

(昭和十二年十一月七日造船協會講演會に於て講演)

初期歪を有する薄板の圧縮力に對する有効率に就いて

正員 工學博士 渡 邊 惠 弘

Abstract.

On the Effectiveness of a Thin Plate with Initial Curvature under Compression.

By Y. Watanabe, Kogakuhakusi, Member.

The behaviour of a panel of thin plate with initial curvature under compression differs from that of a purely flat plate, even if its buckling is taken into consideration. In this paper, the relations between the initial curvature, the compressive force, and the resulting strain in the direction of compression, are theoretically obtained by the energy method. By taking the definition of the effectiveness of a thin plate as the ratio of the mean compressive stress to the compressive strain multiplied by the Young's modulus, a simple method of its calculation is given for a given form of initial curvature.

1. 圖の如く彎曲せる棒を支點間の方向に P の力で圧縮する時の縮み ε_1 は、棒が直線狀となつて居る時の縮み ε_2 よりも大きい事は明かであつて、今材料の弾性係数を E , 棒の斷面積を A , 支點間の距離を l とすれば

$$\varepsilon_2 = \frac{P}{EA l}$$



従つて ε_1 は $\varepsilon_1 = \frac{P}{C_e A E l}$ と書かれ、但し $C_e < 1$ である。

故に此彎曲棒を E の弾性係数を有する直線棒と見做すとすれば、切口の面積が A の代りに $C_e A$ になつたと考へなければならぬ。即ち棒の斷面積が減つたと見るべきで、此斷面積の減少率 C_e を此處で有効率と呼ぶ事にする。

此事柄は棒でなく、薄板が圧縮を受ける場合にも起る事は明かで、今春、學生の卒業論文の實驗でデュラルミンの函型梁の屈曲試験を行つた際、その撓みの實驗値は、切口の全面積より慣性力率を求めて、得られた計算値に比較して著しく大きくなつた事を經驗した。之れは明かに薄板より成る flange 部が充分に圧縮に抵抗出来ぬためであつて、之れが本論文の示唆となつた事を附加へて置く。

從來、此問題に對する研究は主として平板の panel の安定として取扱ひ、例へば Kármán, Cox, その他理論並に實驗の例は甚だ多く、⁽¹⁾ 我國でも山本、近藤兩氏の研究がある。⁽²⁾ 然し板が初めより或

(1) 此文獻は例へば Report and Memorandum No. 1553 (後出) の末尾に澤山出て居る。

(2) 航空學會誌 昭和十年三月。

る *curvature* を持つてゐる場合に、圧縮を受けると稍異つた關係の現れる事は明かで、之れに類似の現象として一樣な水圧を板の面に受けつゝ、圧縮された場合を既に船の外板に於て Hoffmann⁽¹⁾ が取扱つて居るが、*initial curvature* を有する薄板が圧縮を受けた場合に就いては研究は無い様である。⁽²⁾ 唯此有効率に就いては、從來、實驗の結果から種々の假定が行はれ、例へば Pietzker によれば⁽³⁾ 縦通材の兩側に板の厚さの 20~25 倍宛を有効に取り、他は役に立たぬと見るべしとなされ、此説を支持する人も澤山あり（例へば前出の Hoffmann の如し）、又航空機方面では圧縮側の薄板は計算に入れぬ方がよいと云ふ實驗結果⁽⁴⁾ もあり、又函型梁全體の慣性力率の 0.9 倍を取るべしと云ふ意見もある⁽⁵⁾。是等の意見は皆實驗を基礎としてゐる故、單に板の有効率の外に、組立銲接合部の滑り等も此影響の中に入り、その時々によつて異つた意見となつて居るが、板の厚さや或は *initial curvature* の大小や其の形狀等が重要な影響を與へて居る事は明かである。近時船を軽く作る爲め相當薄い板が使はれ、且つ施工の方法の關係で *initial curvature* を有してゐる場合も少くない。それで此様な場合に有効率をどうして計算するかと云ふ事を理論的に取扱つて見た結果を此處に報告する次第である。唯 panel の邊比で圧縮力方向の邊の長さが他邊の長さに比して、大きい場合（約 2.5 倍以上）は圧縮を受けた時の撓みの形は二つ以上の波形となつて現れる。然し此様な邊比は船の場合には起らぬ故、此處では邊比が 2.5 以下の波形一つの場合に就いてのみ報告し、波形二つ以上の場合は同じ様にして求められるが、その報告は別の機會に譲る事にする。尙記述の關係上理論は附録に述べ、本文では結果と計算例のみを記述する事にする。

