

横動搖に於ける船の見掛の慣性力率に就て

正員 工學博士 渡邊 惠弘

Abstract.

On the apparent Moment of Inertia of Ship in free Rolling.

By Dr. Y. Watanabe, *Member*.

This paper deals, mainly by experiment, with the apparent increase of moment of inertia in the rolling of ship, due to the surrounding water, and the following results are obtained.

For the ship with bilge keel, the ratio of the apparent increase of moment of inertia to $\frac{WF^2}{6}$ (where W and B are weight and breadth of ship respectively) is proportional to the square root of the amplitude of rolling, and inversely proportional to the cubic power of the period, and consequently the period of roll decreases as the amplitude falls down.

For the ship without bilge keel, that ratio is practically independent of the amplitude, and is composed of two parts, the one being independent of the period and the other inversely proportional to the cubic power of the period.

The part that is inversely proportional to (period)³ may be attributed to the eddy fluid motion produced by the projecting portion of the hull, i. e. the bilge keel or the keel part of the aft body, but the explanation can not be given. The constant part for the ship without bilge keel, is of the same order as the calculated results by assuming the water perfect (which calculation is given in the appendix), so this part may be due to the potential fluid motion around the smooth part of the hull, in which the midship and fore bodies of the ship are included.

In the present experiments, only the one model is used, so the effect of size (i. e. the scale effect) could not be studied.

In the appendix, the theoretical apparent increase due to ideal water is calculated by hydrodynamical method, the results being compared with the experiment.

The theoretical value for ship with b. k. is generally larger than the experimental one, but the values for ship without b. k. are very near.

Also the apparent increase of mass for the case of the V-shaped body imping into the water is calculated, which may be used in some calculation of the landing of sea-plane on the water.

1. 緒 言

横動揺の際に作用する、有効なる慣性力率は、重心を通る縦軸のまはりの、それ自身の慣性力率に等しくない事は、よく知られて居る事であるが、此の差はどの位か、又或はどう云ふ性質を持つて居るか云ふ事は、餘りよく知られて居らぬ。此問題に關しては、A. W. John,⁽¹⁾ Idle and Baker⁽²⁾ 及末廣博士⁽³⁾等の研究があり、A. W. John は極く概括的の考察をし、Baker は一つの實驗より此量を求めて居り、末廣博士のは稍立入つた實驗である。是等の人々の考へ乃至結論は次の様である。即ち A. W. John によれば、是は主として bilge keel のある場合に就て考へて居るのであるが、此慣性力率の見掛けの増加は勿論、動揺に伴ふ、周圍の水の運動によるのであるが、Beaufoy の、進行の方向に直角に置かれた平板の、加速運動の實驗結果、此時の質量見掛けの増加は大體、速度に比例する故、横動揺に於ける慣性力率の見掛けの増加は bilge keel 部の平均速度に比例するだらうと云つて居る。又 Idle 及 Baker は實驗の結果 bilge keel を持つて居る船に伴ふ、水の質量は、船の質量の 0.067 前後であると稱して居る。末廣博士の實驗結果を要約すれば、此見掛けの増加と、船自身の慣性力率との比は、動揺に於ける相似則に従ひ、又はは動揺の週期が増せば減少し、その値は船の形によつて變る。

以上の諸種の結論は、水を完全流體と見た時と著しく異つて居て、完全流體の時の、此の慣性力率の増加は、全く週期等には無關係の筈である。従つて此現象には水の粘性の如きものが重なる役目をなして居て、計算では勘定が出来ずどうしても實驗的に解決しなければならぬ。唯、船の形が、bilge keel を持たない様な突出部のない時は、大體完全流體の結果が適用しうる様であるが、此時でも、尙ほ、附録に示す様に、船の後尾部の船底が突出して居て bilge keel と同じ様な作用する故、完全流體の結果がその儘は成立しない。

此論文の目的は、此の慣性力率の見掛けの増加の性質を主として實驗的に研究するにあつて、尙ほ参考の爲め、完全流體としての近似的計算結果とを比較して見た。此計算方法及結果は附録に示してある。

尙ほ完全流體として計算に用ひた、單位圓の變換形は、流體力學や彈性力學その他の應用力學上に廣く應用し得る事と思ふ。又現在の問題と類似な、直線運動に於ける質量見掛けの増加の問題を取り扱い、水上飛行機着水時の計算に、獨逸の Pabst の用ひた近似値⁽⁴⁾に對する補正を與へた。

2. 慣性力率見掛け増加の一般的性質に就ての考察

B を船の幅、 θ_0 を動揺の振幅、 T を動揺の週期とすれば、A. W. John の考によれば、見掛けの増加 ΔI は $B\theta_0/T$ に比例する筈である。又末廣博士の結果によれば、 I_0 を船自身の慣性力率とすれば

(1) T. I. N. A. 1909.

(2) „ 1912.

(3) 造船協會報第 34 號

(4) Z. F. M. 1931.

$$\frac{\Delta I}{I_0} = f(\xi) \quad \text{但し} \quad \xi = T\sqrt{B/g} \quad g: \text{重力による加速度.}$$

ξ は動揺に於ける scale effect を表す無次元の parameter である。此二つの結果が兩立するや否やを考へやう。今船の形を相似にして、大きさを n 倍にしたとすると、 I_0 は n^5 倍となる。而して動揺の相似則を満足させるとすれば $\xi = \text{const.}$ にしなければならぬ故 T は \sqrt{n} 倍にしなければならぬ。 θ_0 は兩方の場合に等しいとして、今 John の考へが正しいとすれば、 ΔI は \sqrt{n} に比例する故 $\Delta I/I_0$ は $n^{-\frac{5}{2}}$ に比例する。

然るに末廣博士の結果からは、相似則が成立する故 $\Delta I/I_0$ は不変であらねばならぬ。即ち此兩者の結論は一致せぬ譯である。

逆に船の大きさが n 倍になつたとして $\Delta I/I_0$ に相似則が成立したとすると、 ΔI は $(B/T)^{10}$ に比例しなければならぬ事は容易に求められる。

然し、考へなければならぬ事は John の假設は果して正しいか、否かと云ふ事である。John の考へ方は、Beaufoy の加速運動に對する結果を持つて來てその儘當てはめやうとして居るが、動揺の場合には加速の時期と減速の時期とがあつて、減速の場合には加速の場合の結果を適用出来ない事は John 自身も認めて居る。又 Beaufoy の實驗に於ては、平板は常に新しい水の中に運動して行くのであるが、船の動揺に於ては、前の動揺で亂された水の中を動いて行くので、此處に又著しい差異が存する。更に動揺に際しては水面に波の運動が伴ふ。従つて ΔI が $B\theta_0/T$ に比例すると云ふ様な簡単な法則は批場合成立しないと見るのが妥當であらう。

然し末廣博士の週期がますと $\Delta I/I_0$ が減ると云ふ結果は qualitatively に John の考へ方に味方をして居て、兎に角 $\Delta I/I_0$ は週期の函数である事は明である。週期の函数で且つ、相似則を満足するならば T の函数の代りに $T\sqrt{\frac{B}{g}} = \xi$ の函数と考ふべきで、更に、振幅 θ_0 に依つて變る事も又實驗の示す處なる故一般に

$$\frac{\Delta I}{I_0} = f(\xi, \theta_0) \dots \dots \dots (1)$$

なる函数と見るのが穩當であつて、此函数の形をきむるのが研究の目的である。

唯、注意すべきは ΔI は船内の重量配置には直接の關係はなく、船の形に依つてきまるものである。故に ΔI と船内の重量配置に依つてきまる I_0 との比を取る事は望ましくない。夫で、一般の船の大體の形は左様變りはないと云ふ見地から、 I_0 の代りに、是と同じ dimension を有する

$$I = \frac{WB^2}{6}$$

を取つた。此形を取つた理由に就いては附録 7 を参照せられ度し。⁽¹⁾ そして $\Delta I/I$ が ξ 及 θ_0 のいかなる函数かと云ふ事を求めたのである。

(1) 實驗に於ける ΔI は質量の慣性力率でなく、重量の慣性力率を取つた。従つて、 I の式は g で割てない。

此の實驗では、形狀が相似で大きさの異なる二つの模型を得る事が出来なかつたので、唯一つの模型に就て行つた。従つて (1) 式の中に含まれた B の影響は實驗的には出さず、唯末廣博士の相似則が成立すると云ふ結論が有効であると假定して、實驗的には T の影響を求め、結果に T の代りに ξ を入れたのである。末廣博士の實驗は、論文中には斷つてないが、bilge keel のない場合の様に思はれる。b. k. のない場合を、ある場合に適用するのは、正しいか否かは分らず、是は後の機會に於て、更に大きい模型で實驗して、此假定を確め度いと思つて居る。現在では此假定が成立するものとして議論を進める事にする。

模型は輕巡洋艦で、その主要寸法は次の通りである。⁽¹⁾

模型の長	5 呎	Block coef.	0.5
模型の幅	0.887 呎	模型の重量	40.961 磅
“ 吃水	0.301 呎	cruiser stern	

實驗方法は、是等の實驗で行ふ、普通の方法で特記すべき事は無い故省く。唯週期は可也嚴密に計測する必要ある故、動搖の有様を記録して、是より測つた。

3. Bilge keel のある場合

bilge keel は船の長の中央 $\frac{1}{2}$ の間に高 $\frac{1}{2}$ 吋のものを diagonal line に沿ふて、外殻に垂直の方向に取りつけた。

實驗は四通りの metacentre の高に就て行つたので、その結果は次表の通りである。唯週期は振幅 θ_0 に依つて變る故、此變る有様は後に Fig. 2 で示す通りであるが、 $\Delta I/I$ の計算には何れも $\theta_0 = \text{const.}$ の時のものを取る必要があり、 $\theta_0 = 5^\circ$ を標準に取つた。

第 1 表

metacentre の高 (呎)	全週期 $T_{5.0}$ 秒	I_0 (磅呎 ²)	I_1 (磅呎 ²)	$I_1 - I_0 =$ ΔI (磅呎 ²)	$\Delta I/I$	$\Delta I/I_0$	I_0/I
0.0746	1.09	2.428	2.965	0.533	0.0998	0.221	0.453
0.1052	0.955	2.334	3.100	0.866	0.1614	0.371	0.435
0.1107	0.93	2.320	3.200	0.880	0.1638	0.378	0.432
0.1579	0.84	2.477	3.720	1.252	0.2331	0.506	0.460

