xi &\leq 0 \\ \phi'(\xi, -0) &= 0; & 1 &\leq \xi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり、線型写像面は第2図のようになる。 $\xi$  軸上の境界値が(7)、(13)により与えられるから、これより  $\zeta$  面の加速度場が決定できる。解の組立てには、翼型前縁の特異性が重要であるから、(8)より前縁近傍の対応性を検討すると

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) : z = x + iy \quad (1)$$

により表わされ、加速度は

$$\left. \begin{aligned} a_y(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ a_x(x, y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で与えられる。加速度場における境界条件としては次の如くなる。

(i) 空洞発生により翼列後方の流路断面面積は減少するから、空洞内圧力  $P_c$  は一様流の静圧  $P_\infty$  より小さいと考えられる。このことは choke 流れ模型を採用したことに相当する。したがって、空洞境界上での加速度ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, +0) &= \frac{1}{2} \sigma U^2 : 0 \leq x \\ \phi(x, -0) &= \frac{1}{2} \sigma U^2 : s \leq x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

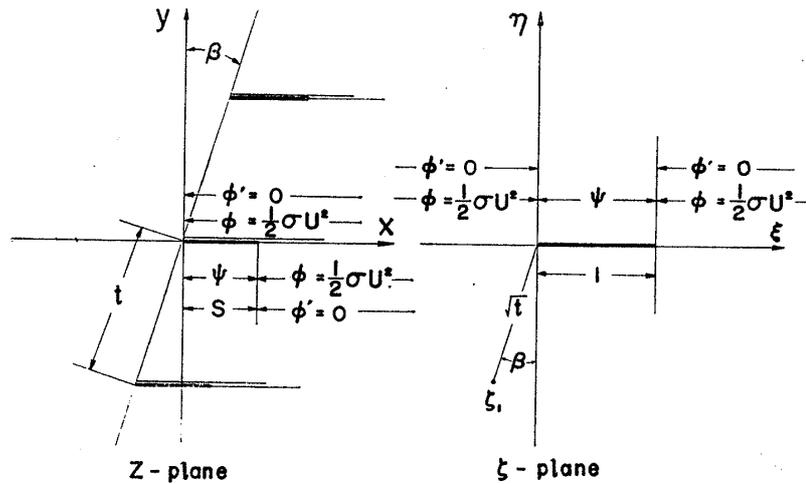


図2 物理面および写像面における線型境界条件

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} z = \frac{\cos \beta}{2\pi} \zeta^2 \tag{14}$$

となり、単独翼の場合と全く同一であることが分る。したがって翼列翼型の前縁における特異性は  $z^{-1/4}$  であることがいえる [9]。さて、補助関数は

$$\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}}$$

と置くことができるから、(7)、(13)により複素加速度ポテンシャルは次式で与えられる [11]。

$$w'(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta}} \left[ \frac{i}{\pi} U^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi-\zeta} + ir \right] \tag{15}$$

ただし  $\sigma$  と  $r$  は無限上流に対応する  $\zeta_1$  におけると条件より決めるべきものとする。すなわち

$$w'(\zeta_1) = 0 \tag{16}$$

この実部、虚部は次の関係を与える。

$$\begin{aligned} \sigma & \left[ \frac{\pi \cos \theta/2}{\sqrt{r}} + \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{\sqrt{t} \cos \beta}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} d\xi \right] \\ & = -2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{\sqrt{t} \cos \beta}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} d\xi \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} r/U^2 & = \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\pi \sin \theta/2}{\sqrt{r^2}} - \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{\xi + \sqrt{t} \sin \beta}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} d\xi \right] \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{\xi + \sqrt{t} \sin \beta}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} d\xi \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } r^2 & = \left(1 + \frac{\sin \beta}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(-\frac{\cos \beta}{\sqrt{t}}\right)^2 \\ \theta & = \tan^{-1} \left( \frac{-\cos \beta}{\sqrt{t} + \sin \beta} \right) \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

一方、無限下流に対応する  $\zeta = \infty$  では

$$\phi(\infty) = \frac{1}{2} \sigma U^2, \quad \psi(\infty) = r \tag{20}$$

であるから、下流における轉向角  $\delta$  は

$$\delta = r/U^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \tag{21}$$

で与えられる。

### 3. 翼型特性

翼弦上の加速度ポテンシャルは (15) より

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2} \sigma U^2 + \frac{U^2}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + r \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \quad (22)$$