2. 薄板の有効率に對しては初期撓みの量と其の形が關係を有つ事は明かであるが、是等は邊長に對し板が薄くなる程、大きくなる傾向を持ち、又工作や就役状態で異なるものと思はれる。その形に就いては色々の場合が考へられるが、特殊の場合を除いては、中央部が最も多く撓み、縁に近づくに従つて漸次減少すると考へるのが妥當で、而かも全く同じ工作から出來上がったとすれば、撓みの形狀は二邊の方向に同様になるものと見られる。

それで初期の撓み w_0 を周邊固著の條件を満足する様に次の式で與へる。 (x, y) の座標は附録の圖参照。

$$w_0 = \varepsilon_0 \underbrace{\left[\frac{n+1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^{n+3} - \frac{n+3}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^{n+1} + 1 \right]}_{X(x)} \underbrace{\left[\frac{n+1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^{n+3} - \frac{n+3}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^{n+1} + 1 \right]}_{Y(y)}$$

(1) Hoffmann: Analysis of Sir John Biles' Experiment.....T. I. N. A. 1925.

(2) R. M. No. 1553. Summary of the Present State of Knowledge regarding Sheet Metal Construction

(3) Festigkeit der Schiffe. S. 84.

(4) 濱田 榮: 函型主翼構造に就いて、航空學會誌、昭和十一年十月。

(5) Newell 教授講義録、その三、p. 10.

但し $2a$ 及 $2b$ は邊の長さである。

n の大きい程、撓みは周邊に近く大となり、その形は Fig. 1 の様で、一般に板が薄い程 n が大となる様である。

荷が掛かつて來ると撓みの量が増すと同時に、 x 及 y 方向の撓みの形は上の式とは次第に異つて來て、 n の大きい場合に相當する様な形状となるのであるが、此差は計算によると結果に對し大なる影響を與へぬ様である。故に荷重後も撓みの形

は變らず、單に中央部の撓み量だけ増加すると考へて荷重後の撓み w を次の様に置く。

$$w = \varepsilon X(x)Y(y)$$

y 方向に全體で P の力で圧縮したとし、此方向の圧縮歪を e とすれば、板の内部には $2be$ の圧縮状態に於ける strain energy が生ずる。此の strain energy を計算し、之を最小ならしむる條件によつて撓み量 ε を求め、又、板の内部に生ずる全圧縮力が外部から加へられる全圧縮力 P に等しいと云ふ條件より P と e との關係を求める。然る時は次の 2 式が得られる。

$$C^2 = \frac{e - e_n(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)}{1 - (\varepsilon_0/\varepsilon)^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{P}{4Eah} = e - \beta_4(n)C^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (2)$$

此處で $C^2 = \beta_3(n) \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2$ で荷重後の撓み量を表す數

$$e_n = \frac{(h/a)^2}{1 - \sigma^2} \left\{ \beta_1(n) \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] + \beta_2(n) \right\} \quad \begin{array}{l} 2h : \text{板の厚} \\ \sigma : \text{Poisson 比} \end{array}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 及 β_4 は n の函數である單なる數で、次表の如く是等は初期撓みの形状で變る數である。

n	1	2	3	4	5	6	7
β_1	3.51	5.92	8.42	12.06	16.45	21.62	26.84
β_2	2.01	1.90	1.88	1.97	2.09	2.24	2.37
β_3	0.45	0.55	0.70	0.83	0.96	1.08	1.20
β_4	0.55	0.65	0.69	0.74	0.77	0.79	0.81

(1) は撓み量 ε を求むる關係であるが、 ε の三次式となる故、上の如く書き直したのであつて、之れより trial の方法で ε 、從つて C^2 及 $\varepsilon_0/\varepsilon$ が計算される。此の求めた C^2 と $\varepsilon_0/\varepsilon$ を (2) に入れば圧縮荷重 P と圧縮歪 e との關係が求められる。

(1) R. M. No. 1554. 1933-34. The Buckling of Thin Plate in Compression.

