（昭和 18 年 4 月 3 日造船協會、造船協會阪神倶樂部聯合大會に於て講演）

有限變形を受ける薄い曲面板の強度に就て (1)

(基 礎 理 論)

准 員 工學士 栖 原 二 郎[1]

Abstract

On the Strength of Thin Shells under Finite Deformation. (1)

(Fundamental Theory)

By Zirô Suhara, *Kogakusi, Associate.*

The general theory of thin shells was formerly investigated by A.E.H. Love, [1] and has been applied to many problems of stability of thin shells and their calculated results compared with the experiments by various investigators. Generally it made clear to be some regular discrepancies between results deduced from Love's theory and the experimental evidences.

Th. V. Kármán pointed out that Love's theory based on infinitely small deformation of shells is not realized in many cases, actual deformations of shells by external or end pressure are so called "durchschlag", and consequently the stability of thin shells must be discussed taking into account of finite deformation based on non linear differential equations of equilibrium. But his theory has not yet been completed.

The author at first investigated the general theory of elastisity took account of finite displacement, then obtained the general theory of thin shells under large deformation which forms the generalization of Love's thin shell theory, and as its special case fundamental equation of "durchschlag", lastly showed on the methodof derivation of equations refered to some shapes of shells.

I. 緒 論

薄い曲面板の變形に關する一般理論は、その變形が無限小であるとの假定を基にして、最初に A. E. H. Love[1] が之を論じ、其後多くの人々が之を薄い曲面板の挫屈問題に應用して計算を行ひ實驗結果と比較してゐるが、その一般的な結論として、初めに曲率を有してゐる曲面板の挫屈値は實驗値より數倍高い。之を Th V. Kármán は轉屈[2]に依つて說明した。即ち從來の挫屈問題は無限小變形を假定したる理論なる故、その挫屈値は線形微分方程式の固有値として求められた。然るに初めに曲率を有する板の變形現象に對しては、殼の有限變形を考慮すれば、上の挫屈値より低い外壓に依つて平衡を保ち得る平衡狀態が存在し、外壓が挫屈値に達する以前に曲面板は、Love の假定せる無限小

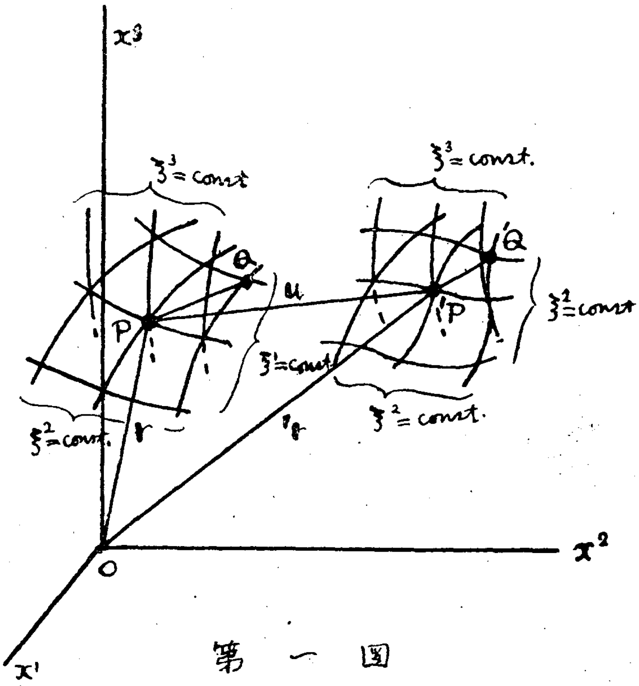
(1) 九州帝國大學大學院學生

(2) "durchschlag" を假りに轉屈と譯す。

變形狀態を脫して不連續的に有限變形を起し、實驗的には後者が挫屈荷重と見做される場合が多いのである。之が所謂轉屈の現象であつて有限變形を考慮せねば解釋が出來ぬものである。

有限變形を考慮した曲面板の理論は Kármán[2) 3)]河野[4)]、水木[5)]、四谷[6)]等の特殊形曲面板に關する研究があるが、Kàrmàn 自身も述べてゐる樣に未だ轉屈の理論は完成されて居ない。轉屈以外の現象に對しても板が極めて薄い場合には板の最終强度を決定する爲には有限變形狀態を考慮せねばならぬ場合が多い。然るに有限變形狀態に就いて一般的に論じた文獻は著者の知る限り見當らなかつたので取扱つて見た。

薄い曲面板の有限變形を研究するには、先づ其の基礎たる有限變形を受ける一般彈性體に關する理論を反省する必要がある。之に關しては旣に二、三の研究[7),8),9)]があるが、何れも曲面板の變形理論の基礎としては不適當と思はれたので、著者は先づ彈性體と共に變形する座標系に關して平衡方程式を求める事を試み、次に之を薄い曲面板の變形に應用してその基礎方程式を求め、更に轉屈に關する若干の考察をして、轉屈の一般方程式を導き、最後に二、三の特別な場合に關して具體的に方程式を求める方法を示した。