で与えられるから、圧力係数は次式の如くなる。

$$C_p(\xi) = \frac{P(\xi) - P_c}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \left[ \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \frac{r}{U^2} \right] \quad (23)$$

揚力は

$$L = -\rho \int_0^s \phi(x) dx \quad (24)$$

で与えられるから、(8), (22) を (24) へ代入することにより揚力係数は

$$C_l = -\frac{2}{\pi} \frac{t}{s} \cos \beta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \frac{r}{U^2} \right\} \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} \quad (25)$$

となる。これは翼列翼型の揚力に対する広義の Munk の積分 [12] と見なすことができる。

つぎに、翼型前縁における特異性を考慮すると、抗力は一般に、次式で与えられる。

$$D = \rho \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_s^s \phi(x, -0) \frac{dy}{dx} dx + \oint \phi(x, -0) \frac{dy}{dx} dx \right\} \quad (26)$$

第2項は、前縁における吸引力を示すが、零になることが容易に証明できる。したがって (8) と (22) を (26) へ代入することにより、抗力係数は

$$C_d = -\frac{2}{\pi} \frac{t}{s} \cos \beta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{dy}{dx} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \frac{r}{U^2} \right\} \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + 2\xi \sqrt{t} \sin \beta + t} \quad (27)$$

となる。これは翼列翼型の空洞抗力を表わす広義の Munk の積分と見做すことができる。

(25), (27) において、ピッチ  $t$  を無限大に移行せし常数を省略するとそれぞれ次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C_l &= 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} (1-2\xi) d\xi \\ \lim_{t \rightarrow \infty} C_d &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} d\xi \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これ等は単独翼型の Munk の積分と完全に一致している [9]。

空洞流線は

$$y_c = -\int \frac{\phi(x) dx}{U^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)} + C \quad (29)$$

で与えられる。常数  $C$  は前縁より流線が発生するように決めればよい。前縁より発生する上側自由流線は (8) と (15) より平板翼列の場合に対しては

$$y_c(\xi) = -\frac{t \cos \beta}{\pi \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)} \int_0^\xi \left[ \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \left\{ r - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha \right\} + \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha \right] d\xi + C \quad (30)$$