是等の式で初期歪 $\varepsilon=0$ と置けば Cox が板の安定に於て出したと同じ関係が出る。即ち

$$C^2 = e - e_n \dots \dots \dots (1)'$$

$$P/4Eah = e - \beta_1 C^2 \dots \dots \dots (2)'$$

此の関係から見る様に、 C が實数である爲には $e > e_n$ なる事を要し $e < e_n$ の間は C は虚数である。然し附録計算から見る様に ε の値は (1)' から求められる外に $C^2 \neq e - e_n$ の時は $\varepsilon=0$ の値が存在し、従つて $e < e_n$ の間は ε 従つて $C=0$ である。然るに初期撓み ε_0 が存在する時は (1) からわかる様に $e < e_n$ であつても明かに ε の値が存在し、即ち板は初めから荷重が掛かると共に撓みが變つて來る事を示して居る。

(2) 又は (2)' の第二項の無い時は、板が平面として働く時に相當して板は圧縮荷重に對し全面的に抵抗して居る場合である。然し初期撓みのある時は e の小さい値の時でも ε 及 C^2 の値が存在する故、或る決まつた strain e を與ふるに要する力 P は、板が全く平面である時に比較して減少して居る事を示す。

板の有効率 C_e は前述の定義に依つて

$$C_e = \frac{P}{4Eahe} = 1 - \frac{\beta_1}{e} C^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (3)$$

此様に有効率 C_e は e の値に依つて變り、一般に e が増すに従つて C_e は減少する。

故に或る板の C_e を決定するには e の値に就いて假定しなければならぬ。 e の値を決める方法は、箇々の場合によつて異なるが、例へば船の甲板の如き場合には次の様にすればよい。甲板の中性軸よりの距離を δ とし、船の長さの方向を x 、梁としての撓みを y 、 M を考へて居る場所の屈曲偶力とすれば

$$e = \delta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \delta$$

然るに $M\delta/I$ は δ に於ける應力 σ_a となる故、 $e = \sigma_a/E \dots \dots \dots (4)$

此の計算で δ 及 I は甲板の有効率の影響を考慮するのが本當だが、近似的には、有効率の影響を考慮しない普通の計算法で求めた結果を使つても大過なきものと思ふ。

甲板部の許容應力 $= 7 \text{ tons/} \square''$, $E = 13,500 \text{ tons/} \square''$ を取れば e は

$$e = \frac{7}{13,500} \sim 5 \times 10^{-4}$$

となる。故に強度甲板に於ては $e \doteq 5 \times 10^{-4}$ 程度に取つて差支ないものと考へられる。

3. 次に以上の結果を使つた二三の計算例を示す。

① $a=b$ の正方形の panel で $h/a = \frac{1}{200}$, 初期撓みの量及形状は實測の結果、 $\varepsilon_0 = 4h (= 2 \times \text{板の厚さ})$, $n=5$ の形とする。然る時は表より $\beta_1 = 16.45$, $\beta_2 = 2.09$, $\beta_3 = 0.96$, $\beta_4 = 0.77$

$$\therefore 1 - \sigma_2 \doteq 0.9 \text{ と置けば } e_n = 9.72 \times 10^{-4}$$

此時圧縮荷重 P と圧縮歪 e との関係を求めて見る。

例へば $e = 5$ の時

$$\varepsilon_0 = 6h \quad \text{の時は} \quad C_e = 0.45$$

即ち初期撓みが増加する程有効率が減少する事がわかる。

$$\textcircled{3} \quad a=b, \quad h/a=1/300, \quad n=5.$$

前の最後の例に比して更に板の厚さが減つて $\varepsilon_0=6h$ とすれば $C_e=0.42$ となり有効率は更に減少する。

$$\textcircled{4} \quad a=b, \quad h/a=1/300, \quad \varepsilon_0=6h, \quad n=7.$$

