（昭和42年11月造船協会秋季講演会において講演）

エネルギー法による有孔矩形板の応力集中に関する研究

正員 安藤良夫* 正員 飯田国広*
正員 川井忠彦** 正員 矢川元基***

On the Application of the Energy Method to the Stress Concentration Problems of a Rectangular Plate with a Circular Hole

By Yoshio Ando, *Member* Kunihiro Iida, *Member*
Tadahiko Kawai, *Member* Genki Yagawa, *Member*

Summary

Stress concentration problems of thin elastic plates are one of the classical problems in the theory of elasticity, and since E. Goursat's work on the complex variable representation of stress functions in plane elasticity problems, much work has been done all over the world, and Muskhelishvilli and others have established the unified theory on the two dimensional elasticity problems.

Unfortunately, however, the exisiting theoretical solutions obtained along this line are quite limited for the practical purpose and the development of the more practical method of analysis is definitely anticipated. One of the authors believes that the energy methods will provide the alternative procedure powerful enough to treat the more practical problems although actually no attempt along this line has been made.

In this paper, the first effort is made on the stress analysis of a perforated rectangular plate, the result of which is found consistent with the famous Howland's solution on the perforated plate strip problem and some test results.

1. まえがき

二次元応力集中の問題は弾性学における古典的問題の一つであり，E. Goursat の応力関数の導入以来，世界各国で活発な研究が行なわれ，N.I. Muskhelishvilli を中心として壮麗な二次元弾性論がすでに展開されていることは周知の通りであるが，このような方法で解析し得る問題の範囲は極限されており，工学上実際に遭遇する問題の有限板の解析にはほとんどその応用が不可能であると言つても過言ではない。その簡単な一例は複連結領域の応力解析問題である。たとえば中央に円孔を有する矩形板の引張りの問題を従来の方法によつて研究しようとすると有孔矩形板の内部領域を単位円に写像する関数が陽に求められないため折角の解析的方法も最終的には数値解法によつて近似解を求めるようなことになり，その複雑さのためにあまり見通しの良い結果が得られないのが現状である。このようなわけで，工学上重要な応力集中係数のデータを集積するために，これに代わるべき有力な実用解析法の開発が望まれている。

よく知られたエネルギー法は構造力学のほとんどあらゆる分野で広く使用され，構造解析のための手段としての重要性は疑う余地がないが，未だこの方法を用いて応力集中問題の解析を試みた例は著者等の知る限りにおいては皆無に等しい。その理由の一つは，たとえば前述の有孔矩形板の場合，円孔周辺の応力集中状態を十分表現

原稿受付 昭和 42 年7月 10 日
* 東京大学工学部原子力工学科
** 東京大学生産技術研究所
*** 東京大学大学院工学系研究科

し得る変位関数を求めることがきわめて困難であるからであろう。著者の一人はかねてより，エネルギー法による二次元応力場の解析について研究してきたが[1),2)]，その成果を基にして最近，上述の問題を研究し，有名な Howland の解[3)] や実験値と比較して十分妥当性のある解を求めることができた。すなわち R.C.J. Howland の示した理論解は中央に円孔を有する帯板を無限遠において一様な引張り荷重を与えた場合の円孔周辺の応力状態を研究したものであつて矩形板が細長く，荷重辺の距離の影響が無視できる範囲にあれば実用上差支えないことは St. Venant の原理の示す通りであるが，このような仮定が成立しない比較的，幅-長比が1に近い矩形板の場合には荷重辺境界条件の影響が無視できなくなる。このような矩形板内の応力分布を精密に求めることは従来の方法では前に述べたような理由で不可能に近く，そのような研究報告はほとんど見当らないのが現状である。しかしながら二次元弾性論により複連結領域における Goursat の応力関数の解析的表示はつねに可能であり，それらの式を用いて複連結領域の平板内の変位関数の一般式を後で述べるように導くことができる。このようにして有孔矩形板の一般的変位関数が求められれば仮想仕事の原理を用いて，これらの未知係数の満足すべき関係式として連立一次方程式が得られ，これを解くことによつて，未知係数が定まり，したがつて平板内部の変位，歪，応力分布が決定されることになる。

以上の方法によつて著者等は有孔矩形板の応力分布を数値解析し，さらに実験結果との比較を行なつた。以下にその概要を記す。

2. 記　　号

x, y：直交座標
r, θ：極座標
a, b, r_0：板の長さ，幅および円孔半径
α：$\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$
ξ：$\dfrac{2r_0}{a}$
Γ_1，Γ_2：外力および変位が与えられた境界
S：弾性体二次元領域
u, v：x，y 方向の変位成分
$\bar{u}, \bar{v}$：境界 Γ_2 上に与えた変位成分
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$：歪成分
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$：応力成分
$\bar{X}_\nu \bar{Y}_\nu$：境界 Γ_1 上に与えた外力成分
T：単位長さあたりの引張力
E：ヤング係数
G：剪断弾性係数
ν：ポアソン比
κ：$\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$
A, B：複素定数
$A_{l_u m_u n_u}, B_{l_v m_v n_v}$：連立方程式未知数
$\varphi(z)$，$\psi(z)$：複素応力関数
B_n：ベルヌイの数
l_u，m_u，n_u，l_v，m_v，n_v，l，m，n：係数
$n!$：$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$
$n!!$：$n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2$ (n：偶数)
　　$n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1$ (n：奇数)
$\dbinom{n}{m}$：$\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$
$I(l, m, n)$：面積分値
$J(l, m, n)$：線積分値