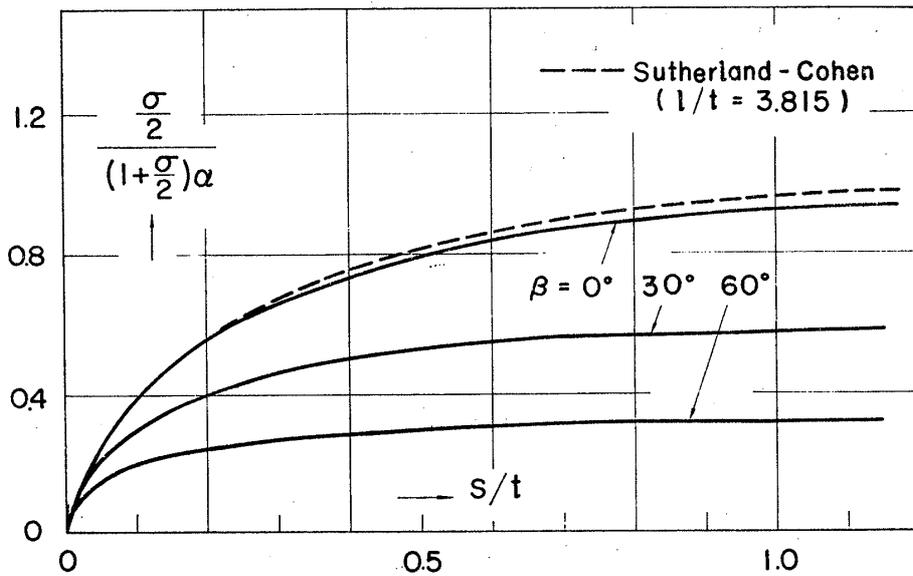
となる。

## 4. 数値計算例

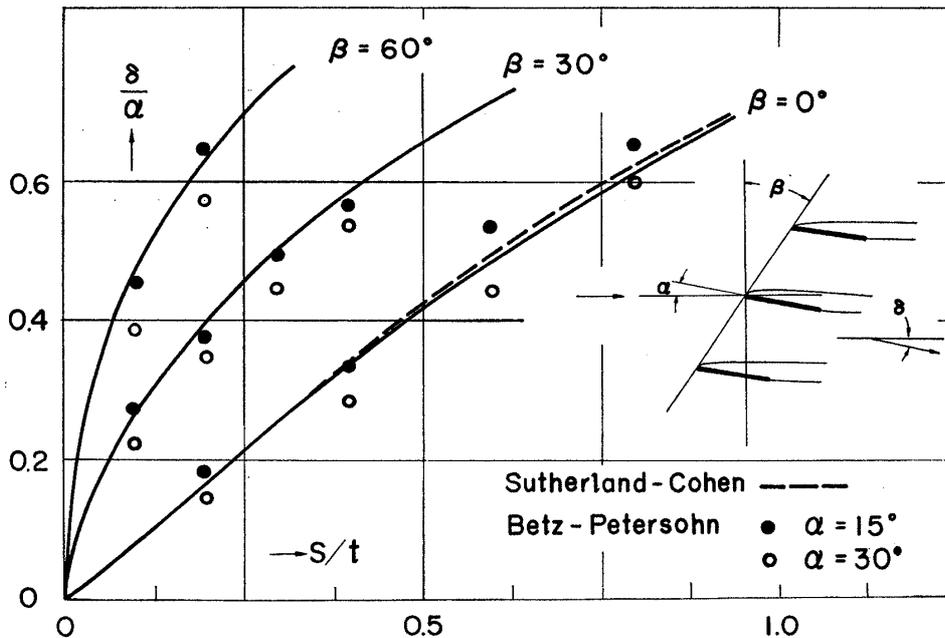
### 4.1 平板翼型

翼列配置によるキャピテーション数の変化を、Sutherland-Cohen の値と共に、第3図に示してある。ピッチ  $t$  が小さい程、喰い違い角  $\beta$  が小さい程、空洞内圧力は減少している。然し、ピッチが無限大のとき、すなわち、単独翼型では、空洞内圧力は無限遠前方の圧力に等しくなっている。

翼列後方の転向角  $\delta$  の翼列配置による変化を第4図に示してある。ピッチ  $t$  が小さく、喰い違い角  $\beta$  が大きい程、転向角は大きくなる。ピッチが無限大のときは流入、流出方向は一致する。また  $\beta = 0^\circ$  における Suther-



3図 平板翼型翼列のキャビテーション係数



4図 平板翼型翼列の転向角

land-Cohen の値に極めて近く、Betz-Petersohn の非線型解とも予想以上に一致している。

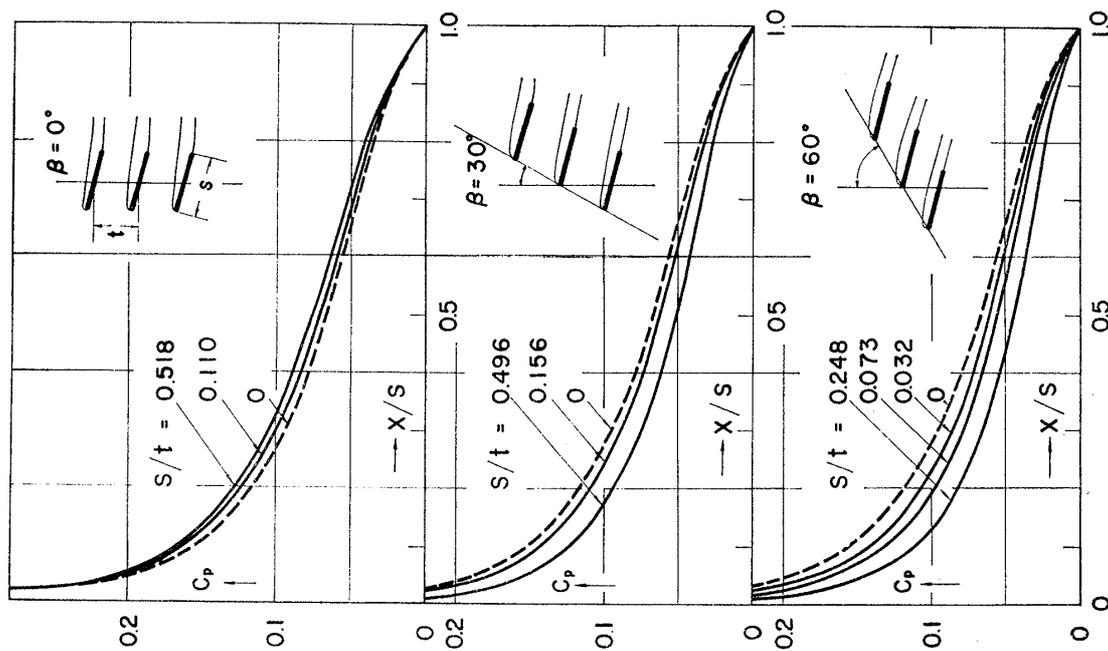
空洞流線の例を第5図に示してある。ピッチが小さく、喰い違い角が大きくなる程、単独翼型の場合に比し、下側に発生するようになる。