③ 例に比して唯撓みの形が縁に近くふくらみが増加した場合を取れば $C_e=0.28$ となり有効率が著しく減少する。

4. 以上の考察には次の様な假定がある。即ち荷重に平行な邊に於ける縦通桁は薄板の撓みの變化と共に自由に動き得る事、及び此問題に入つて来る二次的の數量を無視して居る事である。此中後者の無視は從來の此の種の例へば薄板安定の問題等で常に行はれて來たのであるが、最近 Marguere u. Trefftz⁽¹⁾ が此二次的數量を考慮した場合の基礎式(エネルギー法)を出し、且つ薄板安定の場合に適用して其の解を出して居る。又前者の假定は船の甲板の如き場合には明かに成立せず、縦通桁は固定の状態にあり、従つて板の撓みの増加と共に板の中性面は荷重に直角の方向に延びなければならぬ。之を考慮した場合の薄板安定の解は Cox も Marguere u. Trefftz も與へて居る。是等の二つの影響を考慮した場合と考慮せぬ場合の平板安定問題の結果を比較して見ると、何れの影響も共に、與へられた荷重方向の圧縮歪 ε に對する荷重 P は影響を考慮した場合の方が大きい。故に同時に是等の影響が働けば更に P の増加は大となる。此結果を現在の問題に移して考へれば二つの影響は共に有効率を増加する様に働き此の増加量は安定問題の解から見て大體 10% 前後の程度ではないかと思はれる。

附 録

厚さ $2h$ で $2a \times 2b$ の矩形の panel をなす薄板が荷重の掛からぬ時 $w_0(x, y)$ の撓みを以て平衡状態にあるとする。此板に x, y 面内で圖示の如く y の方向に P なる圧縮力が働く時は此撓みは漸次増加して來ると同時に、中性面の y 方向の長さは圧縮されて來る。そして丁度此 P が $2be$ だけの距離を働いた時の板の撓みを $w(x, y)$ とすれば撓みによる板の内部の energy E_f は $w - w_0 = w'$ による energy であつて、即ち

$$E_f = N \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \frac{(\Delta w')^2}{2} - (1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad \text{但し} \quad N = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}$$

此式で w' が單に $X(x) \cdot Y(y)$ の如く x のみの函数と y

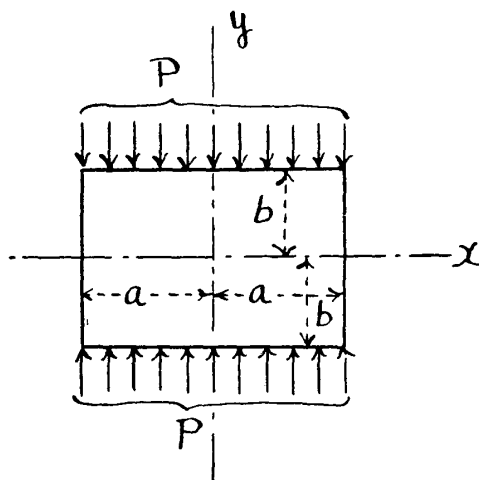


Fig. 3.

⁽¹⁾ Über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast. Z. ang. M. M. April 1937.