第 一 図

II. 彈性體の有限歪

第一圖に於て彈性體中に任意の一微粒子 $\mathfrak{P}$ をとり、$\mathfrak{P}$ の位置を指定するのに、空間に固定した直角座標系 R_0 (x^1, x^2, x^3)(3) 及び物體と共に變形する任意の曲線座標系 $R_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ を以て表はす事とし、$\mathfrak{P}$ の變形前の位置を P, 變形後の位置を ${}^1P$ とする。變形前の R_1 のとり方に依つて (x^1, x^2, x^3) と (ξ^1, ξ^2, ξ^3) の間には

$$x^i = f^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (i=1,2,3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1)$$

なる關係が與へられる。次に $\mathfrak{P}$ に極く接近した他の粒子 $\mathfrak{G}$ をとり、$\mathfrak{G}$ の變形前の位置を Q、變形後の位置を $'Q$、とする。$\mathfrak{G}$ の R_0 及 R_1 の座標はそれぞれ $(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$ 及び $(\xi^1+d\xi^1, \xi^2+d\xi^2, \xi^3+d\xi^3)$ であり、$\mathfrak{P}$ $\mathfrak{G}$ 間の變形前の距離を dr とすると、dr は次式に依つて與へられる。

$$dr^2 = \delta_{ij}\,dx^i\,dx^j, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot2)$$

(3) x^1, x^2, x^3 に於ける數字は冪でなく單なる指標を示す。指標は 1,2,3 の値をとるものとする。以下此の記法を用ふ。

次に (2·1) より與へられる $dx^i=\dfrac{\partial f^i}{\partial \xi^\mu}d\xi^{\mu}$(4)を (2·2) に代入すれば

$$dr^2=\delta_{ij}\frac{\partial g^i}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial f^i}{\partial \xi^\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu\equiv g_{\nu\mu}d\xi^\mu d\xi^\nu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot3)$$

玆に $g_{\mu\nu}=\delta_{ij}\dfrac{\partial f^i}{\partial \xi^\mu}\cdot\dfrac{\partial f^i}{\partial \xi^\nu}$ とする

次に弾性體が變形を受け、$\mathfrak{P}$ の R_0 に對する座標が $'x^i=x^i+u^i(x)$ となつたとすれば、$u^i(x)$ は變位ベクトルの R_0 に關する成分を表はす。次に $'x^i$ 及び u^i を ξ^μ の函數として表はした時

$$'x=\varphi^j(\xi) \qquad u^i=v^i(\xi)$$

とすれば、$\mathfrak{P}$ の變形後に於ける R_0 の座標は

$$\varphi^i(\xi)=f^i(\xi)+v^i(\xi)\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4)$$

となる。從つて $\mathfrak{S}$ の變形後に於ける R_0 の座標は

$$'x^i+d'x^i=\varphi^i(\xi)+d\varphi^i(\xi)=f^i(\xi)+df^i(\xi)+v^i(\xi)+dv^i(\xi)$$

となるから變形後に於ける $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{S}$ 間の距離 $d'r$ を下の如く表はせる。

$$d'r^2=\delta_{ij}d'x^i d'x^j=\delta_{ij}\frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^\mu}\cdot\frac{\partial\varphi^j}{\partial\xi^\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu=\delta_{ij}\left(\frac{\partial f^i}{\partial\xi^\mu}+\frac{\partial v^i}{\partial\xi^\mu}\right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial v^j}{\partial\xi^\nu}\right)d\xi^\mu d\xi^\nu$$

$$=\left(g_{\mu\nu}+\delta_{ij}\frac{\partial f^i}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial v^j}{\partial\xi^\nu}+\delta_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial v^i}{\partial\xi^\mu}+\delta_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial v^j}{\partial\xi^\nu}\right)d\xi^\mu d\xi^\nu\equiv 'g_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu$$

更に $d'r^2-dr^2=2\varepsilon_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu$ と置けば

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{1}{2}('g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu})=\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\frac{\partial f^i}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial v^j}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial f^j}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial v^i}{\partial\xi^\mu}+\frac{\partial v^i}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial v^j}{\partial\xi^\nu}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot5)$$

となり、更に物體と共に變ずる他の座標系 $\bar{R}_1$ $(\bar{\xi}^1,\bar{\xi}^2,\bar{\xi}^3)$ に關して $d'r^2-dr^2=2\bar{\varepsilon}_{\lambda\kappa}d\bar{\xi}^\lambda d\bar{\xi}^\kappa$ と置けば明らかに

$$\bar{\varepsilon}_{\lambda\kappa}=\frac{\partial\xi^\mu}{\partial\bar{\xi}^\lambda}\cdot\frac{\partial\xi^\nu}{\partial\bar{\xi}^\kappa}\varepsilon_{\mu\nu}$$