3　二次元応力問題の変分法による近似解析

二次元応力問題に対する仮想仕事の原理とそれに基づく変分法の直接解法について簡単に説明する。本論文において変位はすべて微小であると仮定し，物体力は働かないものとする。以上の仮定のもとにおいて仮想仕事の原理は次式のごとく与えられる。

$$\iint_S (\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdy-\int_{\Gamma_1}(\bar{X}_\nu\delta u+\bar{Y}_\nu\delta v)d\Gamma=0 \qquad (1)$$

ここに二重積分は考えている物体全面積 S について行ない，線積分は，外力 $\bar{X}_\nu$，$\bar{Y}_\nu$ が与えられている境界 Γ_1 について行なうものとする。

仮想変位と仮想歪の関係は

$$\delta\varepsilon_x=\frac{\partial\delta u}{\partial x},\quad \delta\varepsilon_y=\frac{\partial\delta v}{\partial y},\quad \delta\gamma_{xy}=\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x} \qquad (2)$$

で与えられる。次に変位関数 u，v の近似式として次式を仮定する。

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=u_0(x,y)+\sum_{r=1}^{n}a_r u_r(x,y)\\ v(x,y)&=v_0(x,y)+\sum_{r=1}^{n}b_r v_r(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

ここに u_0, v_0 は境界 Γ_2 上で $u_0=\bar{u}$, $v_0=\bar{v}$ とおき，u_r, $v_r(r=1, 2, 3, \cdots, n)$ は境界 Γ_2 上で $u_r=0$, $v_r=0(r=1, 2, 3, \cdots, n)$ である互いに線形独立な関数となるようにえらぶ。ただし $\bar{u}$, $\bar{v}$ は境界 Γ_2 上で与えられた幾何学的境界条件である。

（3）式の変分を考えると

$$\left.\begin{aligned} \delta u&=\sum_{r=1}^{n}\delta a_r u_r(x,y)\\ \delta v&=\sum_{r=1}^{n}\delta b_r v_r(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

となる。（4）式を（2）式に代入しさらに（1）式に代入して

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\left[\iint_S\left(\sigma_x\frac{\partial u_r}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u_r}{\partial y}\right)ds-\int_{\Gamma_1}\bar{X}_\nu u_r d\Gamma\right]\delta a_r +\left[\iint_S\left(\tau_{xy}\frac{\partial v_r}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v_r}{\partial y}\right)ds-\int_{\Gamma_1}\bar{Y}_\nu v_r d\Gamma\right]\delta b_r\right\}=0\tag{5}$$

を得る。したがつて δa_r δb_r の任意性から

$$\left.\begin{aligned} &\iint_S\left(\sigma_x\frac{\partial u_r}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u_r}{\partial y}\right)ds-\int_{\Gamma_1}\bar{X}_\nu u_r d\Gamma=0\\ &\iint_S\left(\tau_{xy}\frac{\partial v_r}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v_r}{\partial y}\right)ds-\int_{\Gamma_1}\bar{Y}_\nu v_r d\Gamma=0\\ &\qquad\qquad (r=1, 2, 3, \cdots, n)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

となる。歪成分は（3）式より

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sum_{r=1}^{n}a_r\frac{\partial u_r}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sum_{r=1}^{n}b_r\frac{\partial v_r}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\sum_{r=1}^{n}\left(a_r\frac{\partial u_r}{\partial y}+b_r\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

したがつて応力成分は

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sum_{r=1}^{n}a_r\frac{\partial u_r}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sum_{r=1}^{n}b_r\frac{\partial v_r}{\partial y}\right)\right\}\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sum_{r=1}^{n}b_r\frac{\partial v_r}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sum_{r=1}^{n}a_r\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\right\}\\ \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}=G\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\sum_{r=1}^{n}\left(a_r\frac{\partial u_r}{\partial y}+b_r\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

となる。（8）式を（6）式に代入することにより，未知数 a_r, $b_r(r=1, 2, 3, \cdots, n)$ に関する $2n$ 元連立一次方程式を得る。これを解くことにより a_r, b_r の値が決定し（3）式より変位に関する近似多項式が得られ，さらに（7）式より歪成分が（8）式より応力成分が求められる。

4 仮定変位関数について

前節で述べたような変分法による直接解法においては仮定変位関数（3）式をどのように導入するかが解の精度上非常に問題になる。仮想仕事の原理（1）式を用いた場合の変位成分に課せられる必要条件は境界 Γ_2 上で幾何学的境界条件を満たしていることであるが，ここでは境界がすべて応力で与えられる（すなわち全境界が Γ_1）と仮定して解析する。Fig.1 のような中心に円孔を有する矩形板を考える。板の長さを a，幅を b，円孔半径を r_0 とする。円孔の中心を原点として座標 $0-xy$ を考え，$x=\pm\frac{a}{2}$ において単位長さ当り T なる一様引張力が外力として働き，$y=\pm\frac{b}{2}$ および円孔周辺は自由境界であるとする。

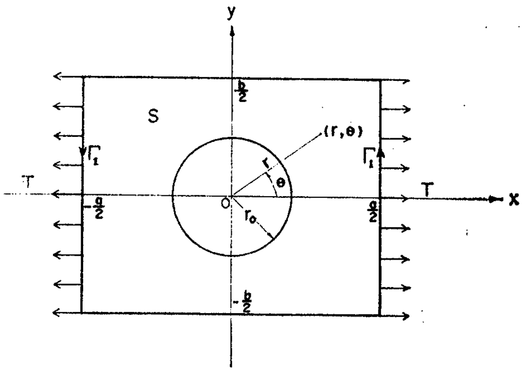


Fig. 1 Coordinate System for Plate with a Hole

つぎに複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ を導入する。自由円孔を有する無限板が遠方において一様応力を受ける場合の複素応力関数 $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ は