平均 0.447

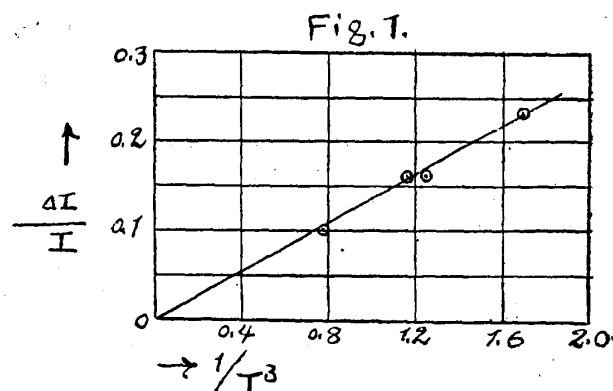
但し I_1 は $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Wmg$ より計算せる動搖の際の有効慣性力率

$$m \text{ は metacentre の高, } I = \frac{WB^2}{6} = 5.3681$$

(1) 是等の寸法は元々 ft., lbs. の單位で與へられてあつたので、従つて以下の計算も此單位で行つた故 meter, gram 等の單位は使はなかつた。

$\Delta I/I$ と T とは、 T が増すに従つて前者は減るが John の考へ方の様に此兩者は決して一次的の関係ではなく、反つて、 $\Delta I/I$ と $1/T^3$ とが殆んど一次的の関係を有す。是を圖に示したのが Fig. 1 であつて、即ち T^3 に逆比例する事が分る。此兩者の關係は次式で示される。

$$\sqrt{\frac{\Delta I}{I}} = \frac{0.136}{T^3} \dots\dots\dots (2)$$



次に $\Delta I/I$ と振幅との關係を求める。一般に週期は振幅の増すと共に増加する事は認められて居るが、現在の模型實驗より得られた結果は Fig. 2 の如きものである。今週期を次の様に書く。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + \Delta I}{Wmg}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Wmg}} \sqrt{1 + \Delta I/I_0} \dots\dots\dots (3)$$

$2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Wmg}} \equiv T_0$ とおき、又 $\Delta I/I_0 = \frac{I}{I_0} \cdot \frac{\Delta I}{I}$ とおく。然る時は $[\Delta I/I]_{\theta_0=5^\circ} = \frac{0.136}{T^3}$ であつて、且つ此實驗に於ける I/I_0 の平均値を第 1 表より取れば

$$\left[\frac{\Delta I}{I_0} \right]_{\theta_0=5^\circ} = \frac{0.304}{T^3} \quad \therefore \quad \left[\frac{\Delta I}{I_0} \right]_{\theta_0} = \frac{0.304}{T^3} \cdot \frac{F(\theta_0)}{F(5^\circ)} \dots\dots\dots (4)$$

今振幅が非常に小さくなり、極限として zero となる時は、船は靜止して居る時で、此時は水の運動の影響はなく、従つて慣性力率は I_0 となる。

$$\therefore T_{\theta_0=0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Wmg}} = T_0$$

従つて (3) と (4) を比較すれば $F(\theta_0)$ なる θ_0 の函数は $\theta_0=0$ の時、zero となる様なものでなければならぬ。此様な函数の取り方は種々あるが $F(\theta_0) = \sqrt{\theta_0}$ とおく時は計算による T の値と實驗結果と非常によく合ふ。然る時は

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 0.136 \frac{\sqrt{\theta_0}}{T^3} \quad \text{但し } \theta_0 \text{ は degree で表はす。} \dots\dots\dots (5)$$

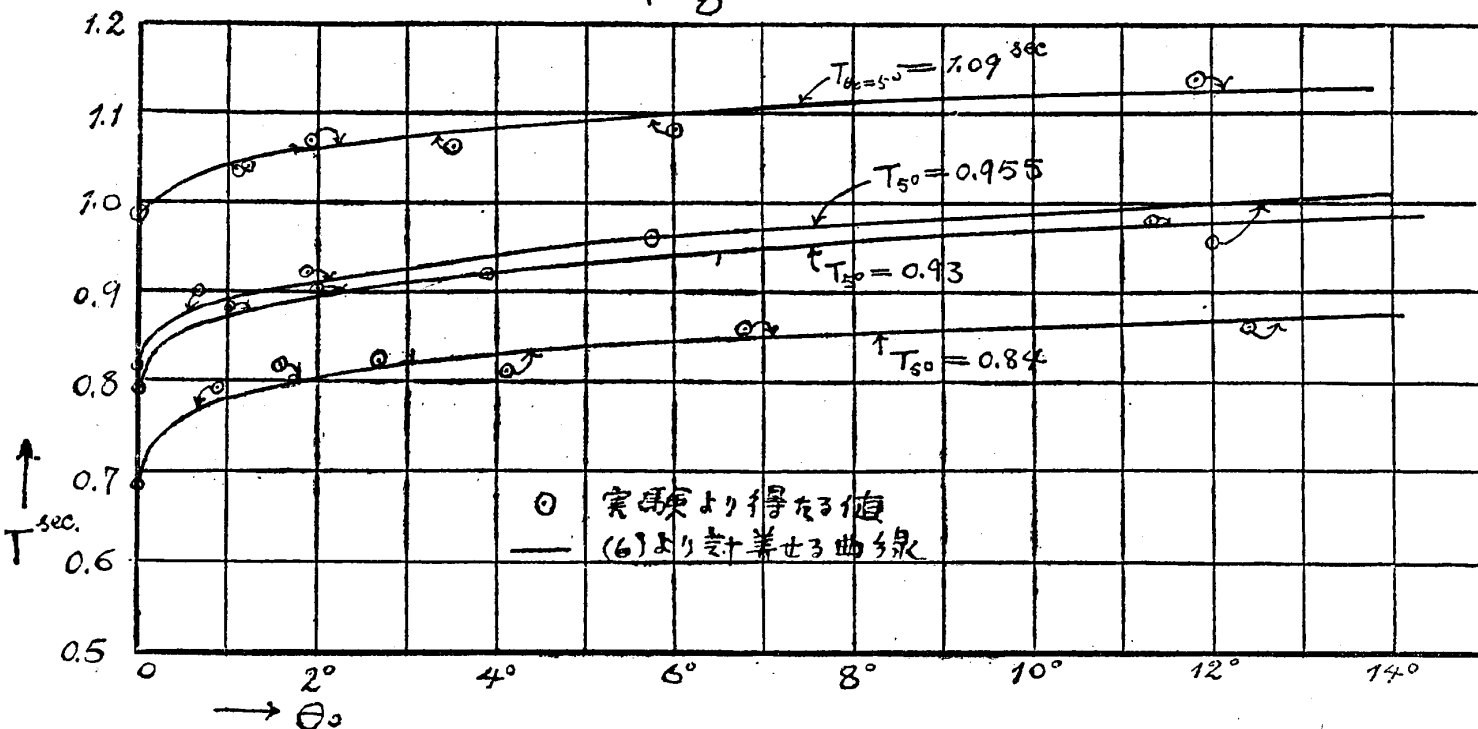
故に週期と振幅との關係は

$$T = T_0 \sqrt{1 + 0.136 \frac{\sqrt{\theta_0}}{T^3}} \dots\dots\dots (6)$$

是を實驗値と比較して曲線に表せば Fig. 2 の様になり、實驗値と非常によく合ふ。

前に述べた様に、 ΔI と I_0 とは直接の關係なく、従つて模型實驗に於ける I_0/I が實際の船の場合に用ひ得るとは限らぬ故 (5) の代りに $\Delta I/I$ を T 及 θ_0 の函数として表して置いた方が適當である。

Fig. 2



$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_0}{I} \cdot \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{0.0608\sqrt{\theta_0}}{T^3}, \quad \theta_0 \text{ in degree} \dots \dots \dots (7)$$

次に船の大きさ即ち \$B\$ の影響であるが、前述の様に一つの船の實驗しかやれなかつたので、是を研究する事は出来なかつた。夫で末廣博士の相似則が成り立つと云ふ結論も此場合用ひ得ると假定して \$T\$ の代りに \$\xi\$ を入れると

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.608\sqrt{\theta_0}}{\xi^3 \times \left(\frac{0.877}{32.2}\right)^{3/2}} = \frac{13.22\sqrt{\theta_0}}{\xi^3} \dots \dots \dots (8)$$

是が bilge keel のある場合に就て結局得られた結果である。是式中の數字は船の形狀や、幅と吃水との比、bilge keel の高さに依つて變つて來る事勿論で一般に船が full になるに従ひ、又幅が吃水に比して大きくなるに従ひ、又 bilge keel の高さが大きくなるに従つて、増加するものと思はれる。

又 A. W. John の考へが全然成り立たず、従つて (8) の様な法則が成り立つ理由の説明も非常に困難になつて來る事が分るだらう。

4. Bilge keel の 無 い 場 合

上述の模型より bilge keel を除き、矢張り metacentre の高さの四つの値に就いて實驗した。結果は次の通りである。

第 2 表

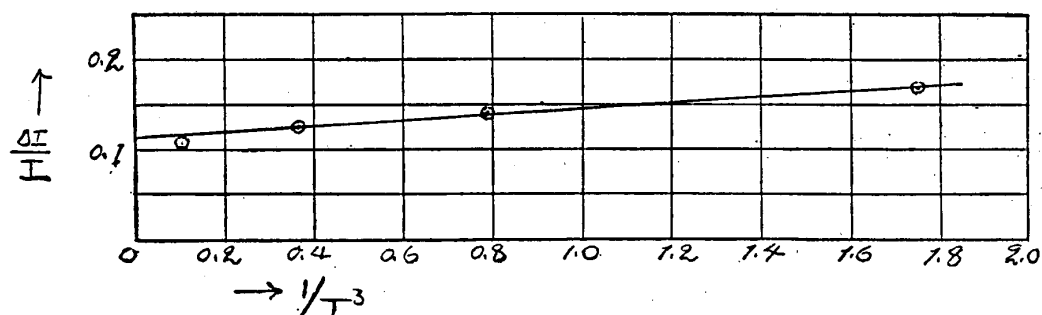
metacentre の高 (呎)	週期 (秒)	I_0 (磅呎 ²)	I_1 (磅呎 ²)	ΔI (")	$\Delta I/I$	$\Delta I/I_0$
0.1405	0.83	2.328	3.229	0.901	0.168	0.387
0.0815	1.08	2.420	3.171	0.751	0.140	0.310
0.0524	1.4	2.751	3.425	0.674	0.126	0.245
0.0259	2.1	3.226	3.809	0.583	0.109	0.181

此時 bilge keel を除いた爲め模型の重量は 40.89 磅となり $I=5.357$ となる。此場合は bilge keel のある時に比較して週期は振幅には全く関係がなくなつて居て常に const である。是は 3 の場合に於ける週期と振幅との関係は全く bilge keel に依るものである事を意味する。

此模型は cruiser stern を有し、従つて船尾底部の突出状態は商船に比して少い。此部分に於ける突出部が bilge keel と同じ様な作用をなす事は想像し得らるゝ故 cruiser stern を有たぬ船の週期は、振幅に幾分影響せらるゝであらう。

此場合の實驗の analysis は bilge keel のある場合と全く同様で $\Delta I/I$ と $1/T^3$ との曲線を取つて見ると、實驗値は Fig. 3 より見る様に全く一直線上に來るが、唯 bilge keel のある場合と違つて原點を通過しない。是を式で表せば次の様になる。