が成立する故、$\varepsilon_{\mu\nu}$ は R_1 に對する二階共變テンソルの成分であり然も (2·5) より對稱なる事が分る。

次に R_1 に關する變位ベクトルの成分を w^λ とし、その共變微係數 $w^\lambda{}_{,\mu}$ 即ち

$$w^\lambda{}_{,\mu}\equiv\frac{\partial w^\lambda}{\partial\xi^\mu}+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}w^\nu,\quad \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial\xi^\nu}+\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial\xi^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\xi^\alpha}\right)$$

を用ひて (2·5) の右邊の v^i を w^λ に變換すれば

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(w_{\nu,\mu}+w_{\mu,\nu}+g_{\kappa\lambda}w^\lambda{}_{,\mu}w^\kappa{}_{,\nu})\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot6)$$

---

(4) 以下 R_0 に關する諸量には i,j 等のローマ字を、R_1 に關する諸量の指標には μ,ν 等のギリシヤ文字を用ふる事とし、同一項に同じ指標が二つ現はれた時は特に斷はらぬ限りその指標に關して1から3迄の和をとるものと規約する。

(5) $\varepsilon_{\mu\nu}$ を歪テンソルと假りに名付ける。10) 參照

を得る。(2·6) の右邊の第三項は有限變形を考慮せる事に依り新たに現はれた項である。

彈性體と共に變形する座標系に對する Christoffel の記號 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ の座標系の歪に依つて生ずる變化は、平衡方程式に現はれる際は變位及其微係數を含む故、從來は省略されて居たが、有限變形理論では之も考慮する必要が生ずる。從つて變形後の Christoffel の記號を $'\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ とし $\varepsilon_{\mu\nu}$ の二次の項迄とれば

$$'\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \doteqdot \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\mu}}{\partial\xi^{\nu}} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial\xi_{\mu\nu}}{\partial\xi^{\alpha}}\right) - \gamma^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial\xi^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\xi^{\alpha}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (\cdot\cdot 2\cdot 7)$$

となる。但し

$$'g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - 2\gamma^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu} = \sqrt{g^{(\mu\mu)}g^{(\nu\nu)}}\,\varepsilon_{\mu\nu} \quad ((\mu\mu),(\nu\nu) \text{ に關し和をとらない})$$

となる。

$\varepsilon_{\mu\nu}$ は歪に關係した量であるが歪そのものではない。今座標 ξ^{μ} に關する伸びの成分を $\eta_{(\mu)}$ とすれば

$$\eta_{(\mu)} = \sqrt{\frac{'g_{\mu\mu}}{g_{\mu\mu}}} = \sqrt{1+\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu}} - 1 = \mathring{\varepsilon}_{\mu\mu} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}(2\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu})^3 - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

(μ に關して和をとらない)

となる。但し $\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu} = \dfrac{\varepsilon_{\mu\mu}}{g_{\mu\mu}}$ で $\varepsilon_{\mu\mu}$ の物理的成分を表はす。$\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu}$ の二次以上が省略出來る場合には從來の理論と一致する。又變形前に於ける ξ^{μ}-曲線と ξ^{ν}-曲線のなす角を $\zeta_{(\mu\nu)}$ とすれば

$$\cos\zeta_{(\mu\nu)} = \frac{2\varepsilon_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}+2\varepsilon_{\mu\mu}}\sqrt{g_{\nu\nu}+2\varepsilon_{\nu\nu}}} = \frac{2\mathring{\varepsilon}_{\mu\nu}}{\sqrt{1+2\mathring{\varepsilon}_{\mu\mu}}\sqrt{1+2\mathring{\varepsilon}_{\nu\nu}}} \quad (\mu,\nu \text{ に關し和をとらない})$$

となり、$\mathring{\varepsilon}_{\mu\nu}$ の二次以上の項が省略出來る場合には

$$\zeta_{(\mu\nu)} - \frac{\pi}{2} = \mathring{\varepsilon}_{\mu\nu}$$

となり、從來の理論と一致する。

更に適合の條件を求むれば

$$\varepsilon_{\mu\nu,\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau,\mu\nu} - 2g^{\lambda\kappa}w_{\lambda,\mu\nu}w_{\kappa,\sigma\tau} = \varepsilon_{\mu\sigma,\nu\tau} + \varepsilon_{\nu\tau,\mu\sigma} - 2g^{\lambda\kappa}w_{\lambda,\nu\tau}w_{\kappa,\mu\sigma} \cdots\cdots (2\cdot 8)$$