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(z)&=Az-2\bar{B}\frac{r_0^2}{z}\\ \psi_0(z)&=Bz^2-2Ar_0^2\log z+\bar{B}\frac{r_0^4}{z^2}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

で表わされる。ここに A, B は遠方の応力成分によつて与えられる複素定数である。

つぎに，円輪領域で1価正則な関数は Laurent 級数に展開できるという定理を用いて矩形境界に対する(9)式の修正項として，

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_nz^n\\ \psi_1(z)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_nz^n\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

を導入する[4]。したがつて（9）式および（10）式より本問題に対する複素応力関数として

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi_0(z)+\varphi_1(z)\\ \psi(z)&=\psi_0(z)+\psi_1(z)\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

を仮定する。変位と複素応力関数との関係式は

$$u-iv=\frac{1}{2G}\left[\kappa\,\overline{\varphi(z)}-\{\bar{z}\varphi'(z)+\psi'(z)\}\right]\qquad(12)$$

で与えられるから，(12) 式の右辺に (11) 式を代入して

$$\begin{aligned}u-iv=&\frac{T}{8G}\left[-2z+(\kappa-1)z+\frac{2r_0^2\kappa}{\bar{z}}-\frac{2r_0^2}{\bar{z}}+\frac{2r_0^2\bar{z}}{z^2}-\frac{2r_0^4}{z^3}\right]\\ &+\frac{1}{2G}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\kappa\bar{A}_nz^n-\{A_nn\bar{z}z^{n-1}+B_nnz^{n-1}\}\right]\end{aligned}\qquad(13)$$

となる。ここに $\kappa=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ である。

u, v はそれぞれ (13) 式の右辺の実数部，虚数部によつて表わされるので $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ とおいて計算すれば u, v の一般表示式として形式的に

$$\left.\begin{aligned}u&=\sum_{l_u,m_u,n_u}A_{l_um_un_u}\frac{x^{m_u}y^{n_u}}{(x^2+y^2)^{l_u}}\\ v&=\sum_{l_v,m_v,n_v}B_{l_vm_vn_v}\frac{x^{m_v}y^{n_v}}{(x^2+y^2)^{l_v}}\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

と書くことができる。ここに l_u, m_u, n_u および l_v, m_v, u_v はそれぞれ u および v に関する0または正の整数である。また Fig.1 のような領域および境界条件の場合には，u は x 軸に関して対称，v は y 軸に関して対称であるから m_u, n_v は奇数，n_u, m_v は偶数のみを考えればよい。

5 数値計算

(14) 式で仮定された変位関数を用いて（6）式による多元連立方程式を導く。(14) 式を（7）式に代入し歪成分を求め，さらに（8）式より応力成分を求めて（6）式に代入すると，

$$\begin{aligned}\iint_s&\frac{E}{1-\nu^2}\left[\sum_{l_u}\sum_{m_u}\sum_{n_u}A_{l_um_un_u}\frac{(m_u-2l_u)x^{m_u+1}y^{n_u}+m_ux^{m_u-1}y^{n_u+2}}{(x^2+y^2)^{l_u+1}}\right.\\ &\left.+\nu\sum_{l_v}\sum_{m_v}\sum_{n_v}B_{l_vm_vn_v}\frac{(m_v-2l_v)x^{n_v}y^{m_v+1}+m_vx^{n_v+2}y^{m_v-1}}{(x^2+y^2)^{l_v+1}}\right]\\ &\times\left[\frac{(m_{u(r)}-2l_{u(r)})x^{m_{u(r)}+1}y^{n_{u(r)}}+m_{u(r)}x^{m_{u(r)}-1}y^{n_{u(r)}+2}}{(x^2+y^2)^{l_{u(r)}+1}}\right]\\ &+G\left[\sum_{l_u}\sum_{m_u}\sum_{n_u}A_{l_um_un_u}\frac{(n_u-2l_u)x^{m_u}y^{n_u+1}+n_ux^{m_u+2}y^{n_u-1}}{(x^2+y^2)^{l_u+1}}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l_v}\sum_{m_v}\sum_{n_v}B_{l_v m_v n_v}\frac{(n_v-2l_v)x^{n_v+1}y^{m_v}+n_v x^{n_v-1}y^{m_v+2}}{(x^2+y^2)^{l_v+1}}\Bigg]\\
&\times\left[\frac{(n_{ur}-2l_{u(r)})x^{m_{u(r)}}y^{n_{u(r)}+1}+n_{u(r)}x^{m_{u(r)}+2}y^{n_{u(r)}-1}}{(x^2+y^2)^{l_{u(r)}+1}}\right]\Bigg\}dS\\
&-\int_{\Gamma_1}\bar{X}_\nu\frac{x^{m_{u(r)}}y^{n_{u(r)}}}{(x^2+y^2)^{l_{u(r)}}}d\Gamma=0 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_S\Bigg\{&G\Bigg[\sum_{l_u}\sum_{m_u}\sum_{n_u}A_{l_u m_u n_u}\frac{(n_u-2l_u)x^{m_u}y^{n_u+1}+n_u x^{m_u+2}y^{n_u-1}}{(x^2+y^2)^{l_u+1}}\\
&+\sum_{l_v}\sum_{m_v}\sum_{n_v}B_{l_v m_v n_v}\frac{(n_v-2l_v)x^{n_v+1}y^{m_v}+n_v x^{n_v-1}y^{m_v+2}}{(x^2+y^2)^{l_v+1}}\\
&\times\left[\frac{(n_{v(r)}-2l_{v(r)})x^{n_{v(r)}+1}y^{m_{v(r)}}+n_{v(r)}x^{n_{v(r)}-1}y^{m_{v(r)}+2}}{(x^2+y^2)^{l_{v(r)}+1}}\right]\\
&+\frac{E}{1-\nu^2}\Bigg[\sum_{l_v}\sum_{m_v}\sum_{n_v}B_{l_v m_v n_v}\frac{(m_v-2l_v)x^{n_v}y^{m_v+1}+m_v x^{n_v+2}y^{m_v-1}}{(x^2+y^2)^{l_v+1}}\\
&+\nu\sum_{l_u}\sum_{m_u}\sum_{n_u}A_{l_u m_u n_u}\frac{(m_u-2l_u)x^{m_u+1}y^{n_u}+m_u x^{m_u-1}y^{n_u+2}}{(x^2+y^2)^{l_u+1}}\Bigg]\\
&\times\left[\frac{(m_{v(r)}-2l_{v(r)})x^{n_{v(r)}}y^{m_{v(r)}}+m_{v(r)}x^{n_{v(r)}+2}y^{m_{v(r)}-1}}{(x^2+y^2)^{l_{v(r)}+1}}\right]\Bigg\}dS\\
&-\int_{\Gamma_1}\bar{Y}_\nu\frac{x^{m_{v(r)}}y^{n_{v(r)}}}{(x^2+y^2)^{l_{v(r)}}}d\Gamma=0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