のみの函数の積である時は { } の中の第二項は省略され⁽¹⁾

$$E_f = \frac{N}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\Delta w')^2 dx dy \dots\dots\dots (1)$$

次に P のため x 軸に平行な邊の間隔が一樣に $2be$ だけ縮んだとすると中性面に於いて圧縮された距離は

$$2be - \frac{1}{2} \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

故に E を弾性係数とすれば直接力による板の内部の energy E_a は

$$E_a = 2Ebh \int_{-a}^a \left\{ e - \frac{1}{4b} \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy \right\}^2 dx \dots\dots\dots (2)$$

故に $2be$ だけ圧縮された板の状態に於ける、内部の strain energy F は

$$F = E_f + E_a \\ = \frac{N}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\Delta w - \Delta w_0)^2 dx dy + 2Ebh \int_{-a}^a \left\{ e - \frac{1}{4b} \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy \right\}^2 dx \dots\dots\dots (3)$$

と置き、energy 最小の原理に依つて此 F を最小ならしむる様な條件を求むる。

今板の中央の撓みが初め ε_0 より ε に増加したとし、板全體の撓みの形は同じ様に保たれると考へて

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \varepsilon_0 X(x) \cdot Y(y) \\ w &= \varepsilon X(x) \cdot Y(y) \end{aligned} \right\}$$

とすれば (3) は

$$F = \frac{N}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\Delta(X \cdot Y)]^2 dx dy + 4Eabhe^2 - Ehe(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) \int_{-a}^a X^2 dx \cdot \int_{-b}^b \left(\frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^2 dy \\ + \frac{Eh}{8b} (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) \int_{-a}^a X^4 dx \cdot \left[\int_{-b}^b \left(\frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^2 dy \right]^2 \dots\dots\dots (4)$$

此處で周邊固著の條件を満足する様に

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^{n+3} - \frac{n+3}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^{n+1} + 1 \\ Y(y) &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^{n+3} - \frac{n+3}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^{n+1} + 1 \end{aligned} \right\} \text{と置く。}$$

此關係を (4) に入れて計算を行へば次の様になる。

$$F = \frac{N(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2ab} \left\{ f_1(n)f_2(n) \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] + 2f_3^2(n) \right\} + 4Ehabe^2 \\ - \frac{1}{2} Ehe \frac{a}{b} f_2(n)f_4(n)(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) + \frac{Eh}{8b} (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)^2 \frac{a}{2b^2} f_4^2(n)f_5(n)$$

(1) 小野鑑正：材料力学 p. 523

此處で $f_1, \dots, f_5$ は n によつて變る數である。

此式を $\frac{1}{2}Eh \frac{a}{b} f_2(n) f_4(n)$ で割り、且つ

$$e_n = \frac{\frac{N}{ab} \left\{ f_1(n) f_3(n) \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] + 2f_3^2(n) \right\}}{\frac{1}{2}Eh \frac{a}{b} f_2(n) f_4(n)} = \frac{(h/a)^2}{1-\sigma^2} \left\{ \beta_1(n) \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] + \beta_2(n) \right\}$$

と置けば

$$F' = e_n(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \frac{8b^2}{f_2(n)f_4(n)} e^2 - e(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) + \frac{f_4(n)f_5(n)}{8b^2f_2(n)} \cdot (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)$$

$$\therefore \frac{\partial F'}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \text{より} \quad \varepsilon \left\{ e_n \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) - e + \frac{f_4(n)f_5(n)}{4b^2f_2(n)} \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \right\} = 0$$

$$\frac{f_4(n)f_5(n)}{4f_2(n)} \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2 \equiv \beta_3(n) \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2 \equiv C^2 \quad \text{と置き} \quad \varepsilon \neq 0 \quad \text{とすれば}$$

$$C^2 = \frac{e - e_n(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)}{1 - (\varepsilon_0/\varepsilon)^2} \dots\dots\dots (5)$$

又前述の圧縮力に依つて生ずる、板の内部の直接力の和が外からの圧縮力 P に等しいと云ふ條件から

$$P = 2Eh \int_{-a}^a \left\{ e - \frac{1}{4b} \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy \right\} dx$$

故に w 及 w_0 の値を入れて計算した結果は

$$\begin{aligned} \frac{P}{4Eah} &= e - \frac{f_2(n)f_4(n)}{16} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \\ &= e - \beta_4(n) C^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad \text{但し} \quad \beta_4(n) = \frac{f_2^2(n)}{4f_5(n)} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