種々の翼列配置における圧力分布を第6図に示してある。単独翼型の圧力分布を基準に比較することにより、圧力分布に及ぼす翼列の影響を知ることができるが、喰い違い角の増加とともに、圧力分布は翼列の影響を受けて一般に減少する。

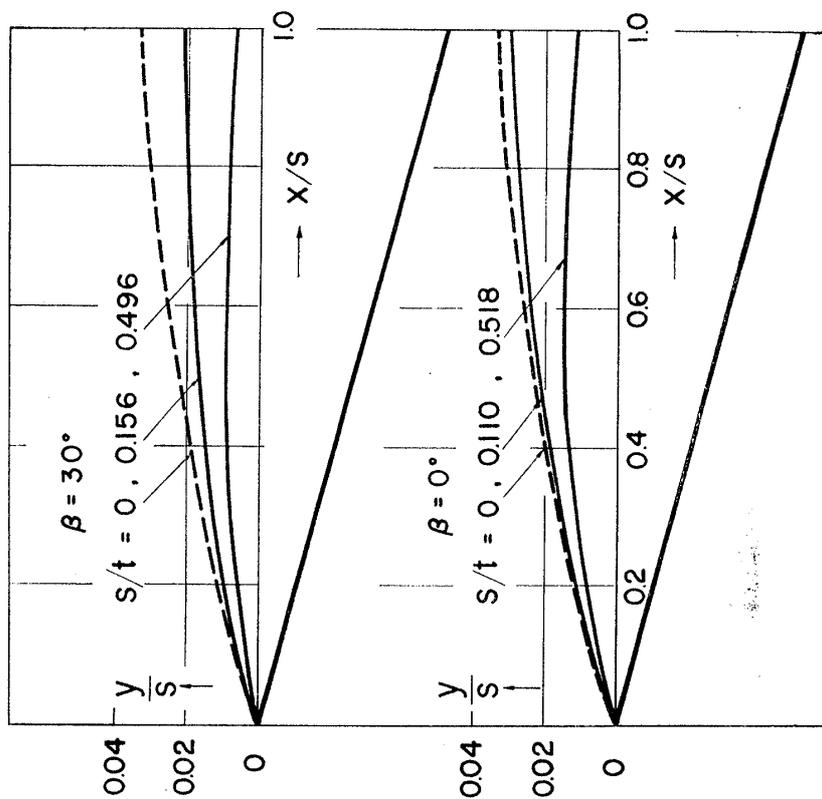
翼列の干渉係数は、迎角毎に異なつた値をとるのが特長で、第7図には  $\alpha=3^\circ$  および  $8^\circ$  の例を示してある。これは、翼列翼型の揚力係数は、最早や迎角に比例しなくなるからである。

既存結果との比較を、揚力係数の場合について、第8図に示してある。Sutherland-Cohen および Betz-Petersohn の結果とはほぼ同じ傾向にあることが分る。