ここに $r=1, 2, 3, \cdots, n$ である。

(15) 式および (16) 式が求めようとする連立一次方程式であり，元数は $2n$ であるからこれを解くことにより $2n$ 個の未知数 $A_{l_{u(r)}m_{u(r)}n_{u(r)}}$ および $B_{l_{v(r)}m_{v(r)}n_{v(r)}}(r=1, 2, 3, \cdots, n)$ が求められ（3）式より変位 u, v が級数で近似的に決定される。

以上の解析に基づいて数値計算を行なつた。使用した電子計算機は，東京大学計算センター所属の HITAC 5020 E である。板の外形状は正方形 $(a=b)$ とし $\xi\equiv\dfrac{2r_0}{a}=0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$ および 0.5 の場合の計算を行なつた。

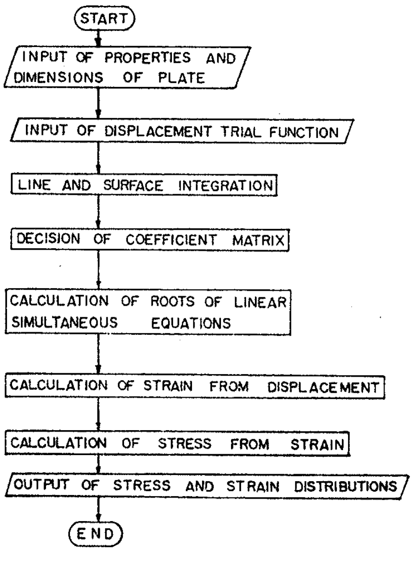


Fig. 2 Flow Chart

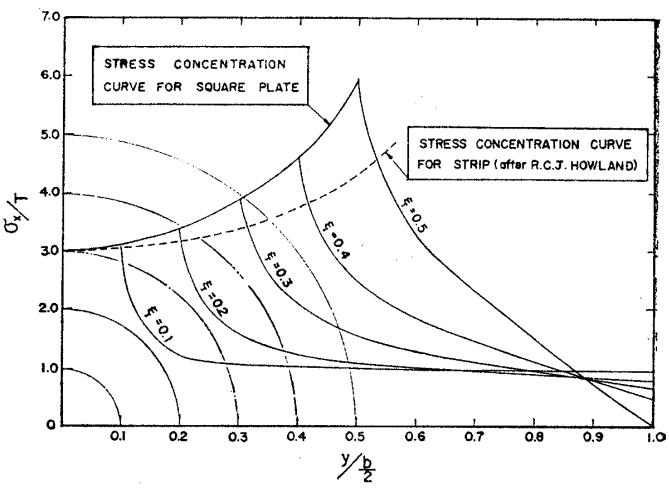


Fig. 3 Transverse Distributions of Longitudinal Stress σ_x under Uniform Tensions