又有効率を C_e とすれば

$$C_e = \frac{P}{4Eahe} = 1 - \frac{\beta_4(n)}{e} C^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (7)$$

となる。

(九州帝國大學工學部造船學教室に於て)

討

論

○座長(井口常雄君) 唯今の御講演に就て御質問又は御討論を御願ひしたいのでありますが、著者が居られません爲め御質問等御座いましたら著者に之を送りまして、著者は之によつて會報の上で

御返事がある事と思ひます。兎に角御質問又は御討議を御願ひ致します。

○吉識雅夫君 私は此の渡邊博士の paper に對する質問、討論では御座いませんが、誤記ではないかと気付いた事が御座いますので、著者に御照會願ひ度いと思ひます。235 頁の直線狀の棒の圧縮縮みが $\varepsilon_2 = \frac{P}{EA l}$ とありますが、direct force を受けて縮む場合には l が分子の方ではないかと思はれます。もう一つは 238 頁で、恐らく misprint でありませう、一番下の行に $e=5$ とありますが、之は $e=5 \times 10^{-4}$ の 10^{-4} が抜けてゐるのではないでせうか。それだけ気付きましたから申上げておきます。

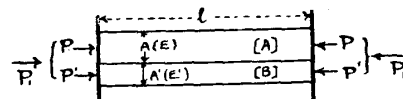
○座長(井口常雄君) 何方か外に御座いませんか、何方も御座いませんでしたら一言御禮を申し上げます。initial curvature を有つ板の圧縮は著者の言はれる如く、薄い中空梁の屈曲の問題には甚だ重要なのでありまして、船舶、航空機等に於て現在各方面の人達が研究中の事と思はれます。それに対する一つの解決の道として斯る事柄を研究されて、ここに發表された事は、甚だ有益なりと考へられ、著者に對して御禮を申し上げ度い。それから併せて代讀された吉識君にもお禮を申し上げたいと思ひます。皆様と拍手を以て感謝の意を表し度いと思ひます。(一同拍手)

(以下渡邊恵弘君の答辯は書面に依るもの)

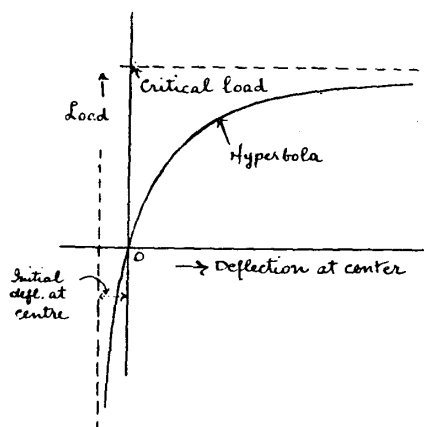
○渡邊恵弘君 止むを得ざる事情の爲め、出席不能となり、吉識助教授に代讀の勞を煩はした事に就き厚く感謝いたします。次に吉識助教授の指摘された點は悉く、著者の不注意からの誤りであります。若し會報上に於て訂正されて居らなかつたならば、此處で訂正して置きます。但し之等は他の部分には何等の影響はありません。(最初の 5 行目の ε_1 に對する式も l は分子に行きます。) 尙ほ此外にも處々に會報の方で訂正した點のある事を附加へます。吉識助教授の御注意に對し御禮申し上げます。

尙ほ本論文に關聯して會員の方より、有効率と云ふもの及び有効率と buckling との關係と云ふ様な點に就いて質疑乃至討論に類した私信に接しました。私信なるが故にその詳細を此處に發表する事は憚りますが、同様の疑問なり或は意見なりを持つて居られる方があるかも知れないと思ふので、之等の點に關し、今一應此處に著者の意見を述べさせて頂き度いと思ひます。