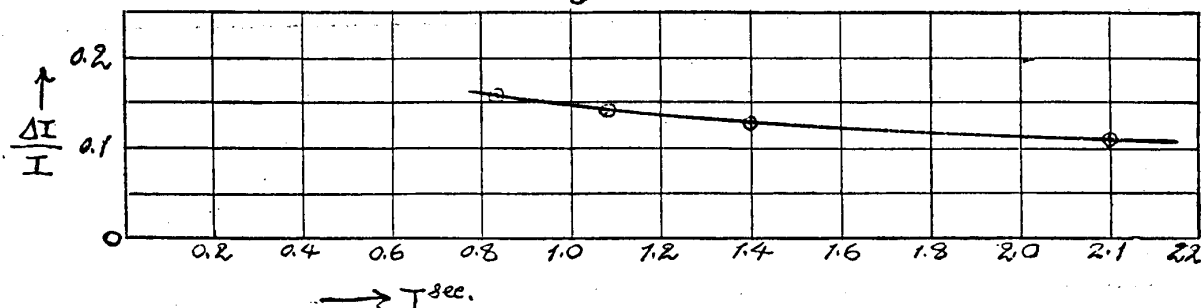
Fig. 3



$$\sqrt{\frac{\Delta I}{I}} = \frac{0.0322}{T^3} + 0.112 \dots\dots\dots (9)$$

此二つの項の中第1項の T は實際の船の週期に對し、此程度の模型では大體1前後の値なる故 T^3 に逆比例する部分は常數部に對して 10%~50% 位の間にあり、先づ常數部が主なるものである。此 T^3 に比例する項は 3 の場合の bilge keel の如く、突出部による流體中の渦運動によるもので、此場合は突出部が少い故、此渦運動の影響が少く、全體の一部として現れたものと思はれる。若し、3 の流體運動と (9) の第1項の原因たる流體運動が同じ種類のものであるとすれば、此項は矢張り振幅の平方根に比例する如き性質のものであるかも知れぬが、是は全體の中で一部にしか過ぎず、従つて、週期の實驗結果に迄は影響せぬのであらう。若し精密にやれば此影響も出て來るかも知れぬが、吾々

Fig. 3'



の行つた実験の精度に於ては現れなかつた。

次に (9) の第 2 項は $\Delta I/I$ が週期や振幅等に全然無関係で常に const. である事を示し、是は完全流體に於て成立する事柄であつて、而も此數の order は附録、7 に示した理論的計算値 0.185 と same order で、且つ船の後尾部が渦運動に寄與する處多く、中央部及前後が渦運動の起り方が少いと見て、中央部及前部に就いてのみ計算すれば $\Delta I/I \doteq 0.133$ となる事は附録に示す處である。

従つて、此常數部は船の中で、potential flow の起る部分に於ける完全流體として働く時の値であつて、是は主として船の中央部及前部によるものである事が分る。

前と同様に矢張り $\Delta I/I$ に對して相似則が成立するものと假定すれば (9) は次の様になる。

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.193}{\xi^3} + 0.112 \dots\dots\dots (10)$$

5. 船 の 場 合 に 對 す る 考 察

斯の如き模型實驗の結果を、實際の船に適用するにはどうしても相似則の成立を假定しなければならぬ。若し此假定が許されるならば種々の面白い結果が出る。bilge keel のある場合の週期の式は次の様になる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + \Delta I}{Wmg}} \quad \text{但し} \quad \Delta I = \frac{WB^2}{6} \cdot \frac{13.22\sqrt{\theta_0}}{\xi^3}.$$

今船自身の慣性力率半徑を cB とおけば $I_0 = Wc^2B^2$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{B^2c^2 + \Delta I/WB^2}{mg}} = 2\pi \frac{B}{\sqrt{mg}} \sqrt{c^2 + \frac{2.203\sqrt{\theta_0}}{\xi^3}}$$

$\theta_0 = 5^\circ$ に取り、 $B/m = \eta$ とおけば次の様になる。

$$\xi = 2\pi\sqrt{\eta} \sqrt{c^2 + \frac{4.92}{\xi^3}} \dots\dots\dots (11)$$

多くの船 (軍艦及商船を含む)⁽¹⁾ の週期、 B 及 m の data より ξ, η を計算して $\xi-\eta$ 圖に書き入れると Fig. 4 の如くなり、圖の如き平均曲線が得られる。是等の値を使つて (11) から c を計算す

(1) 是等は何れも bilge keel を附した船である。

η	9	16	25	35	49
c	0.352	0.362	0.362	0.353	0.312

ると次の様になる。

即ち尤も多い $\eta=15\sim25$ では $c=0.362$ で是より η が小さくなり或は大きくなると漸次小さくなる。此値は勿論

Fig. 4.

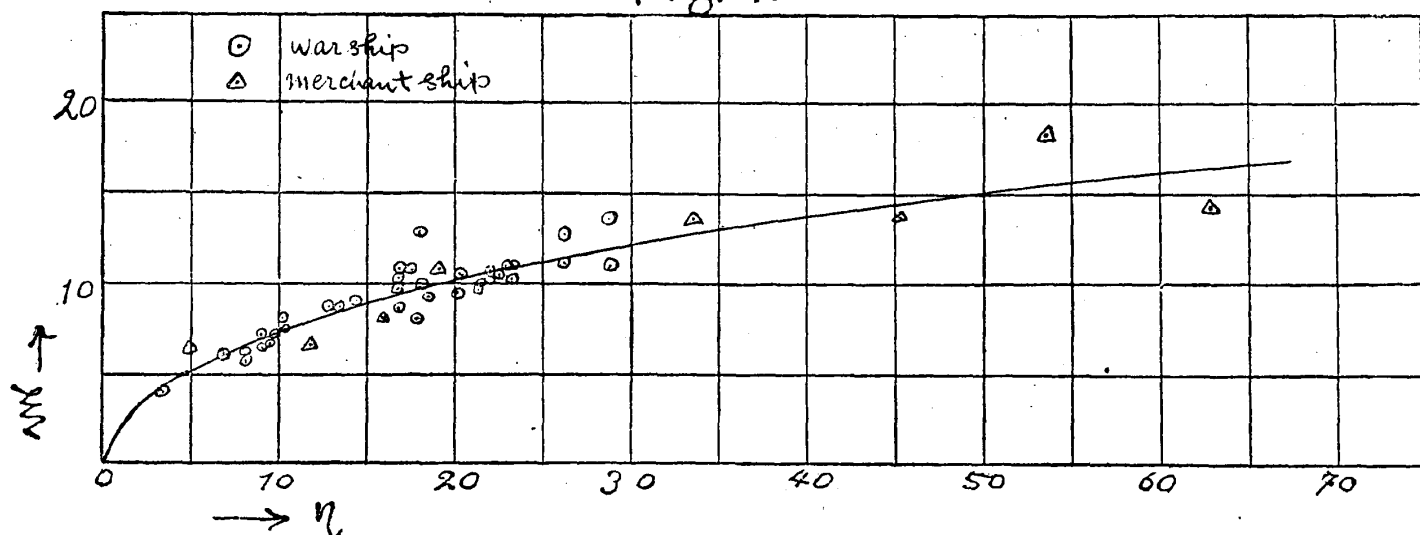


Fig. 4 の如き rough な平均曲線より取つた故總ての船に就て正しく成立するとは云ひ得ないが大體の傾向を知りうる筈である。

又 ξ の小さい間は見掛けの増加は可也大きいが ξ が大きくなると、是は非常に小さくなる。 ξ は一般に η が大きくなると、大きくなり、 η は船の大きさの割に metacentre の高が増加しない時に大となる。故に船の大きさの割に m が小さい船では、見掛けの増加は非常に小さい。船の大きさに對して、 m の大きい船では、見掛けの増加が大きいと共に、週期が振幅に depend する。

bilge keel のない船では、ある程度迄以上の事は成立するのであるが、此傾向は可也小さい故、 ξ が増ても、慣性力率見掛けの増加は、餘り減らぬ。故に ξ の小さい時は bilge keel を付けた方が見掛けの増加は大きいだが、 ξ が大きくなると、反つて bilge keel を付けない時が大きくなり得る。従つて、 ξ の小さい時は bilge keel を付けると週期の増加は大きいが、 ξ の大きい處では、その増加は非常に小さくなる筈である。

6. 結 論

以上の實驗は、慣性力率の見掛けの増加の研究に對しては未だ充分ではなく、更に船の大きさの影響に對する研究を附け加へなければならぬが、少くとも次の事柄が分つた。

1. 慣性力率の見掛けの増加は、完全流體の時とは大分異り、且つ一般に完全流體としての値より小さい。
2. bilge keel のない時は、此見掛けの増加の一部は週期の 3 乗に逆比例し、他の一部は動搖の

性質には無関係で、常に const である。そして前者は流體の渦運動により、後者は potential flow によるものと想像せられる。

3. bilge keel のある時は、全部週期の 3 乗に逆比例する。従つて potential flow による見掛けの増加は殆んどないと考へられる。

4. bilge keel のない時は、見掛けの増加は振幅に無関係であるが、bilge keel のある場合は、振幅の平方根に比例する。

5. 若し、此慣性力率の増加と、船自身の慣性力率の比が動搖の相似則に従ふと假定すれば、大體船の大きさに比して metacentre の高さの小さい船の見掛けの慣性力率の増加は小さくなる。

是等の結果の中で、渦運動による慣性力率の増加は何故に週期の 3 乗に比例し、振幅の平方根に逆比例するかと云ふ根本的の問題は、まだ分らず、船の大きさの影響と共に今後の研究を俟たねばならぬ。

尙ほ此實驗は當教室の池田茂君の手を煩はした事を附記する。

(九州帝國大學造船學教室にて)

5. 附 録

[完全流體中に於ける慣性力率又は質量の見掛けの増加の計算]

1. 單位圓の基礎的變換

ζ -面上の原點に中心を持つ、半徑單位の圓 K' が、 z -面上の多角形 K に、又 K' の外部が K の外部に等角的に寫影せらるゝものとし、且つ、 K 上の稜 A, B, C, \dots は K' 上の A', B', C', \dots に相對應するものとすれば次の關係の變換式の成立する事はよく知られて居る。

$$\frac{dz}{d\zeta} = M \left(1 - \frac{\zeta_{A'}}{\zeta}\right)^r \left(1 - \frac{\zeta_{B'}}{\zeta}\right)^s \left(1 - \frac{\zeta_{C'}}{\zeta}\right)^t$$