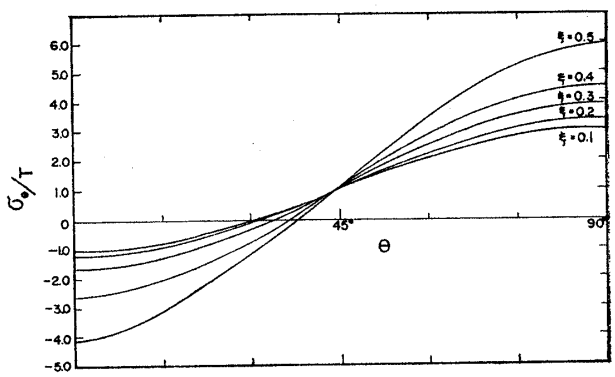


Fig. 4 Peripherical Distributions of Tangential Stress σ_θ under Uniform Tension

仮定変位関数の項数は u, v それぞれ 18 項，合計 36 項である。計算流れ図を Fig. 2 に示す。Fig. 3 に y 軸上の x 方向応力 σ_x の分布を ξ をパラメターにして示す。ただし応力および座標軸は無次元化してたて軸に σ_x/T, よこ軸に $2y/b$ をとつている。円孔縁の応力が最大値を示し，それを結んだのが応力集中率曲線である。点線で示したのは，R.C.J. Howland による帯板の理論応力集中率曲線[3] である。Fig. 4 に円孔周辺上の円周方向応力 σ_θ の分布を ξ をパラメターにして示す。Table 1 に各 ξ に関して本理論および Howland による帯板に対する応力集中率を表示する。

Table. 1 Theoretical Stress Concentration Factor on the Edge Boundary of a Circular Hole in a Square Plate

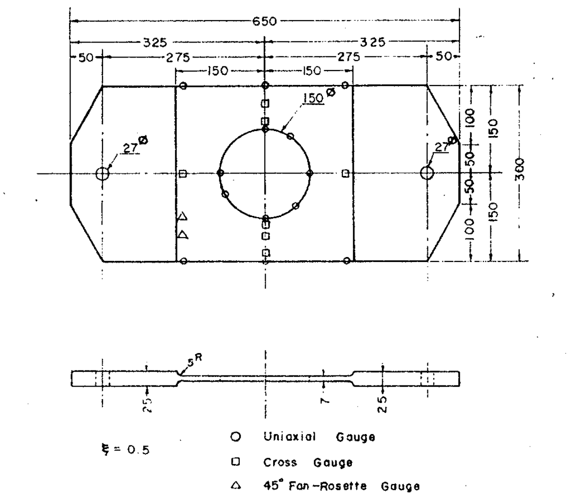
Hole Dia. to Width Ratio ξ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Present Theory	3.0409	3.1716	3.8763	4.5705	5.8616
Howland's Solution for Strip[3]	3.03	3.14	3.36	3.74	4.32

6 実　　験

前節で述べた数値計算結果をチェックするため，直径がそれぞれ 150, 90 および 30 mm の円孔を中央に加工した試験片 3 枚を製作し，引張荷重を加えて弾性歪分布の測定を行なつた。試験片は Fig. 5 に示すように 25 mm 厚さの SS 41 材から，長さ 650 mm×幅 300 mm に削り出した。なお中央の長さ 300 mm の部分は板厚 7 mm に切削加工し，この部分を試験部とした。歪分布測定のため Fig. 5 に例示する位置の表裏面に，単軸，二軸，三軸抵抗線歪計（昭和測器社製 F-2, FC-2 および FR-2）を接着した。歪分布測定に先立ち弾性限以下のならし荷重を数回加えた後，1, 2, 3, 4 ton 荷重時の弾性歪分布を計測した。測定された y 軸上の x 方向応力分布 σ_x, および円孔周辺上の円周方向応力 σ_θ の分布を，それぞれ Fig. 6 および Fig. 7 に示す。なお Fig. 6 および Fig. 7 において，たて軸には，各応力を荷重境界の単位長さ当りの平均荷重で割つて無次元化したものをとり，よこ軸には，それぞれ Fig. 3 および Fig. 4 の場合と同じ座標系をとつた。

さて，前節の数値解析の境界条件は応力で与える方式であり，一方本実験は板厚遷移部の形状から，境界条件は変位一様に近いと考えられるので，応力一様境界条件での解析結果を直接実験値と比較することはできない。そこで試験部と引張板との境界部において測定された荷重方向応力 σ_x の分布を多項式近似してこれを数値計算の境界応力値としてフィードバックさせるという方法をとつた。

このようにして数値計算した曲線を Fig. 6 および Fig. 7 に併記した。この際境界において測定された σ_y



	Thickness mm	Side Length mm	Dia. of Hole mm	$\xi = \frac{\text{Dia. of Hole}}{\text{Side Length}}$	Young's Modulus E kg/mm²	Poisson's Ratio ν
No.1	7	300	150	0.5	21,000	0.3
No.2	〃	〃	90	0.3	〃	〃
No.3	〃	〃	30	0.1	〃	〃

Fig. 5 Details of Specimen

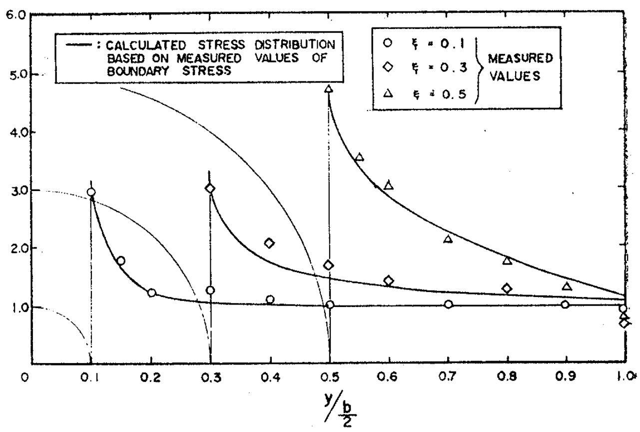


Fig. 6 Transverse Distributions of Longitudinal Stress σ_x

および τ_{xy} の値は無視できる程微小であつたので計算上考慮しなかつた。Fig. 6 および Fig. 7 からあきらかなように実験値と計算値とはかなりよい一致を示しており，これより本理論計算の妥当性が立証されていると考えられる。