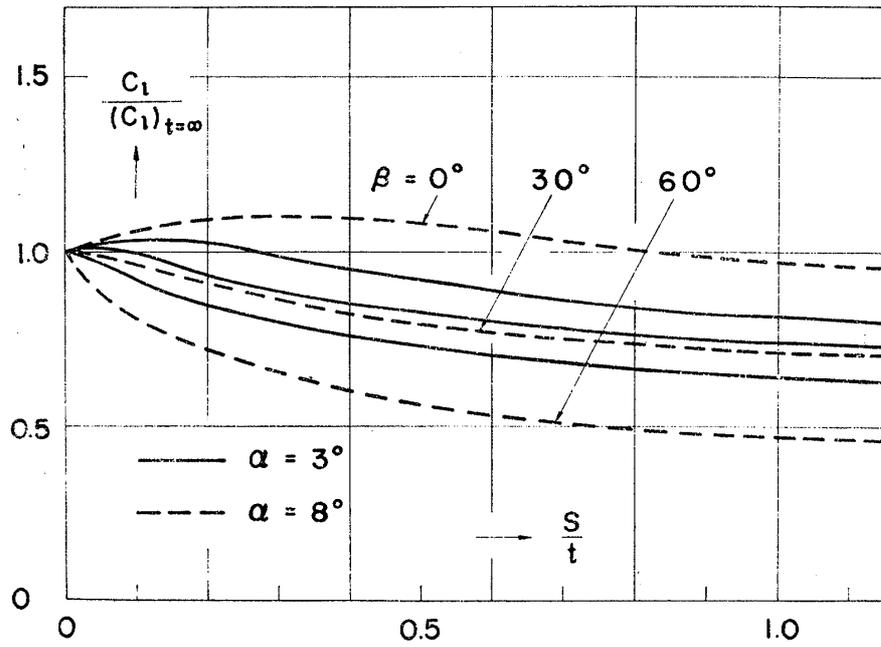
4.2 円弧翼型



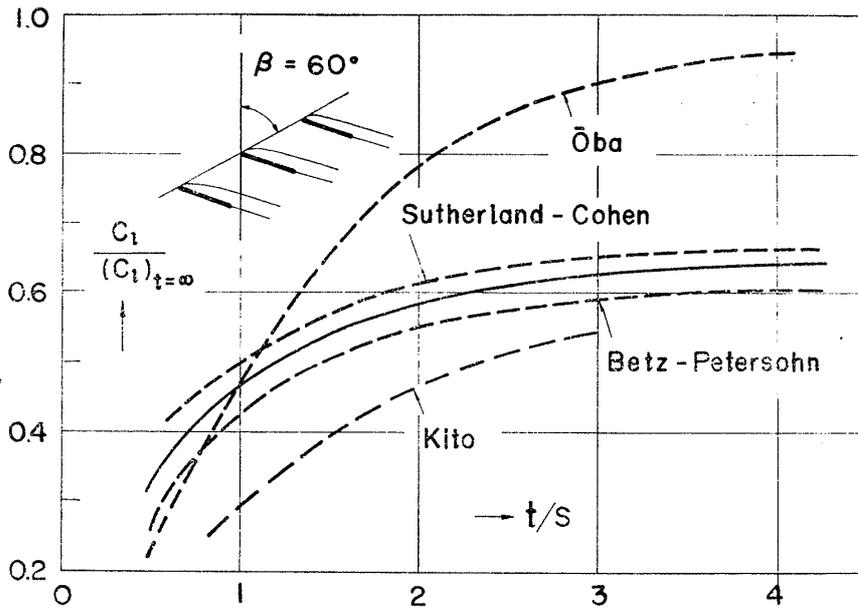
6 図 迎角  $3^\circ K$  における平板翼型の圧力分布



5 図 迎角  $3^\circ K$  における平板翼型翼列の上側自由流線



7 図 平板翼型翼列の干渉係数



8 図 迎角 3° における平板翼型翼列の干渉係数の既存結果との比較

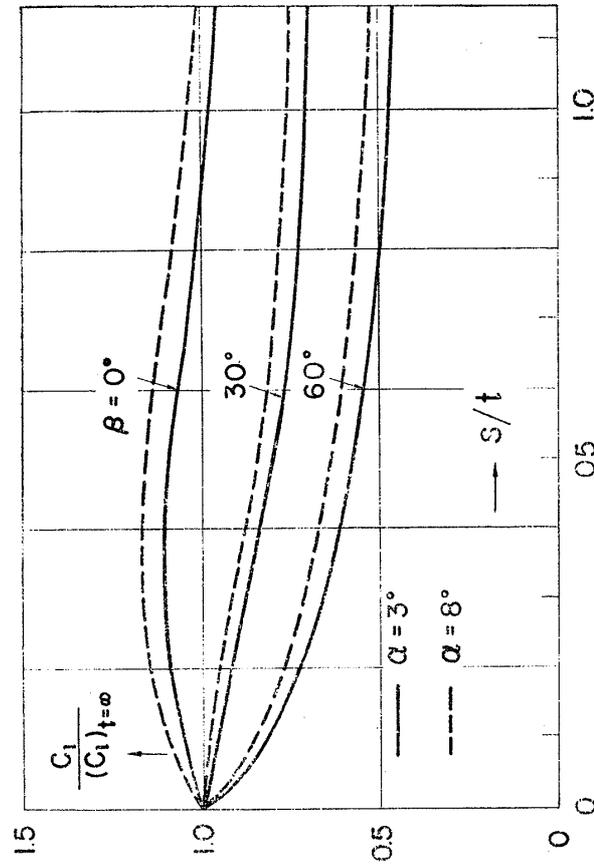
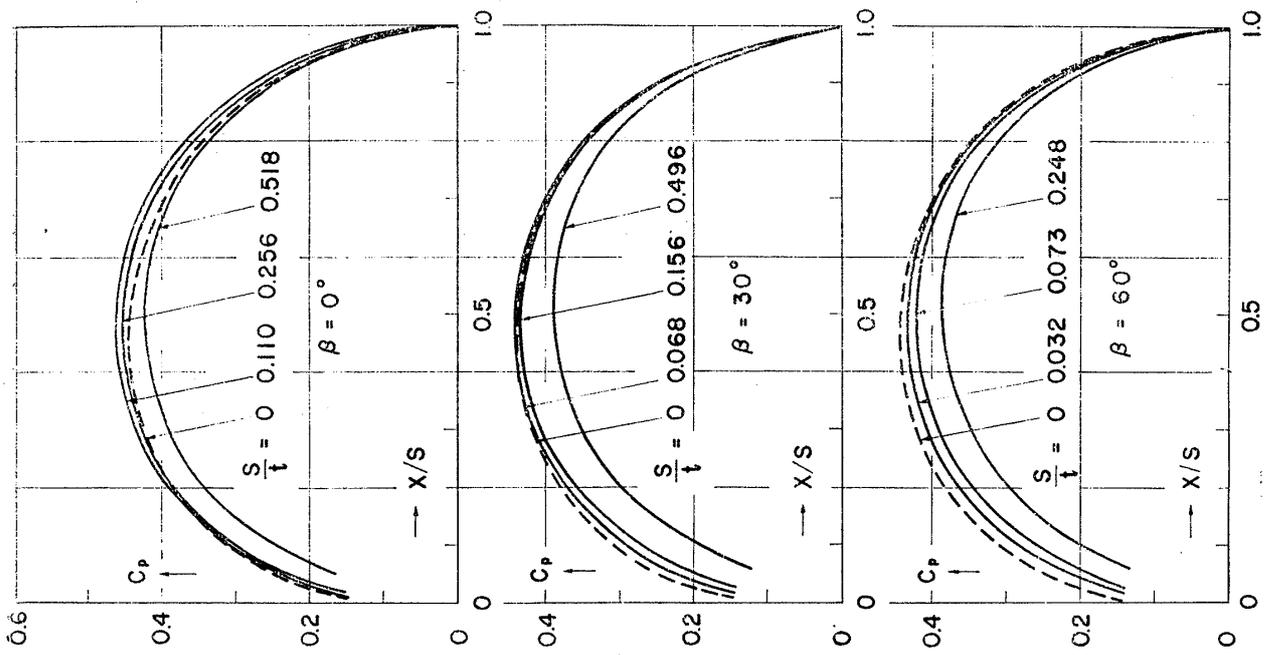
反り比 5% の円弧翼より成る翼列の圧力分布を第 9 図に示してある。平板翼列の場合に比し、単独翼型の場合を示す点線との差は小さく、したがって、翼列の影響は小さいことが特長である。

翼列の干渉係数は第 10 図に示すように、平板翼に比し迎角による変化が顕著で、且つ 1 に近い値をとる。

### 5. 超空洞プロペラへの応用

プロペラ軸心と同心円筒で切断し、これを平面に展開すれば直線翼列が得られる。翼型の揚力、空洞抗力よりプロペラ翼素の推力および回転力率は

$$\left. \begin{aligned} dT &= \left[ L \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - D \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \right] B dr \\ dQ &= \left[ L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + D \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \right] B r dr \end{aligned} \right\} \quad (31)$$



10図 円弧翼型 (反り比 5%) 翼列の干渉係数

9図 迎角  $3^\circ$  における円弧翼型 (反り比 5%) の圧力分布

となる。したがって、揚力および空洞抗力に対する Munk の積分 (25), (27) を用い, (31) より各半径における揚力, 回転力率を求めると, プロペラ全体の推力, 回転力率は次式により得られる。

$$T = \int_{\text{Boss}}^{\text{Tip}} dT, \quad Q = \int_{\text{Boss}}^{\text{Tip}} dQ \quad (32)$$