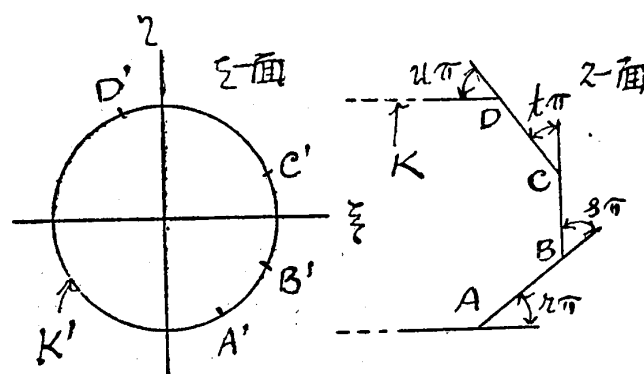
..... (1)

但し次の條件が必要である。

[I] r, s, t, \dots は多角形の外角の、 π の倍數で、多角形が常に凸形である爲の條件として、是等は 0 と 1 の間にある事。

[II] $\zeta_{A'}, \zeta_{B'}, \zeta_{C'}, \dots$ は A', B', C', \dots の各點の ζ の値で、是等が單位圓周上にある爲の條件として

$$|\zeta_{A'}| = |\zeta_{B'}| = |\zeta_{C'}| = \dots = 1$$



[III] (1) の積分した結果に於て $z=\infty$ と $\zeta=\infty$ と相對應する爲、(1) の右邊の $1/\zeta$ の項の係数が zero なる事を要す。即ち

$$r\zeta_{A'} + s\zeta_{B'} + t\zeta_{C'} + \dots = 0$$

[IV] 多角形の外角の和 2π なる爲

$$r+s+t+\dots=2$$

積分の常数は ζ -面と z -面の相對應した點を比較して決定せられ、又 (1) の M は二つの面の scale ratio を表す。

以上の諸條件を満足すれば多角形を得られるのであるが、[III] 以外の諸條件が成立しないと多角形の形が亂れて、種々の變換形が得られる。

尙ほ單位圓の内部を多角形の内部へ等角寫影する變換式は次の様である。

$$\frac{dz}{d\zeta} = M(\zeta - \zeta_{A'})^r (\zeta - \zeta_{B'})^s (\zeta - \zeta_{C'})^t \dots \dots \dots (1)'$$

條件としては [III] 以外のものが必要である。

次に (1) の變換の二三の例を示す。

(a) 矩形 $r=s=t=\mu=1/2$ に取れば [I] 及 [IV] を満足する。

又 $\zeta_{A'} = -\zeta_{C'}$, $\zeta_{B'} = -\zeta_{D'}$ に圓周上にと

れば [II] 及 [III] を満足する。

$$\therefore z = M \int \sqrt{1 - \frac{2\cos 2\varphi}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^4}} d\zeta$$

$$\dots \dots \dots (2)$$

是は橢圓積分の形であるが、此場合は $1/\zeta$ の冪級數に展開した方が都合がよい。

$$\frac{z}{M} = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \zeta^{-(2n-1)} + (A + iB)$$

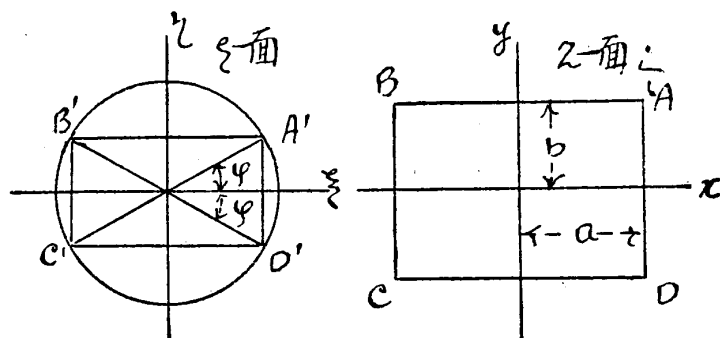
但し

$$A_1 = -\cos 2\varphi, \quad A_3 = -\frac{\sin^2 2\varphi}{6}, \quad A_5 = -\frac{\cos 2\varphi \sin^2 2\varphi}{10},$$

$$A_7 = -\frac{(5\cos^2 2\varphi - 1)\sin^2 2\varphi}{56}, \quad A_9 = -\frac{(7\cos^2 2\varphi - 1)\cos 2\varphi \sin^2 2\varphi}{72}$$

$$A_{11} = -\frac{(21\cos^4 2\varphi - 14\cos^2 2\varphi + 1)\sin^2 2\varphi}{176}, \dots$$

故に $\zeta = e^{\alpha + i\beta}$ とおけば



$$\left. \begin{aligned} x/M &= e^{\alpha} \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \cos(2n-1)\beta + A \\ y/M &= e^{\alpha} \sin \beta - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \sin(2n-1)\beta + B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

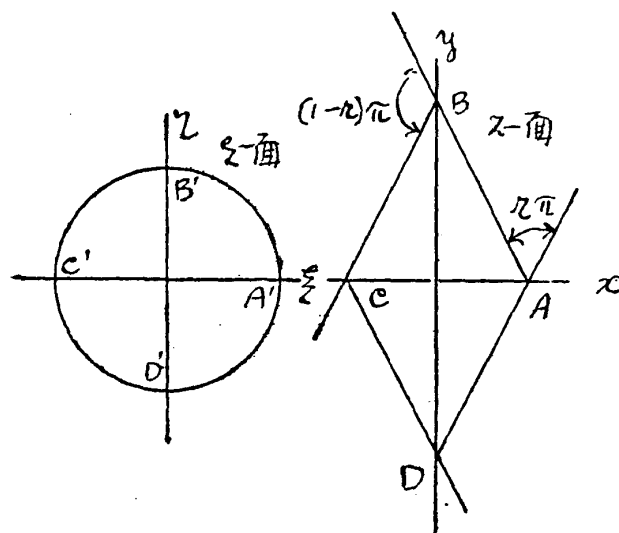
圓周上では $\alpha=0$ で、且つ A と A' , B と B' , ... 等の相對應する條件を入れると $A=B=0$ となる。又此條件より φ と b/a との關係が次の様に得られる。

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \sin(2n-1)\varphi}{\cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos(2n-1)\varphi} \dots\dots (4)$$

是を圖示したものが Fig. 5 である。

矩形の外側の領域は、 $\alpha=0 \rightarrow \infty$ の間及 $\beta=-\pi \rightarrow \pi$ の間にある。此形の慣性力率の増加に關しては、末廣博士の實驗があり、實驗値と計算値の比較は 7 に述べる。

b. 菱形。此時は $r, s=1-r, t=r, u=1-r$ とし、



A', B', C', D' を左圖の如く取る。

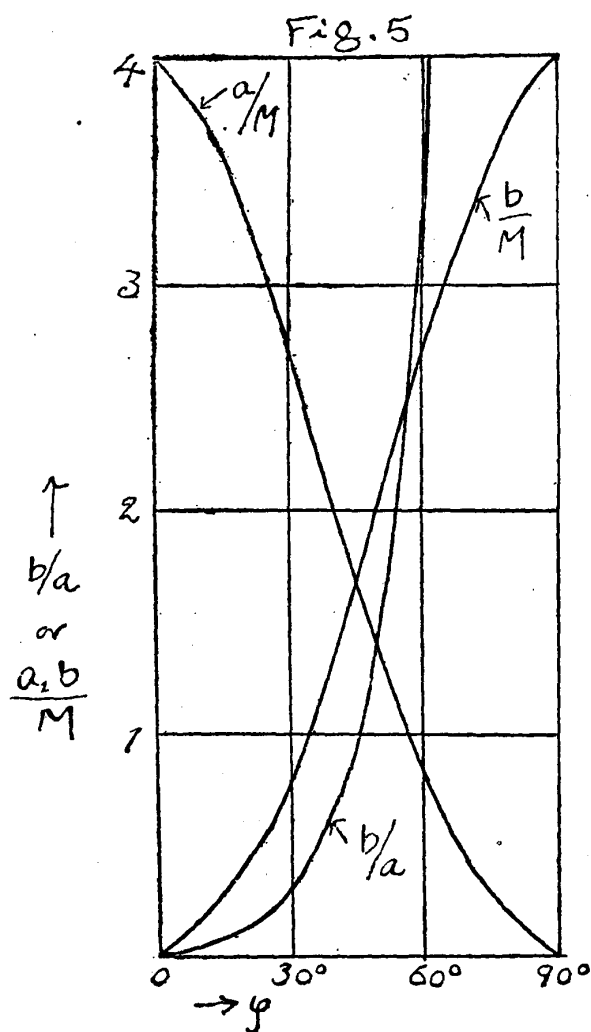
$$\frac{dz}{d\xi} = M \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^r \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^{1-r}$$

積分常數は zero となり

$$\frac{z}{M} = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \xi^{-(2n-1)} \dots\dots\dots (5)$$

但し

$$A_1 = -(1-2r), \quad A_3 = \frac{(1-r)2r}{3}, \quad A_5 = \frac{2r(1-r)(1-2r)}{15},$$



$$A_7 = \frac{2r(1-r)(1-r+r^2)}{21}, \quad A_9 = \frac{2r(1-r)(3-7r+3r^2-2r^3)}{135}, \dots$$

$x/M, y/M$ は (3) と同じで唯 A_{2n-1} の値が異なる。

此形は飛行機の float 又は飛行艇の胴體の底部の切口の形を示し、着水時の衝撃の計算に於て、Pabst⁽¹⁾ は此切口の物体が水の中を進行する場合の virtual mass が、どれ丈になるかについて近似的假定をなして居るが、上の如き變換形は後述の如き方法で計算すれば容易に求められる。

2. [IV] の條件が満足されぬ場合

外角の和が 2π に等しくないと云ふ多角形は存在しない。然るに A', B', C', \dots 等に於ては ζ -面の圓弧は、等角寫影の特異點の性質として、 z 面に $(1-r)\pi, (1-s)\pi, \dots$ の角に移される故、多角形を形作る各邊は直線ではなく、曲線となる。此場合の一二の例を示す。

a. $r=t, s=u=1$ の四稜形を取る。是は明に A と C に於て $(1-r)\pi$ の cusp, B と D で 0 の cusp angle を有する。

$\zeta_A' = -\zeta_C' = i, \zeta_B' = -\zeta_D' = 1$ に取れば前同様にして

$$\frac{dz}{d\zeta} = M \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)$$

$x/M, y/M$ は矢張り (3) と同様で、各係數の値は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (1-r), \quad A_3 = \frac{r(3-r)}{6}, \quad A_5 = -\frac{(1-r)(5-r)}{30}, \\ A_7 &= \frac{r(1-r)(2-r)(7-r)}{168}, \quad A_9 = -\frac{r(1-r)(2-r)(3-r)(9-r)}{1080}, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