有効率と云ふ言葉は一般に用ひられて居ないので妙に聞えますが、之は著者の創造ではなく、本文文献中に擧げた濱田榮氏論文で同氏が使用して居るのを拜借したものです。獨逸では Pietzke や Marguerite u. Trefftz 等は有效幅 (Mittragende Breite) として取扱つて居ますが、之は全く同じ意味のもので唯定義が異なるのみであります。有効率に就いては本文冒頭に於て説明した積りでしたが、餘り充分でない様なので著者が學生時代に聞いた末廣先生の講義の一部を拜借して説明して見ます。今 2 つの異つた材料の (A),(B) なる二材 (各々の弾性係數及切口面積を E, A , 及び E', A' , 長は共に l) を並べておいて P_1 の力で圧縮した時、兩端を rigid な桁様のもので連結しておけば各材の圧縮は等しいので各々の受持つ圧縮



力を P, P' とすれば $\frac{Pl}{EA} = \frac{P'l}{E'A'} = \varepsilon$ であつて且つ $P_1 = P + P' = \frac{\varepsilon}{l} [EA + E'A'] = \frac{\varepsilon E}{l} \left[A + \frac{E'}{E} A' \right]$ となる故、二材が一緒になつて E の弾性係数を有する材料として働くと思ふと見做せば、その有効面積は $A_e = A + \frac{E'}{E} A'$ となり、従つて (B) 材の有効面積は $\frac{E'}{E} A'$ となります。此 E'/E を有効率と呼ぶのであります。 E'/E は切口の面積が等しければ、きまつた力で圧縮した時の圧縮の逆比でありますから、或る材料の有効率が如何に變るかは圧縮力に対する圧縮を求めればわかるわけで、本文は此意味で有効率を計算して居ます。次に initial curvature を有する compression member の有効率の問題と、buckling との関係ですが、之は直接には関係がないと云つて差支ないと思ひます。例へば單梁の如き場合、initial curvature は buckling load には理論上影響は與へませんが、有効率には非常に關係して來ます。initial curvature を有する場合は、buckling の現象と異り、load が小さい時から徐々に deflection が増加して來て、buckling と云ふ様な唐突な現象は現れません。實際に使はれる compression member は必ず多少の initial curvature を有する故、數學的に取扱はれる buckling の如き不連続的の現象の起らぬ事は、凡て buckling の實驗の示す處で、例へば先年本會報上に發表された鋼板の buckling に対する Montgomerie の實驗に於ても、市場にある鋼板その儘を使用したと斷つて居りますが、特に著しく此連續的な deflection の變化を示して居ます。此様に考へて來ると、compression を受ける strength member に對して、buckling と云ふ現象は、その強さを表はす上に於て、適確嚴密であるや否やは疑はしくなり、むしろ有効率の方が適當ではないかと思はれて來ます。即ち load が少し宛増加して來て、deflection が増して來るに従つて、有効率が次第に減少して來て、ある限界以下になれば、此材料の有効面積は非常に小さくなり、compression member として役に立たなくなつて來、之が此材料の強度材としての限度となるのではないかと思はれます。此限度は必ずしも buckling の起る critical load とは等しくなく、initial deflection の大きさに依つて異りますが、one panel をなす薄板の場合には buckling load 以上に於ても縁邊に近い部分が有効に働いて、板全體としては相當の有効率を有し、未だ限度に達しないのが普通で、此事は本文の結果より



り明にわかるのであります。單梁或は Montgomerie の實驗せる如き板の場合に於ては、甚だ異り、是等が initial deflection を有する場合は初めから 1 より小さい有効率を持つて居て、load が増加するに連れて deflection が増加し、従つて有効率が減少して來て、buckling load に達すると、有効率が zero となります。従つて或る限度の有効率を強さの limit に取れば、buckling load に達する前に此限度に達し、實用上役に立たなくなり、前述の Montgomerie の實驗では明に此様な buckling load に達せぬ前に有効率が可也小さくなつた處を effective