実在の流動に対しては, 空洞内圧力  $P_c$  に対する蒸気圧力  $p_d$  の補正と翼型正面に対する摩擦抵抗の補正の2つが必要である。すなわち, 翼素およびプロペラ全体のキャビテーション係数をそれぞれ

$$k = \frac{P_\infty - P_d}{\frac{1}{2}\rho U^2}, \quad K = \frac{P_\infty - P_d}{\frac{1}{2}\rho U_R^2} \quad (33)$$

と定義すれば, 両者間には

$$k = K \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (34)$$

の関係がある。また, 摩擦抵抗に対しては一応片側だけであるから, 係数で大略 0.004 と置くことにする。さらに, 翼素翼型を簡単のために, 平板 ( $dy/d\alpha = -\alpha$ ) と置くと, 翼素の真の揚力および空洞抗力はそれぞれ次式となる。

$$C_l' = C_l + k \quad (35)$$

$$C_d' = (C_l + k)\alpha + 0.004 \quad (36)$$

ただし, プロペラの場合には, 迎角は次式で与えられる。

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\frac{P}{D}}{\frac{r}{R}\pi} - \tan^{-1} \frac{V}{\frac{ND}{r}} \quad (37)$$

ここに  $P$ =ピッチ,  $N$ =回転数,  $V$ =前進速度, したがって (31) の  $L, D$  をそれぞれ  $L', D'$  に置換えれば実在の流れでの翼素の推力および回転力率が得られる。

数値計算例として, 次の二つの場合について行なった。

### 5.1 Venning の実測値との比較 [13]

3671 Super-Cavitation Prop ( $V/nD=0.754, K=0.023$ )			3679 Super-Cavitation Prop ( $V/nD=0.885, K=0.015$ )		
	計算値	実測値		計算値	実測値
$T/\rho n^2 D^4$	0.0344	0.037	$T/\rho n^2 D^4$	0.0268 (0.0416)	0.020
$Q/\rho n^2 D^5$	0.00872	0.0095	$Q/\rho n^2 D^5$	0.0062	0.0053
$\eta$	0.471	0.41	$\eta$	0.601	0.53

( ) は Tulin の略算式[7]による

### 5.2 Smith の実測値との比較 [14]

第 11, 12 図には A, B 両超空洞プロペラの推力および回転力率の実験, 計算両値の比較を鬼頭の計算値 [15] と共に示してある。

以上の比較を通じて計算の仮定や省略を考えれば, 超空洞翼列に関する線型理論を, プロペラに適用して, その特性を, 二次元的に求めることは, 可なりり実用性があるように思われる。

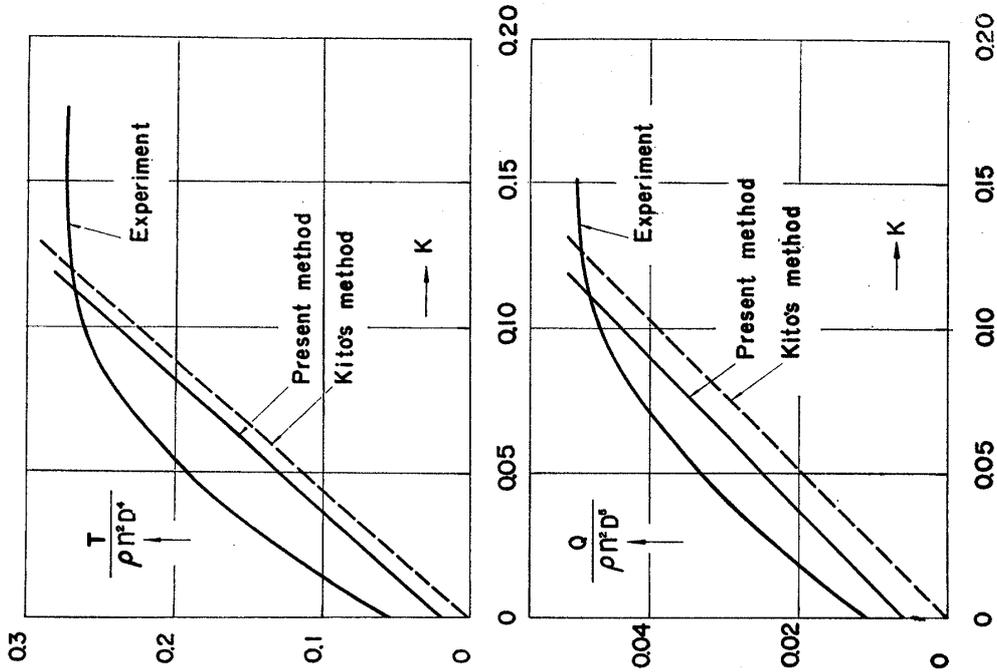
## 6. 結 言

超空洞翼列翼型の周りの流れを加速度場より取扱う線型理論を組立て, 揚力および空洞抗力を広義の Munk の積分表示で与えることができた。既存理論による値と対比した限りでは, 線型仮定の成立する限り, 妥当な結果を与えていると見ることができ。また, 本線型理論を応用して, 超空洞プロペラの特性を計算し, 実測値と比較することにより, その実用性を示した。