$r=1/2$ の時の單位圓の變換形は Fig. 6 の様になる。

此形は船の後部の吃水線以下の形を近似する。

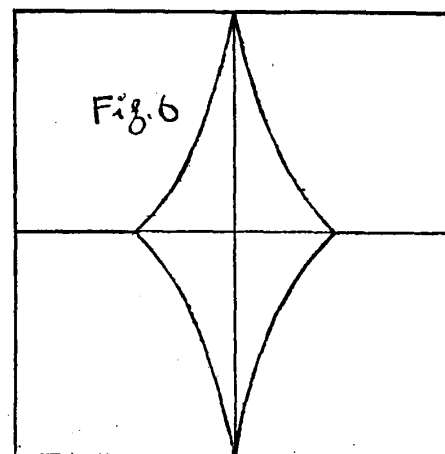
b. $r=s=t=u=1$ の場合

$$\frac{z}{M} = \zeta + \frac{2 \cos 2\varphi}{\zeta^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\zeta^3}$$

$$\therefore \frac{x}{M} = e^{\alpha} \cos \beta + 2 \cos 2\varphi \cdot e^{-\alpha} \cos \beta - \frac{1}{3} e^{-3\alpha} \cos 3\beta \quad (7)$$

$$\frac{y}{M} = e^{\alpha} \sin \beta - 2 \cos 2\varphi \cdot e^{-\alpha} \sin \beta + \frac{1}{3} e^{-3\alpha} \sin 3\beta$$

單位圓の變換形は $\alpha=0$ とおき

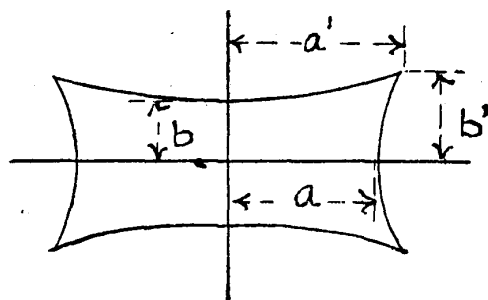


(1) Z.F.M. 1931.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= (1 + 2 \cos 2\varphi) \cos \beta - \frac{1}{3} \cos 3\beta \\ \frac{y}{M} &= (1 - 2 \cos 2\varphi) \sin \beta + \frac{1}{3} \sin 3\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

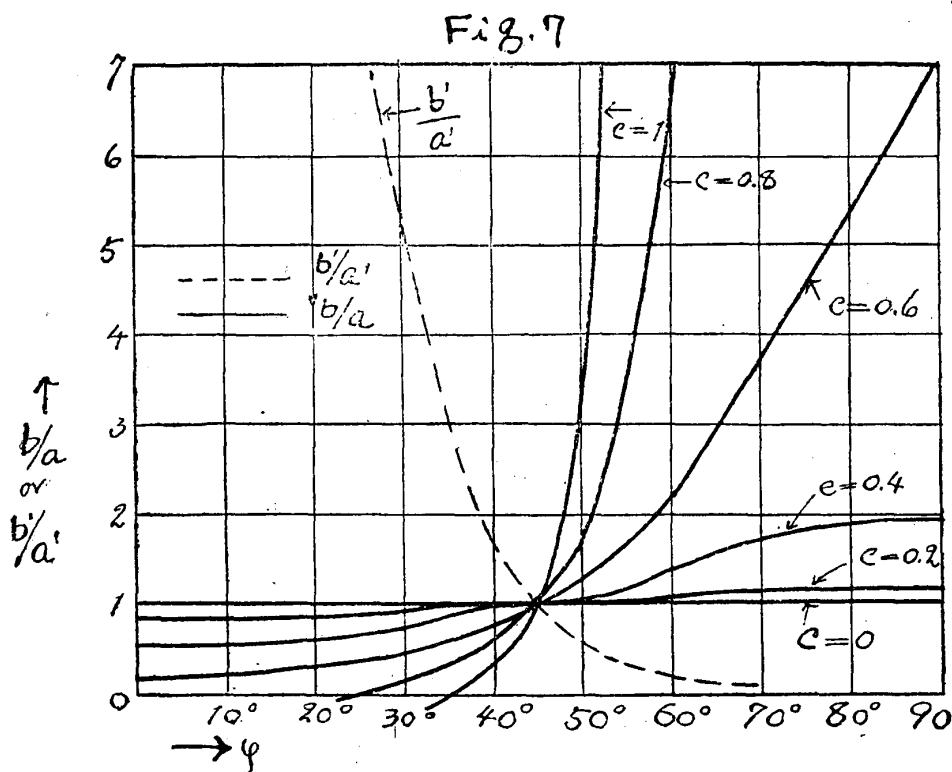
此形は次の如きもので、兩邊の比 b'/a' 又は b/a は φ に依つてきまる。即ち此關係は

$$\left. \begin{aligned} \frac{b'}{a'} &= \cot^3 \varphi \\ \frac{b}{a} &= \frac{2 - 6 \cos 2\varphi}{2 + 6 \cos 2\varphi} \end{aligned} \right\}$$



是を圖に示せば Fig. 7 の如く $\varphi = 40^\circ$ の時の (8) によつて與へられる變換形は Fig. 9 の $c=1$ の場合である。

此變換形で特に $\varphi = \pi/4$ の時は hypocycloid と稱せられる。



3. [II] の條件が満足されぬ場合

是は A', B', \dots 等の特異點の何れかが、單位圓の内部に入つた場合で、此時は變換形は、此内部に入つた特異點に相當する cusp がなくなり、連續的の曲線となるが、特異點が圓周に近づく程此附

近の變換形は突出する。

特異點が外部に行く時は等角に寫影せらるる領域に特異點が生ずる故、外部に特異點は置かない。故に單位圓の内部を z -面の變換形の内部に等角に寫影する如き場合は、特異點は圓の外部に置かねばならぬが此問題は現在用ふる事柄とは少し違ふ故、立入らぬ事にする。

一二の例を示す。

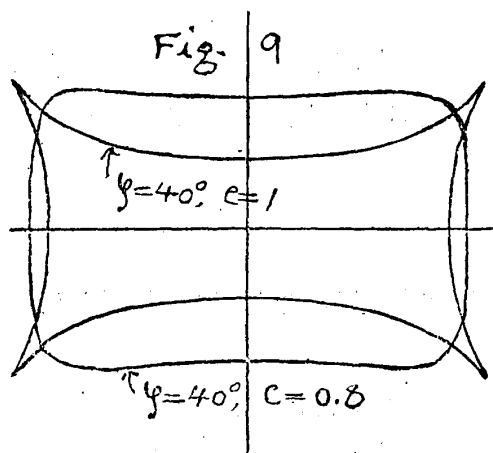
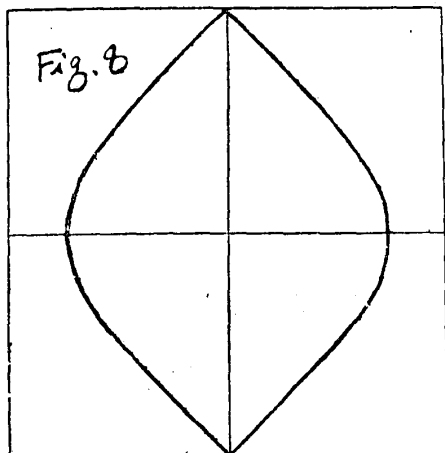
a. 此例として 2-a に於て zero の cusp angle を與へる特異點が單位圓の内部に入つた場合を見る。即ち

$$\frac{dz}{d\zeta} = M \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)^r \left(1 - \frac{c^2}{\zeta^2}\right) \quad \text{但し } c < 1$$

$$\therefore \frac{z}{M} = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \zeta^{-(2n-1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } A_1 &= c^2 - r, \quad A_3 = \frac{r \left(c^2 + \frac{1-r}{2} \right)}{3}, \quad A_5 = -\frac{r(1-r) \left[c^2 + \frac{2-r}{3} \right]}{10} \\ A_7 &= \frac{r(1-r)(2-r) \left[c^2 + \frac{3-r}{4} \right]}{42}, \quad A_9 = -\frac{r(1-r)(2-r)(3-r) \left[r^2 + \frac{4-r}{5} \right]}{216}, \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \dots + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \cos(2n-1)\beta \\ \frac{y}{M} &= e^{\alpha} \sin \beta - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \sin(2n-1)\beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$



此變換形の $r=0.5$, $c=0.6$ の場合を Fig. 8. に示す。此形の半分は船の前部の吃水線以下の形を近似する。

b. 更に 2.b の例に於ける特異點が圓の内部に入り

$$|\zeta_A| = |\zeta_B| = |\zeta_C| = |\zeta_D| = c < 1$$

に取れば

$$\frac{z}{M} = \zeta + \frac{2c^2 \cos^2 \varphi}{\zeta} - \frac{c^4}{3\zeta^3}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= e^{\alpha} \cos \beta + 2c^2 \cos 2\varphi \cdot e^{-\alpha} \cos \beta - \frac{c^4}{3} e^{-3\alpha} \cos 3\beta \\ \frac{y}{M} &= e^{\alpha} \sin \beta - 2c^2 \cos 2\varphi \cdot e^{-\alpha} \sin \beta + \frac{c^4}{3} e^{-3\alpha} \sin 3\beta \end{aligned} \right\}$$

従つて單位圓の變換形は

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= (1 + 2c^2 \cos 2\varphi) \cos \beta - \frac{c^4}{3} \cos 3\beta \\ \frac{y}{M} &= (1 - 2c^2 \cos 2\varphi) \sin \beta + \frac{c^4}{3} \sin 3\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

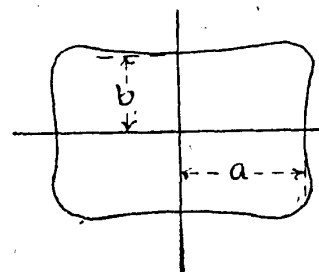
是は次圖の如き形であつて、兩邊の比 b/a は φ と c との函数で次式で與へられる。

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - 2c^2 \cos 2\varphi - c^4/3}{1 + 2c^2 \cos 2\varphi - c^4/3}$$

是を計算した結果は Fig. 7. に示す。

$\varphi = 40^\circ$, $c = 0.8$ の場合の變換形は Fig. 9 に示す

特に $\varphi = \pi/4$ の時の變換形は hypotrochoid と稱せられ、從來、淺羽氏⁽¹⁾ や小川博士等⁽²⁾ に依つて彈性力學上の問題に應用された。然し實際問題として起る例に於ては $a=b$ の場合は極く稀で、 $a \neq b$ の場合が多い。此様な場合に對しては、以上の諸氏の方法に (10) を適用して、容易に解く事が出来る。(10) 式で與へられた形は $\varphi = \pi/4$ の場合に對し、一般に elliptic hypotrochoid (又は elliptic hypocycloid) と稱すればよからう。