なお実験において，有限寸法の矩形板の荷重境界に境界応力一様の荷重を与えることはかなり困難であり，もし試みるとすれば，多数点荷重とし，各荷重点における荷重を一様とするような装置を用いなければならないであろう。

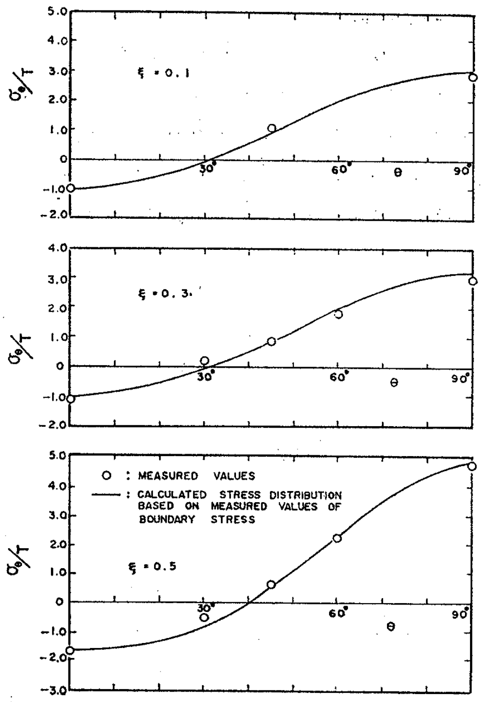


Fig. 7 Peripherical Distributions of Tangential Stress σ_θ

7. 結 言

二次元弾性論はすでに学問的体系が確立されているが，その適用し得る問題の範囲は限定されており，実際の工学的問題を取扱う場合非常に困難な場合が多い。そのような欠陥を補い，しかも一般的な実用解析法としてエネルギー法による二次元応力場の数値解法を提案し，有孔矩形板の一様引張り（応力形境界値問題）の解析を行ない，本解析の有効性を確認することができた。本研究で提案したエネルギー法に基づく数値解法は同じ流れを汲むマトリクス法とともに将来の発展が大いに期待される方法であると思われる。エネルギー法による解析において重要なことは，仮定変位関数として，実際の変位の状態を最も適確に表わし得るような級数を導入しなければならないことであつて，本論文では円孔中心における特異性を変位級数に含ませることによつて解決した。本報によると，一様応力境界条件に対する応力集中率は予想した通り，R. C. J. Howland による帯板に対する解よりもかなり高目になることが判つた。換言すれば，円孔を有する構造部材の周辺応力条件が一様分布でしかも着力点が有限位置にある場合には，Howland の解はかなり低目すぎる値を与えることになる。また当然のことながら円孔直径が板幅に比較して大になる程，その影響も増大することがわかつた。実験の測定値とそれに対応する数値計算値とはかなりよい一致を示した。

参 考 文 献

（1） 川井，多田，林："二次元弾性応力場の解析について"，日本機械学会東京秋季講演大会前刷，(1962)

（2） 川井："熱応力"，第2回生研講習会テキスト，(1964)

（3） R. C. J. Howland: "On the Stresses in the Neighborhood of a Circular Hole in a Strip under Tension", Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A vol. 229, (1930)

（4） 森口："2次元弾性論"，岩波書店，(1957)

（5） 森口，宇田川，一松："数学公式 I，II"，岩波書店，(1964)

Appendix「積分計算について」

本文 (15) 式および (16) 式において $A_{l_{u(r)}m_{u(r)}n_{u(r)}}$ および $B_{l_{v(r)}m_{v(r)}n_{u(r)}}$ $(r=1,2,3,\cdots,n)$ の係数は，領域 S における x, y の関数の面積分，外力項は境界 Γ_1 上における線積分の形になつている。以下にそれらの積分漸化式および数値解法について記す。まず面積分については，

$$I(l,m,n)=\iint_S \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}dxdy \tag{1}$$

とおく。ここに S は Fig. 1 で示した領域である。対称性より積分は S の第1象限のみを実行し，それを4倍すれば全面積に対する積分値が得られる。

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

と極座標表示を行なうと，(1) 式は

$$I(l,m,n)=\iint_S \frac{\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta}{r^{2l-m-n-1}}drd\theta \tag{2}$$

となる。線積分については,

$$J(l, m, n)=\int_{\Gamma_1}\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}d\Gamma \tag{3}$$

とおく。以下［I］,［II］,［III］において面積分,［IV］において線積分の計算式を示す。なお式中の三角関数および対数に関する公式は数学公式集[5] によつた。

［I］ $2l-m-n-1\neq 1$ の場合

（2）式をまず r について積分すれば

$$I(l, m, n)=\frac{-4}{2l-m-n-2}\int_\theta \cos^m\theta \sin^n\theta\left[\frac{1}{r^{2l-m-n-2}}\right]_r d\theta \tag{4}$$

となる。ここに $[f(r)]_r$ は r に関する積分範囲を $r_1\leqq r\leqq r_2$ とするとき $f(r_2)-f(r_1)$ をあらわす。$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ とすれば r に関する積分範囲は,

$$\left.\begin{aligned}&0\leqq\theta\leqq\alpha \text{ のとき } \quad r_0\leqq r\leqq\frac{a}{2\cos\theta}\\&\alpha\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2} \text{ のとき } \quad r_0\leqq r\leqq\frac{b}{2\sin\theta}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