な buckling load に採つて居る様で従つて理論から出された buckling load より小さい値となつて居ます。此様な initial curvature を有する單梁の有効率は中央の deflection と load との関係が前頁の圖の如き双曲線になると云ふ Southwell の理論 (Proc. Roy. Soc. London Series A. Vol. 135) を使へば計算する事が出来ると思ひます。此様に有効率の考から云へば、單梁乃至之と同じ様な形の薄板の場合は buckling load に達せぬ前に、役に立たなくなるに反し、one panel をなす薄板の場合には buckling load を通り越しても相當の有効率を保つて居つて役に立つと云ふ事は非常に面白い事と考へられるのであります。initial deflection を有する材料は compression を受けた時のみならず、tension を受けた場合も 1 より小さい有効率となる事は compression の時と同様であります。唯此時は load が増すに従つて有効率が增加して来る故、initial deflection の餘り大きくない限りでは問題にする必要はないと思はれます。

有効率の問題は之に關聯する compression member を部材として有する構造物全體の強度の上に主要な問題であつて、此爲めに部材に大きい stress を起し易くなる事を示すのであります。compression member それ自身がどれだけの max. stress を受けるかと云ふ問題には、本文の取扱の範圍では、その近似法の關係上、立入る事は大膽すぎると思はれます。是は亦別種の問題として研究する必要があります。又本文中に學生の行つた實驗に就いて一寸述べましたが、之は元々 torsion の實驗を目的としたもので、その實驗に幾度も大きい load を掛けて研究し、それが済んだ後で、時間と test piece があつたので、bending test をしたのであります。従つて test piece は bending test する前に、既に各部の rivet の hole が擴がつたり、initial deflection の形が不規則になつたり、或は材料が疲れて居たりして居て、理想的のものでなくなつて居て、その爲めか、實驗結果は本文の結果より estimate したもののより餘程過大になつて現れて居ます。然し、特殊の裝置によつて panel の deflection を防止する方法を講じて實驗した結果 box girder の stiffness が約 20% 増加した事が認められました。此 20% は大體本論文の結果から initial deflection に依つて生ずる stiffness の減少として estimate し得る數字と同じ order のものであります。是等の事から此様な函型梁の stiffness は initial curvature の如き原因の外に connection の slip とか其の他の普通の計算に考へない二次的影響によつて減少するものであると云ふ事がわかつたのであります。此實驗に使つた panel の邊の長が 20cm で板の厚 1mm、一寸見た處で initial deflection はない様に思はれる程平な外見をして居ましたが、計測して見て平均 1mm の deflection があり、即ち板の厚さと同じ程度のものがありました。それで initial deflection と云ふものは一寸見た位では程度がわからぬものだと思ふ感じを得ました。尙ほ最後に一寸感想を述べさせて頂き度いと思ふ事は、近來航空機方面の薄肉構造物の發達に連れて、船舶に於ても之を應用する機運が起つて來、又之を必要とする議論もある様に聞くのであります。船體に薄板を使ふと云ふ事は非常に慎重であるべきだと思ふのであります。即ち corrosion の問題、caulking の問題、銲接の問題、熔接の問題等、薄板であるが爲めの種々の施工上

の難點がある外に、普通の強度計算に現れぬ二次的影響に就いて充分なる考慮を拂ふ必要があると思ふのであります。本文もその一つでありますが、その外に例へば水圧を受ける外板は薄くなつて來ると deflection が大となり、Pietzker Hoffmann の議論の如き理由によるもの、又は前述の rivet hole の crush によるもの等の如き諸種の原因に依つて船の section modulus は計算では充分にあつても實際には有効な値はずつと減つて來ると思はれます。是等に對して相當の compensation を考へないと、船體の stiffness が減少して之は他の部材に對する strength の問題は勿論の事ひいては大きい vibration の原因となり、又 shaft の centering に害を及ぼし、又此爲に water tightness が損ぜられる等の難點が惹き起される惧れがないとは云へないと思ふのであります。

吉識助教授の御質問を機會にいろいろ本文に關聯して愚説開陳に及びましたが、是等の點に關しては尙ほ諸先輩並にその道の専門家の方々の御教示を仰ぎ得れば幸に存じます。