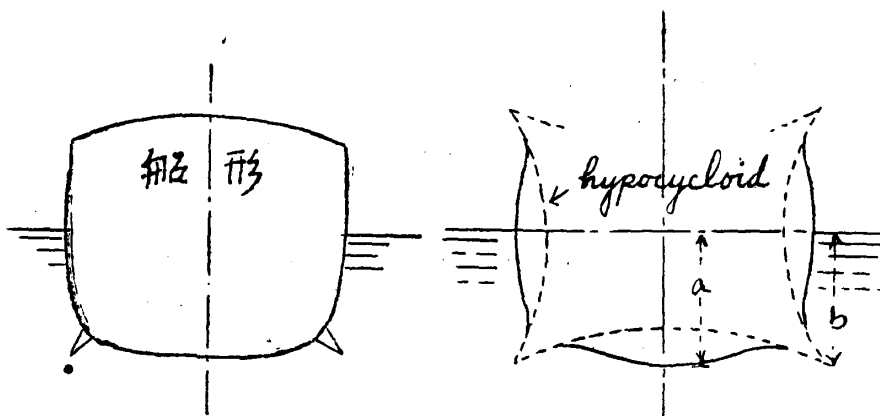
4. Bilge keel を有する船の切斷形

此形は以上の關係から單位圓の變換形として、近似的に求むる事が出来る。即ち一般に elliptic

(1) 造船協會々報 第四十二號。

(2) 機械學會誌 昭和五年及造船協會々報 第五十號。

hypocycloid の各邊の中點
に右圖の如く丸味を與へれ
ば、その下半分は、大體に
bilge keel を附した、船の
切斷形の、吃水線以下の形
を眞似する。丸味を與へる
には、此部分にて、單位圓
の内部に特異點を置けばよ



い。一般に船の吃水は、幅の半分に近く、此方が取扱が非常に簡単となる故、elliptic hypocycloid の代りに、單に hypocycloid を取つて、以下の議論を進める。然る時は變換形は次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= M \left(1 + \frac{1}{\xi^4} \right) \left(1 - \frac{c^4}{\xi^4} \right) \\ \therefore \frac{z}{M} &= \xi - \frac{1-c^4}{3} \frac{1}{\xi^3} + \frac{c^4}{7} \frac{1}{\xi^7} \\ \therefore \left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= e^{\alpha} \cos \beta - \frac{1-c^4}{3} e^{-3\alpha} \cos 3\beta + \frac{c^4}{7} e^{-7\alpha} \cos 7\beta \\ \frac{y}{M} &= e^{\alpha} \sin \beta + \frac{1-c^4}{3} e^{-3\alpha} \sin 3\beta - \frac{c^4}{7} e^{-7\alpha} \sin 7\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

故に單位圓の變換形は

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= \cos \beta - \frac{1-c^4}{3} \cos 3\beta + \frac{c^4}{7} \cos 7\beta \\ \frac{y}{M} &= \sin \beta + \frac{1-c^4}{3} \sin 3\beta - \frac{c^4}{7} \sin 7\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

此中の c は bilge keel の先端が、側面と、底面との交り迄達する、即ち上圖の $a=b$ の條件より決定する。此條件は

$$x_{\beta=0} = x_{\beta=\pi/4}$$

であつて、是を (12) に入れれば $c^4=0.452$ となる。

従つて變換形は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= \cos \beta - 0.183 \cos 3\beta + 0.0646 \cos 7\beta \\ \frac{y}{M} &= \sin \beta + 0.183 \sin 3\beta - 0.0646 \sin 7\beta \end{aligned} \right\}$$

一般に變換式は $\frac{dz}{d\xi} = M \left(1 + \frac{1}{\xi^4}\right) \left(1 - \frac{c^4}{\xi^4}\right)^r$ の形で bilge keel を有する船の切斷形が得られ r の大きい程、形が full になつて来る。 c^4 は矢張り $x_{\beta=0} = x_{\beta=\pi/4}$ の條件からきまり $r=1/2$ の時 $c=0.894$, $r=2$ の時 $c=0.225$ となり、 r のます程 c が減少する。

是等の計算した形を Fig. 10 に示す。此様に形は餘り變らぬ故、計算の簡便である點より、以下の計算に於ては $r=1$ の場合を取つた。

5. 變換形の面積の計算

見掛の慣性力率の計算に於て、此面積が必要なる故、その計算方法を知つておく必要がある。

上述の如く、一般に單位圓の變換形は次式で現しうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos (2n-1) \beta \\ \frac{y}{M} &= \sin \beta - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \sin (2n-1) \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

今 ab を變換形の一部とし (R, θ) 此平面の極坐標とする。然る時は

$$\tan \theta = \frac{\sin \beta - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \sin (2n-1) \beta}{\cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos (2n-1) \beta}$$

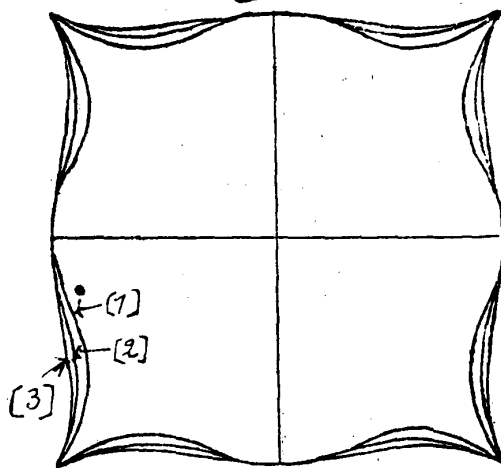
是を微分すれば

$$\sec^2 \theta \cdot \delta \theta = \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2 + [\cos 2m \beta (m=1, 2, 3 \dots) \text{を含む項}]}{\left[\cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos (2n-1) \beta \right]^2} \delta \beta$$

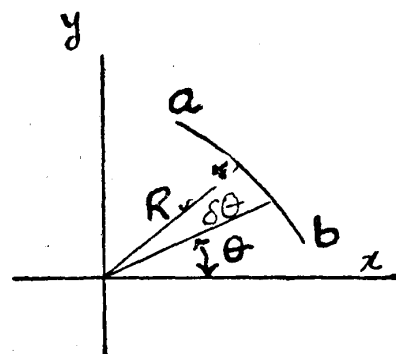
然るに極面積素を $\delta \sigma$ とすれば、上式を入れて

$$\delta \sigma = \frac{1}{2} R^2 \delta \theta = \frac{R^2}{2} \cos^2 \theta \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2 + [\cos 2m \beta \text{を含む項}]}{\left[\cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos (2m-1) \beta \right]^2} \delta \beta$$

Fig. 10



$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dz}{d\xi} &= M \left[1 + \frac{1}{\xi^4}\right] \left[1 - \frac{0.894^4}{\xi^4}\right]^{1/2} \\ (2) \quad \frac{dz}{d\xi} &= M \left[1 + \frac{1}{\xi^4}\right] \left[1 - \frac{0.452^4}{\xi^4}\right] \\ (3) \quad \frac{dz}{d\xi} &= M \left[1 + \frac{1}{\xi^4}\right] \left[1 - \frac{0.225^4}{\xi^4}\right]^2 \end{aligned}$$



$R \cos \theta = x$ を入れて積分すれば、面積 σ は

$$\sigma = \int_{\beta=-\pi}^{\beta=+\pi} d\sigma = \pi M^2 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2 \right] \dots \dots \dots (14)$$

6. 變換形の切口を有する筒形の廻轉運動に於ける慣性力率の見掛けの増加

今筒形が ω の角速度で廻轉して居るとし、 ab がその切口の contour の一部で P がその上の一點とする。

然る時は P 點の x, y の方向の分速度は各々 $(-y\omega, x\omega)$ P 點に於て、流體の領域の内部に引いた變換形への法線方向餘弦を (l, m) とすれば、法線方向の分速度 v_n は

$$v_n = (ly + mx) \omega$$

然るに $\frac{1}{h} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\alpha=0}$ とすれば $l = h \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$, $m = h \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$

なる故

$$v_n = h\omega \left[-y \frac{\partial x}{\partial \alpha} + x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}$$

筒形の外部にある流體の満足すべき境界條件として此 v_n が流體の法線方向の分速度に等しくなければならぬ。

今流體運動を表す速度 potential を ϕ とすれば流體の法線方向の分速度は $h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$
故に満足すべき境界條件は $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \omega \left[x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right] \text{ at } \alpha=0 \dots \dots \dots (15)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= e^{\alpha} \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \cos(2n-1)\beta \\ \frac{y}{M} &= e^{\alpha} \sin \beta - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \sin(2n-1)\beta \end{aligned} \right\}$$

を使つて (15) の右邊を計算し、簡単にすれば次の様になる。

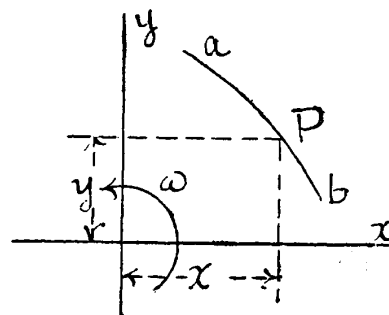
$$\left[x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 2M^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ A_{2n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2n-1} A_{2(r+n)-1} \right\} \sin 2n\beta$$

故に境界條件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 2M^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ A_{2n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2n-1} A_{2(r+n)-1} \right\} \sin 2n\beta \dots \dots \dots (16)$$

今流體の運動を表す potential function $w = \phi + i\psi$ を次の様に假定する。

$$w = -M^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + ib_{2n}) \zeta^{-2n}$$



但し a_{2n}, b_{2n} は是から決定しやうとする常數である

$$\text{従つて} \quad \phi = -M^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n} \cos 2n\beta + b_{2n} \sin 2n\beta] e^{-2n\alpha}$$

$$\therefore \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 2M^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} n [a_{2n} \cos 2n\beta + b_{2n} \sin 2n\beta]$$

是を (16) の境界條件に入れれば直ちに a_{2n}, b_{2n} が決定される。

即ち $a_{2n}(n=1, 2, \dots) = 0$ となり

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -M^2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\alpha} \sin 2n\beta \\ \text{但し} \quad b_{2n} &= A_{2n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r-1} A_{2(r+n)-1}, \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

此運動に於て、流體が無限に擴がつて居るとすれば、流體の有する全 kinetic energy は周知の公式により

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_{\text{boundary of cylinder}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

但し ρ は流體の密度、 δn は筒形上の一から流體領域の内部に引いた法線素、 ds は筒形の contour の線素である。

然るに $\delta n = \frac{1}{h} \delta \alpha$, $\delta s = \frac{1}{h} \delta \beta$ なる關係がある故上式は次の様になる。

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} d\beta \dots\dots\dots (18)$$

(17) より

$$\left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right] = -M^4 \omega^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n b_{2n}^2 + [\cos 2m\beta (m=1, 2, \dots)] \text{を含む項} \right\}$$

となる故、 T を計算すれば

$$T = \rho \pi M^4 \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} n b_{2n}^2$$

今筒形それ自身の中點のまはりの慣性力率を I_c とすれば、是が ω で廻轉して居る時の筒形自身の有する kinetic energy は $\frac{1}{2} I_c \omega^2$ である。