である。したがつて（4）式は

$$\begin{aligned}I(l, m, n)=&\frac{-4}{2l-m-n-2}\left[\left(\frac{2}{a}\right)^{2l-m-n-2}\int_0^\alpha \cos^{2l-n-2}\theta\cdot\sin^n\theta\cdot d\theta\right.\\&+\left(\frac{2}{b}\right)^{2l-m-n-2}\int_\alpha^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^{2l-m-2}\theta\cdot d\theta\\&-\left(\frac{1}{r_0}\right)\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot d\theta\end{aligned} \tag{6}$$

と変形される。一方公式により

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot d\theta=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

である。次に $t=\tan\theta$ と置換すれば

$$\sin^2\theta=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2\theta=\frac{1}{1+t^2},\quad d\theta=\frac{dt}{1+t^2} \tag{8}$$

したがつて

$$\int_0^\alpha \cos^{2l-n-2}\theta\cdot\sin^n\theta\cdot d\theta=\int_0^{\tan\alpha=b/a}\frac{t^n}{(1+t^2)^l}dt \tag{9}$$

となる。また $t=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ と置換すれば

$$\cos^2\theta=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \sin^2\theta=\frac{1}{1+t^2},\quad d\theta=\frac{-dt}{1+t^2} \tag{10}$$

したがつて

$$\int_\alpha^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^{2l-m-2}\theta\cdot d\theta=\int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{b}}\frac{t^m}{(1+t^2)^l}dt \tag{11}$$

となる。ここで

$$I_0(p, q)=\int\frac{t^p}{(1+t^2)^q}dt \tag{12}$$

とおくと

$$\begin{aligned}I_0(o, q)=&\int\frac{dt}{(1+t^2)^q}\\=&\sum_{i=1}^{q-1}\left[\frac{(2q-3)!!(q-i-1)!}{(2q-2i-1)!!(q-1)!}\cdot\frac{t}{2^i(t^2+1)^{q-i}}\right.\\&\left.+\frac{(2q-3)!!}{(q-1)!}\cdot\frac{1}{2^{q-1}}\cdot\tan^{-1}t\right]\\=&\frac{(2q-3)!}{(q-1)!}\left[\sum_{i=1}^{q-1}\left\{\frac{(q-i-1)!}{(2q-2i-1)!!}\cdot\frac{t}{2^i(t^2+1)^{q-i}}\right\}+\frac{1}{2^{q-1}}\tan^{-1}t\right]\end{aligned} \tag{13}$$

となり (13) 式および

$$I_0(p+2,q)=\frac{t^{p+1}(t^2+1)^{-q+1}}{(p-2q+3)}-\frac{(p+1)}{(p-2q+3)}\cdot I_0(p,q) \tag{14}$$

なる漸化式を用いると $I_0(p,q)$ が順次求められる。ゆえに (6) 式より

$$I(l,m,n)=\frac{-1}{2l-m-n-2}\left[\left(\frac{2}{a}\right)^{2l-m-n}I_0(n,l)_{t=b/a}+\left(\frac{2}{b}\right)^{2l-m-n}I_0(m,l)_{t=a/b}\right]$$
$$+\frac{2}{2l-m-n-2}\left(\frac{1}{r_0}\right)^{2l-m-n-2}\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\pi \tag{15}$$

となる。

[II] $2l-m-n-1=1$ の場合

この場合は r に関する積分が対数となる。(2) 式より

$$I(l,m,n)=\iint_S\frac{\cos^m\theta\sin^n\theta}{r}drd\theta \tag{16}$$

となる。r に関して積分すれば

$$I(l,m,n)=\int_\theta\cos^m\theta\sin^n\theta[\log r]_r d\theta \tag{17}$$

積分範囲は [I] の場合と同様であるから

$$\begin{aligned}I(l,m,n)&=4\int_0^\alpha\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot\left(\log\frac{a}{2r_0}-\log\cos\theta\right)d\theta\\&+4\int_\alpha^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot\left(\log\frac{b}{2r_0}-\log\sin\theta\right)d\theta\\&=4\log\left(\frac{1}{2r_0}\right)\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot d\theta\\&-4\int_0^\alpha\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot\log\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)d\theta\\&-4\int_\alpha^{\pi/2}\cos^m\theta\cdot\sin^n\theta\cdot\log\left(\frac{\sin\theta}{b}\right)d\theta\end{aligned} \tag{18}$$

と計算される。三角関数の公式より m, n が偶数のとき

$$\left.\begin{aligned}\sin^n\theta&=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}+i}\binom{n}{i}\cos(n-2i)\theta+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n}\right]\\\cos^m\theta&=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\binom{m}{i}\cos(m-2i)\theta+\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{1}{2}m}\right]\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$\cos(p\theta)$ の展開公式より

$$\cos(p\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{(p\theta)^{2i}}{(2i)!}+1 \tag{20}$$

対数関数の公式より

$$\log\cos\theta=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{2i-1}(2^{2i}-1)B_i\theta^{2i}}{(2i)!i} \tag{21}$$

である。ここに B_i はベルヌイの数である。(21) 式において $\sin\theta=\cos\Theta$ と置換して

$$\log\sin\theta=\log\cos\Theta=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{2i-1}(2^{2i}-1)B_i\Theta^{2i}}{(2i)!i} \tag{22}$$