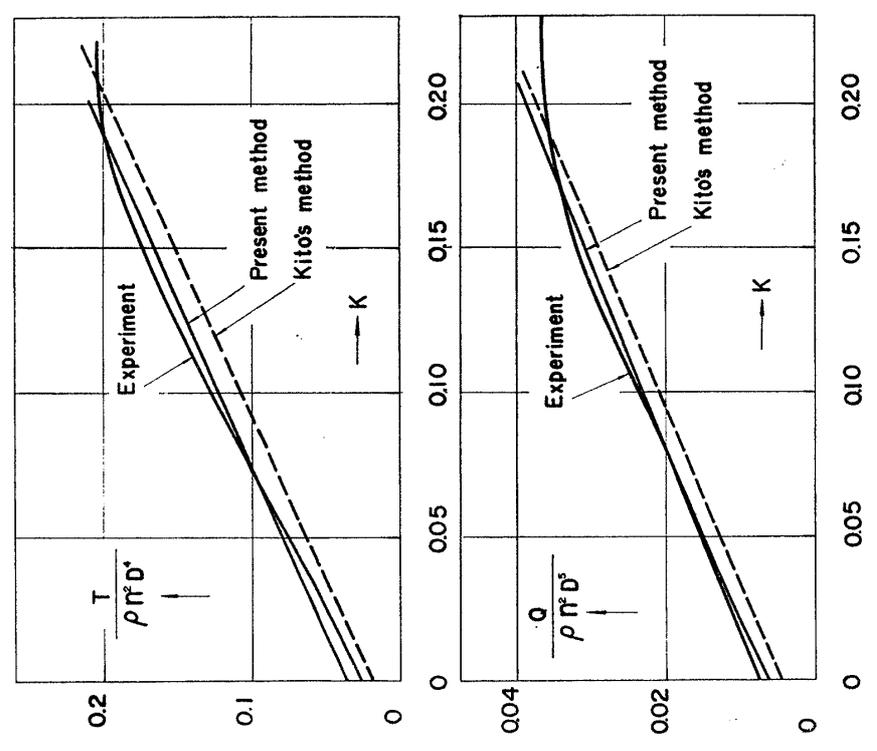
なお, 本研究は, 文部省科学研究費による研究の一部であることを附記する。

## 文 献 参 考

- [1] Betz & Petersohn : Ing. Arch. Bd.11, 1931.
- [2] W.G. Cornell : Proc. 2nd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 1954.
- [3] A.J. Acosta : Trans of ASME, Jour. of Basic Eng. Vol.86, 1964.



12図 B-超空洞推進器の35%スリップにおける  
推力および回転力率の計算, 実験両値の比較



11図 A-超空洞推進器の35%スリップにおける推力  
および回転力率の計算, 実験両値の比較

- [4] J.K. Jakobsen : Trans. of ASME, Jour. of Basic Eng. Vol.86, 1964.
  - [5] C.D. Sutherland & Cohen : Proc. 3rd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 1958.
  - [6] 大場利三郎 : 機械学会前刷集 114 号, 昭和 39 年
  - [7] M.P. Tulin : 4th Symp. on Naval Hydrod. 1962.
  - [8] 鬼頭史城 : 造船協会雜纂 237 号, 昭和 16 年
  - [9] 西山哲男 : 造船協会論文集 118 号, 昭和 40 年
  - [10] 西山哲男 : 機械学会論文集 32 卷, 昭和 41 年
  - [11] B. Demtchenko : Gauthier-Villars, Paris 1933.
  - [12] M. Munk : NACA Rep 142, 1922.
  - [13] E. Venning & W.L. Haberman : Trans, of NAME Vol.71, 1963.
  - [14] S. Smith : Trans of ASME 1937.
  - [15] 鬼頭史城 : 造船協会論文集 87 号, 昭和 30 年
-