故に運動系全體の kinetic energy は

$$\frac{\omega^2}{2} \left[I_c + 2\rho \pi M^4 \sum_{n=1}^{\infty} n b_{2n}^2 \right]$$

故に慣性力率の見掛の増加は

$$\Delta I' = 2\rho \pi M^4 \sum_{n=1}^{\infty} n b_{2n}^2 \dots\dots\dots (19)'$$

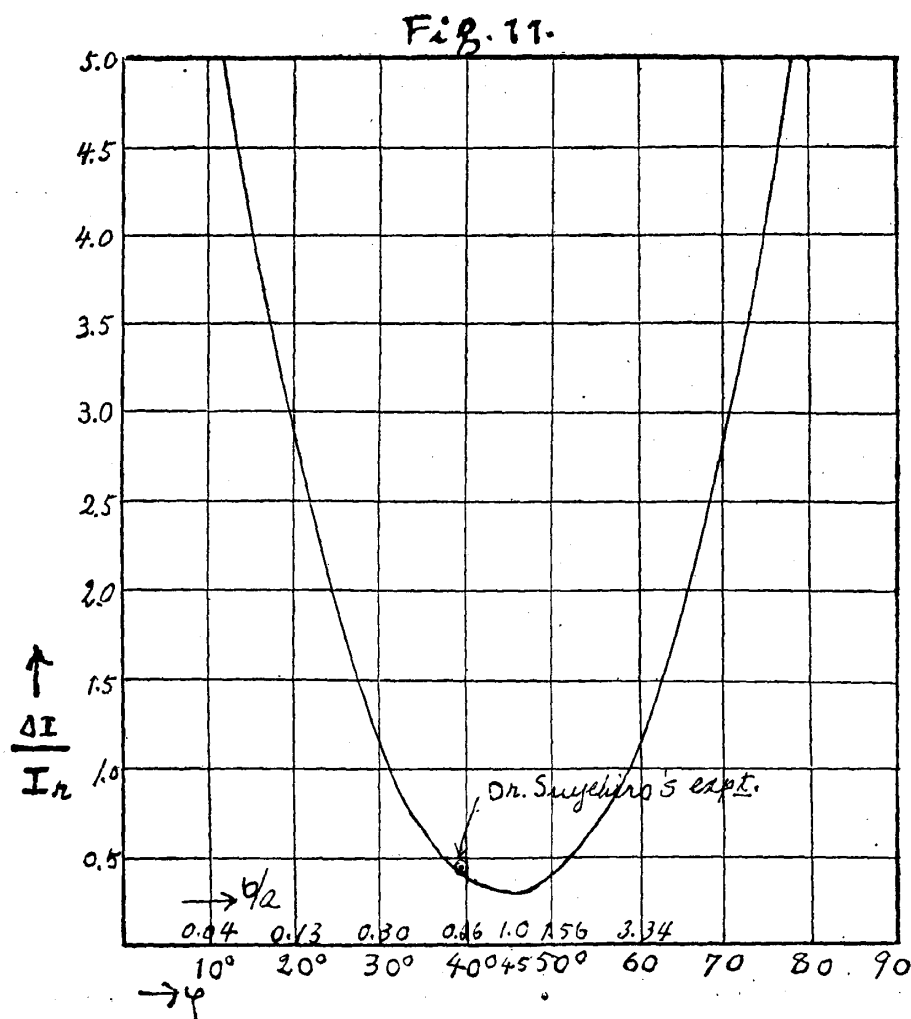
或は重量の慣性力率を取つた見掛けの増加 $\Delta I' = 2\rho g \pi M^4 \sum_{n=1}^{\infty} n b_{2n}^2 \dots \dots \dots (19)$

7. 慣性力率見掛けの増加の計算

此の様に完全流體と見た時に於ける慣性力率の増加は、實際の流體の場合と異り、週期、振幅等に全然無關係であつて物體の形丈できまる。是は勿論流體中に渦の様な運動が起らぬと考へたからであつて、従つて物體の contour が鋭い突出部のない様な場合は、此計算は當嵌る。

〔矩形の場合〕 是は (3) 式を使つて (19) から計算すればよい。

上に述べた計算は無限に擴がつて居る水の中に物體が廻轉する時であるが、船の場合の如く水の表面に浮んで居る時は狀況が稍異なる。然し幸ひな事に船の場合の重心は殆んど吃水線の近くにある故船を吃水線以下の形を對稱に重ね合したものと考ふれば、此時の水の占むる領域は無限に擴がつて居る時の半分となる。勿論此様に假定すると、水面に於ては、實際とは異り const. pressure ではなく、従つて實際に起るべき波動運動が無視された事になる。此波動運動の影響は物體の contour が滑らか



な時は左様大した事はなく無視しても差支へない程度のもので考へられるが、bilge keel の突出部がある時は、此部分に大きい pressure の concentration が起り、而も是が振動する爲、起れる波も相當に大きく、此影響は可也大きい事は想像するに難くない。本文中見掛けの慣性力率の増加の週期の 3 乗に逆比例する部分は或は此影響ではないかとも思はれるが、立入つた研究はして居ない故ハッキリした事は云へぬ。此影響を考慮に入れる事は現在の處では出来ない故是を無視して論を進める事にする。然る時は見掛けの慣性力率の増加は (19) で求めたものの半分となる。

又此様な結果は無次元の数で現した方が都合がよい。夫で、此矩形を充たす水の中心のまはりの慣性力率との比を取つた。即ち矩形の兩邊の長を $2a, 2b$ とすれば、此慣性力率は

$$I_r = \frac{4\rho g a b (a^2 + b^2)}{3} \dots\dots\dots (20)$$

此中の a, b は (3) から容易に求められる。此様にして ρ 又は b/a の函数として $\Delta I/I_r$ を計算すると Fig. 11 の様になる。此圖より見る様に $\Delta I/I_r$ は $a=b$ の時が尤も小さくて、 a と b の差が大きくなる程、此比が増加して来る。尙ほ此圖の中に末廣博士の實驗値を挿入して置いた。是より見る様に、計算と實驗とは非常に近い値を與へて居る。故に矩形の如き場合には角に於ける渦の運動とか、又は水の表面に於ける波とか云ふものゝ影響が極めて小さい事が分る。

〔船型の場合〕

船の場合は普通船の幅 B は、吃水の 2 倍と餘り變らぬ故 ΔI を割るべき慣性力率の次元を有する数として、(20) の中で $a=b$ とおき $2a=B$ 、とし又水面下の水の重量が船全體の重量に等しい故 I_r の半分を取つた。即ち

$$I = \frac{WB^2}{6}$$

先づ筒形の船を考へ Fig. 10 の $\frac{dz}{d\xi} = M \left(1 + \frac{1}{\xi^4}\right) \left(1 - \frac{0.452}{\xi^4}\right)$ の切口のものを取つて計算して見る。

$$\left. \begin{aligned} \text{船の幅 } B &= x_{\beta=0} = 1.77 M \\ \text{切口の吃水線以下の面積 } \frac{\sigma}{2} &= 0.4352 \pi M^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore I = \frac{\rho g \cdot \frac{\sigma}{2} B^2}{6} = 0.114 \rho g \pi M^4$$

$$\text{水面以下の水による } \Delta I = \rho g \pi M^4 \times 0.074 = 0.074 \rho g \pi M^4$$

$$\therefore \frac{\Delta I}{I} = 0.325$$

同様の計算を $\frac{dz}{d\xi} = M \left(1 + \frac{1}{\xi^4}\right) \left(1 - \frac{0.225}{\xi^4}\right)^2$ に就てやれば $\frac{\Delta I}{I} = 0.405$ となる。更に船の前後

の形の影響を入れる爲、船の中央 $L/2$ の間が Fig. 10 (2) の形で前部 $L/4$ の間の吃水線下の平均の形として Fig. 8 の半分後部 $L/4$ の間の吃水線下の平均の形として Fig. 6 の半分を取つたものと考へて、是等三つのものが原点を通る軸にて結び付けられて此軸のまはりに廻轉するとする。そして流體の運動は此軸に直角な平面内に於て二次元運動すると考へやう。此考へ方は勿論正しくないが船の形を三次元的に取扱ふ事は全く不可能なる故、唯是等の部分が見掛けの慣性力率に如何なる程度に寄與するか order を見る爲、上の様な近似をするのである。

そして各々の形の式に含まれた M の比は各形の吃水が等しい様に決定する。

然る時は

$$\left. \begin{array}{lll} \text{前部 } L/4 \text{ の間の吃水線以下の容積} & = 0.058 L\pi M^2 \\ \text{中央部 } L/2 \quad \text{”} \quad \text{”} \quad \text{”} & = 0.218 L\pi M^2 \\ \text{後部 } L/4 \quad \text{”} \quad \text{”} \quad \text{”} & = 0.028 L\pi M^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{但し } M \text{ は scale} \\ \text{を表す常数} \end{array}$$

船の中央部に於ける幅 $B = 1.764 M$

$$\therefore I = \frac{WB^2}{6} = 0.154 L\rho g\pi M^4$$

又

$$\left. \begin{array}{lll} \text{前部 } L/4 \text{ の間の水面下の水による } \Delta I & = 0.00345 \rho g\pi L M^4 \\ \text{中央部 } L/2 \quad \text{”} \quad \text{”} \quad \text{”} & = 0.04744 \rho g\pi L M^4 \\ \text{後部 } L/4 \quad \text{”} \quad \text{”} \quad \text{”} & = 0.00864 \rho g\pi L M^4 \end{array} \right\}$$

故に全體の $\Delta I = 0.05903 \rho g\pi L M^4$

$$\therefore \frac{\Delta I}{I} = 0.385$$

中央 に Fig. 10 (1) を取つても又、前後部に少し違つた形を取つても大體同じ様な値が出る。

以上の計算から見ると、完全流體の假定の下に bilge keel の付いた船に就て計算すれば大體に於て $\Delta I/I \sim 0.35$ 前後の値となる。是を實驗値に比較すると可也大きいものとなる。又上の計算の結果から見ると、船の前部に於ける ΔI は小さいが、後部の形による ΔI は可也大きい。是は船の形からも想像される事で、後部の龍骨部の突出による水の運動が可也猛烈だからである。

次に bilge keel のない場合の慣性力率の見掛けの増加を計算して見やう。此時は中央部に取るべき形は種々考へられるが、計算を簡単にする爲、3.b の $c^4 = 0.04$ なる hypotrochoid を取り、前後部は前の場合と同じものを取る。そして前と同じ M scale に直せば