(7), (19), (20), (21) および (22) 式を (18) 式に代入して計算すると

$$I(l,m,n)=4\log\left(\frac{1}{2r_0}\right)\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$+4\int_0^\alpha\frac{1}{2^{m+n-2}}\left[\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\binom{m}{i}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\cdot\frac{(\overline{m-2i}\,\theta)^{2j}}{(2j)!}+1\right\}+\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{1}{2}m}\right]$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}+i}\binom{n}{i}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\frac{\overline{(n-2i\theta)}^{2j}}{(2j)!}+1\right\}+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n}\right]$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_k\theta^{2k}}{(2k)!k}-\log a\right]d\theta$$

$$+4\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{1}{2^{m+n-2}}\left[\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{i}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\cdot\frac{\overline{(n-2i\theta)}^{2j}}{(2j)!}+1\right\}+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n}\right]$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}(-1)^{\frac{m}{2}+i}\binom{m}{i}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\cdot\frac{\overline{(m-2i\theta)}^{2j}}{(2j)!}+1\right\}+\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{1}{2}m}\right]$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_k\theta^{2k}}{(2k)!\,k}-\log b\right]d\theta \tag{23}$$

となり，特に $a=b$ の場合は θ に関してさらに積分を行なつて

$$I(l,m,n)=4\log\left(\frac{a}{2r_0}\right)\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$+\frac{4}{2^{m+n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1,}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_p}{(2k)!k}\left\{(-1)^{\frac{n}{2}+j}+(-1)^{\frac{m}{2}+i}\right\}\right.$$

$$\times\binom{m}{i}\binom{n}{j}(-1)^{p}\frac{(m+n-2j-2i)^{2p}+(m-n+2j-2i)^{2p}}{(2p)!(2k+2p+1)}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2p+1}$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!\,k}\left\{1+(-1)^{\frac{m}{2}+i}\right\}\binom{m}{i}\binom{n}{\frac{1}{2}n}(-1)^{p}\cdot\frac{(m-2i)^{2p}}{(2p)!(2k+2p+1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2p+1}$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!\,k}\left\{1+(-1)^{\frac{n}{2}+j}\right\}\binom{n}{j}\binom{m}{\frac{1}{2}m}(-1)^{p}\cdot\frac{(n-2j)^{2p}}{(2p)!(2k+2p+1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2p+1}$$

$$\left.+\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!k(2k+1)}\binom{m}{\frac{1}{2}m}\binom{n}{\frac{1}{2}n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\right] \tag{24}$$

となる。

[III]　$l=0$ の場合

（1）式より

$$I(0,m,n)=\iint_S x^m y^n\,dxdy \tag{25}$$

(25) 式においては原点が特異点になつていないから矩形領域の積分から円領域の積分を差引けばよい。したがつて

$$I(o,m,n)=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}x^m y^n\,dxdy-\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}r^{m+n-1}\cos^m\theta\sin^n\theta\,drd\theta$$

$$=\frac{4}{(m+1)(n+1)}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{m+1}\left(\frac{b}{2}\right)^{n+1}-\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n+2)!!}\cdot 2\pi\cdot {r_0}^{m+n+2} \tag{26}$$

となる。

[IV]　外力仕事項の積分漸化式

矩形板の相対する辺：$x=\pm\dfrac{a}{2}$ において x 方向一様応力が働いているとすれば（3）式において積分路 Γ_1 は

$$x=\pm\frac{a}{2}\left(|y|\leqq\frac{b}{2}\right) \tag{27}$$

で与えられる。本文 (15) 式より線積分項の被積分関数は一般に

$$\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}$$

の形でありここに $l=0,1,2,\cdots$；$m=1,3,5,\cdots$；$n=0,2,4,\cdots$ である。$l\neq 0$ の場合，漸化式として

$$J(l,m,n)=\int\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}d\Gamma$$
$$=\frac{n-2l+3}{2(-l+1)}x^{m-2}J(l-1,m,n)-\frac{1}{2(-l+1)}\cdot\frac{x^{m-2}y^{n+1}}{(x^2+y^2)^{l-1}} \tag{28}$$

および

$$J(l,m,n)=\frac{-(n-1)}{-2l+n+1}x^{m+2}J(l,m,n-2)+\frac{1}{-2l+n+1}\cdot\frac{x^m y^{n-1}}{(x^2+y^2)^{l-1}} \tag{29}$$

を用い，さらに

$$\int\frac{dy}{(x^2+y^2)}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{30}$$

であるから $J(l,m,n)$ を順次計算することができる。Fig. 1 の積分路で積分を反時計方向に行なつて

$$\int_{\Gamma_1}\bar{X}_\nu\cdot\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}d\Gamma$$
$$=\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}T\cdot\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}dy\right]_{x=\frac{a}{2}}+\left[\int_{\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}}(-T)\cdot\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^l}(-dy)\right]_{x=-\frac{a}{2}} \tag{31}$$

となる。$l=0$ の場合は

$$J(0,m,n)=\int x^m y^n d\Gamma$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}x^m y^{n+1}\right]_{\substack{x=\pm\frac{a}{2}\\|y|\leq\frac{b}{2}}} \tag{32}$$

であるから

$$\int_{\Gamma_1}\bar{X}_\nu x^m y^n d\Gamma=\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}T\cdot x^m y^n\,dy\right]_{x=\frac{a}{2}}+\left[\int_{\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}}(-T)x^m y^n(-dy)\right]_{x=-\frac{a}{2}} \tag{33}$$

として計算できる。