船の中央部 $L/2$ の間の吃水線下の容積 $= 0.246 L\pi M^2$

船の幅 $B = 1.766 M$

前後は前の結果を用ひて

$$I = 0.1695 L\pi\rho g M^4$$

又船の中央部 $L/2$ 間の水面以下の水による $\Delta I = 0.01910 L\pi\rho g M^4$

故に全體の

$$\Delta I = 0.0314 \rho g \pi L M^4$$

$$\therefore \frac{\Delta I}{I} = 0.185$$

此内船の中央部 $L/2$ と前部 $L/4$ の間丈の ΔI をを取れば

$$[\Delta I]_{\text{中央部+前部}} = .0226 L \rho g \pi M^4$$

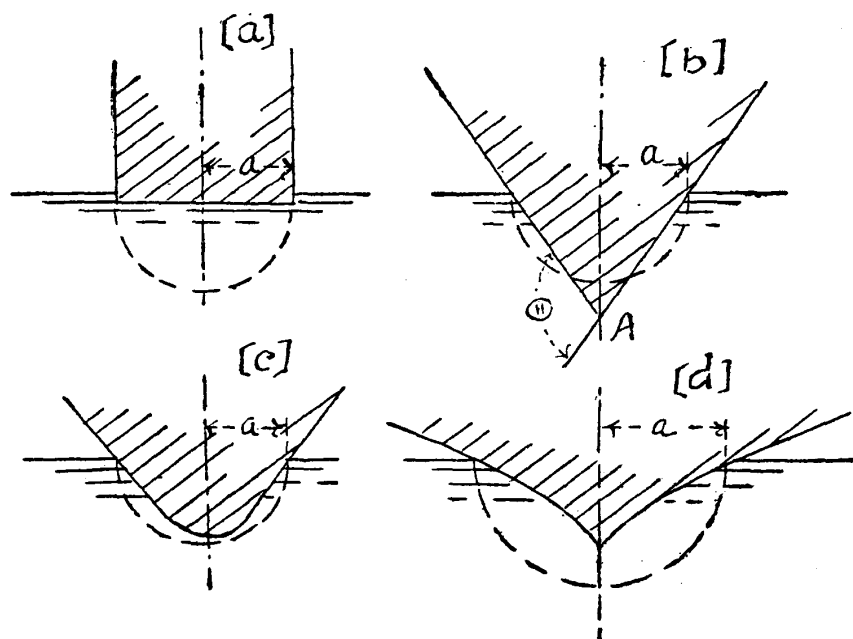
$$\therefore \left[\frac{\Delta I}{I} \right]_{\text{中央部+前部}} = 0.133$$

是等は實驗に於ける週期に無關係な const. の部分に比較せらるべきもので略々同じ order であつて、従つて此 const. の部分は完全流體としての流體運動に依るものである事が分る。

中央部にもつと丸みのある即ち c の値の小さい hypotrochoid を取れば此値はもつと小さくなる。

8. 直線運動に於ける質量の見掛けの増加

水上飛行機着水時の衝撃の研究で Pabst⁽¹⁾ は上に求めた單位圓變換形に類似の形のもの水中に



突入する場合の質量の見掛けの増加を近似的に假定して取扱つて居る。即ち Pabst は左の如き種々の形の場合に質量の増加として、何れも半径 a の面積の半分に等しい水の質量を取つて居る。此は (a) の場合は正しいが、他の場合に對しては近似假定たるを免れぬ。

夫で、此等の値を計算して、果して上の假定が正しいか否かを調べて見やう。此時は形

には鋭く突出した部分はあるが横動搖に於ける bilge keel 部に於ける如き困難はない。従つて完全流體としての計算は大體に於て正しき結果を與へる。

今或物體が完全流體中を $+x$ の方向に U の速度で進行する時の速度 potential を ϕ とすれば表面上の 1 點に於ける法線方向の分速度は

$$h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad \text{但し} \quad \frac{1}{h} = \left| \frac{dz}{d\xi} \right|$$

又法線方向餘弦を (l, m) とすれば之は lU に等しい。但し $l = h \frac{\partial x}{\partial \alpha}$ である。故に此流體運動の境界條件は

$$h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = h U \frac{\partial x}{\partial \alpha} \quad \text{at } \alpha = 0.$$

$$\text{或は} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = U \frac{\partial x}{\partial \alpha} \quad \text{at } \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

且つ $\alpha = \infty$ で $\phi = 0$ なる事を要す。

potential function w を次の様に假定する。

$$w = UM \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + i b_{2n-1}) \zeta^{-(2n-1)}$$

$$\therefore \phi = UM \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos(2n-1)\beta + b_{2n-1} \sin(2n-1)\beta] e^{-(2n-1)\alpha}$$

$$\therefore \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -UM \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) [a_{2n-1} \cos(2n-1)\beta + b_{2n-1} \sin(2n-1)\beta] \quad \dots\dots (22)$$

6 で述べた x/M , y/M の形より

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = M \left\{ \cos \beta - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1} \cos(2n-1)\beta \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

(22), (23) を (21) の条件に入れて a_{2n-1} , b_{2n-1} 等が決定される。

即ち

$$b_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \quad \text{であつて}$$

$$\phi = UM \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} e^{-(2n-1)\alpha} \cos(2n-1)\beta$$

但し

$$a_1 = A_1 - 1, \quad a_{2n-1} = A_{2n-1}, \quad (n=2, 3, \dots)$$

流體の持つ kinetic energy は (18) の式と同様で、此時は

$$\left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = -U^2 M^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) a_{2n-1}^2 + \cos 2m\beta (m=1, 2, \dots) \text{を含む項} \right\}$$

$$\therefore T = \frac{\rho \pi U^2}{2} M^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) a_{2n-1}^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

故に質量見掛けの増加 ΔM は

$$\begin{aligned} \Delta M &= \rho M^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) a_{2n-1}^2 \\ &= \rho \pi M^2 \left\{ (1-A_1)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2 \right\} \end{aligned}$$

然るに筒形の占むる水の質量を M_w とすれば (14) より

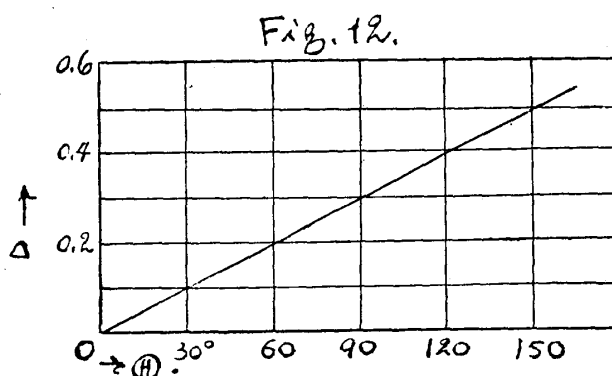
$$M_w = \rho \pi M^2 \left[1 - A_1^2 - \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2 \right]$$

$$\therefore \Delta M = 2\rho \pi M^2 [1 - A_1] - M_w \quad \dots\dots\dots (25)$$

底部の形は前圖の [c], [d] は [b] を少し modify すれば得られる。即ち突端 A に相當する特異點を極めて少し圓内に入れれば [c] が得られ、又 A に相當する特異點に於ける外角を少し減らせば [d] が得られる。故に是等の何れにも近い基礎形とに [b] が考へられる故、此形に於ける ΔM が keel angle の外角 θ に就て如何に變るかを計算して、是を Pabst の近似假定と比較して見やう。此形は I, b の場合のものを取ればよく、而して Pabst の假定は明に

$$\Delta M_1 = \rho \pi a^2$$

(實際は、水は半分の領域しか占めて居らぬ故、此式或は (25) 式で與へらるゝものの半分であるが、此處では比較の爲是等の比を計算する故、此儘で進む)



然るに

$$a = y \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\pi/2}} = M \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} A_{2n-1} \right]$$

$$\therefore \Delta M_1 = \rho \pi M^2 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} A_{2n-1} \right]^2$$

$$\therefore \frac{\Delta M_1}{\Delta M} = \frac{\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} A_{2n-1} \right]^2}{(1 - A_1)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1}^2} \equiv 1 + \Delta$$

此 Δ を θ の函數として圖に示したのが Fig. 12 である。此圖より見る様に keel angle が小さい程 Δ が大きく、keel angle $\div \pi/2$ の附近で約 30% の over estimation となる。

討 論

○座長(山本武蔵君) 唯今の御講演に對して御質問又は御意見のある方は御述べを願ひます。

○松山武秀君 θ は 5° として居られますが、何かわけがあるのですか。

○渡邊惠弘君 何度に取つてもよいのですが、 5° の邊が丁度宜しかつたからです。

○松山武秀君 夫から 8 式の 13.22 といふ數字は 4, 5 年前に私の方で實驗を行りましたが、form に依り異りました。御参考迄に申し上げます。勿論詳しく論文を読めば分るのでありますが、draft の影響は如何いふ様に入つて居りますか。

○渡邊惠弘君 draft の影響は後の方 205 頁の Fig. 11 にあります。之は rectangular section の場合を perfect fluid として計算して $\Delta I/I_r$ を曲線に書いたもので b/a は 2 邊の ratio であります。末廣博士の實驗して居られる結果を入れると同一の line 上に來ます。是から draft/B の影響は

大體わかると思ひます。

○松山武秀君 實驗をやりますと斯の様になつて來ますか。

○渡邊恵弘君 draft と幅の比の effect は大體しか考へて居りませんので實驗はやりませんでした。draft と幅との關係が今の實驗の場合より異なる場合は Fig. 11 によつて correction すればその影響は出ると思ひます。

○山本武藏君 私から一寸討論ではありませんが御伺致します。202頁の Fig. 10 は船の midship の格好なのですか。

○渡邊恵弘君 そうです。bilge keel をつけた midship の water line 以下を對稱に置いた形の積りです。

○山本武藏君 そうしますと bow や stern は如何いふ様になるのですか。

○渡邊恵弘君 bow と stern の方で別の形を取つてゐます。

○山本武藏君 そうすると bow と stern では edge に圓味を付けるのですか。

○渡邊恵弘君 此の Fig. 10 は midship の $1/2$ の長さを示して居ます。Fig. 8 から前の方の形を取り後の方には Fig. 6 の形を取り、夫を前後に繼合せて mean を取りました。せめて end effect 丈でも入れ度いと考へたのです。計算は two-dimensional motion として approximately にやりました。3-dimensional として實際には行る可きであります、其は困難なので此様にして end effect を入れたのであります。

○山本武藏君 計算値を比較されましたが模型は cruiser stern ですか。

○渡邊恵弘君 そうです。cruiser stern の模型で實驗しました。そして (10) 式の const. の項と比較した計算値 0.133 は真中と前の方だけで後の方は考へない時のものです。

○座長(山本武藏君) 他に御座いませんければ私より一寸申し上げます。渡邊君は造船協會の講演會のある度毎に論文を發表され、特に rolling に就ては深い研究をされて居り、會員一同絶えず良い刺激を受けて居ます。今回も非常に面白い問題を示され此方面の研究に大に資料を與へられたと思ひます。一同に代り厚く感謝致しますと共に今回御發表の論文に對し茲に諸君と共に拍手を以て感謝の意を表し度いと思ひます。(一同拍手)