となり兩邊の第三項は新たに加つた項である。

III. 彈性法則及び運動方程式

變形後の彈性體內に任意の閉曲面 S をとつて、S に圍まれる部分の體積を V とする。V の有する運動勢力を T 變形後の密度を $'\rho$ とすれば

$$T = \frac{1}{2}\int_V {'\rho}\,{'g_{\mu\nu}}\,\dot{\xi}^{\mu}\dot{\xi}^{\nu}\,dV^{(6)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 1)$$

(6) ξ^{μ} は物體と共に變形する座標である。

《・》 は時刻 t に關する微分を示し、$dV=\sqrt{g}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ を示す。dV に働く合成應力ベクトルの成分を K^μ, 質量力ベクトルの成分を M^μ とし、K^μ 及び M^μ のなす假想仕事を δW とすると

$$\delta W=\int_S K^\mu \delta\xi_\mu dS+\int_V {}'\rho M^\mu \delta\xi_\mu dV \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot2)$$

茲に $dS_\lambda=\sqrt{g}\,e_{\lambda\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu$, $\left(e_{\lambda\mu\nu}\begin{cases}=0 & (\lambda,\mu,\nu)\ \text{のうち二數相等しき時}\\ =+1 & (\ \ ''\ \ )\ \text{が}\ (1,2,3)\ \text{の偶數順列なる時}\\ =-1 & (\ \ ''\ \ )\ \text{が}\ (1,2,3)\ \text{の奇數順列なる時}\end{cases}\right.$

である。

$\mathfrak{P}$ の加速度の成分を b^μ とすれば、$b^\mu=\dfrac{d^2\xi^\pi}{dt^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dfrac{d\xi^\alpha}{dt}\cdot\dfrac{d\xi^\beta}{dt}$ であり且つ任意の二時刻 t_0 及び t_1 に對して

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}\int_V {}'\rho b^\mu \delta\xi_\mu dV \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3)$$

となる。更に $K^\mu dS=T^{\mu\nu}dS_\nu$ に依つて應力テンソル $T^{\mu\nu}$ を導入して Gauss の發散の定理を用ふれば

$$\int_S (K^\mu dS)\delta\xi_\mu=\int_V \{T^{\mu\nu}{}_{,\nu}d\xi_\mu+T^{\mu\nu}(\delta\xi_\mu)_{,\nu}\}dV \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4)$$

を得る。Hamilton の原理は

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+W)dt=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5)$$

なる故、(3·2) に (3·4) を代入して得た δW 及び (3·3) を (3 5) に代入すれば

$$\int_0^{t_1}\int_V \{(T^{\mu\nu}{}_{,\nu}+{}'\rho M^\mu-{}'\rho b^\mu)\delta\xi_\mu+T^{\mu\nu}(\delta\xi_\mu)_{,\nu}\}dV\,dt=0 \cdots (3\cdot6)$$

を得る。上式中 $\delta\xi_\mu=g_{\mu\nu}\delta\xi^\nu$ は任意の假想變位であるから、今 $\partial(d'r^2)=0$ 從つて $\delta(\varepsilon_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu)=0$ なる假想變位をとれば總ての $d\xi^\mu$ に對しては $\delta\xi_{\mu\nu}=0$ 即ち斯かる假想變位に對しては歪を生じない。又

$$\delta(d'r^2)=\delta({}'g_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu)=\{(\delta\xi_\mu)_{,\nu}+(\delta\xi_\nu)_{,\mu}\}d\xi^\mu d\xi^\nu=0$$

であるから、(3·6) の末項$=0$ となり、(3·6) が任意の t_1 及び V に就いて成立すべき事から運動の方程式

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}+{}'\rho M^\mu-{}'\rho b^\mu=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot7)$$

を得る。上式に於ける各項は變形後の座標系に關する諸量の成分を示してゐる。

又各時刻に於て假想仕事は結局

$$\delta W+\delta T=\int_V T^{\mu\nu}(\delta\xi_\mu)_{,\nu}dV \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot8)$$

となり、且つ $\delta W+\delta T=0$ から $T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$ を得る。

弾性ポテンシヤルを $'\rho\phi$ とすると (3·8) より

$$'\rho\delta\phi = T^{\mu\nu}(\delta\xi_{\mu})_{,\nu} = T^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (3\cdot9)$$

となる。ϕ は $\varepsilon_{\mu\nu}$ の函數であるから

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}\delta\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (3\cdot10)$$

(3·9), (3·10) を比較すれば

$$T^{\mu\nu} = '\rho\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}} \qquad (3\cdot11)$$

を得る。ϕ は不變量なる故 $\varepsilon_{\mu\nu}$ を $I_1 = \varepsilon^{\mu}{}_{\mu}$, $I_2 = \frac{1}{2!}\delta^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2}$, $I_3 = \det\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}$ の形で含まねばならぬ[9]。且つ $'\rho$ も $\varepsilon_{\mu\nu}$ の函數であり、變形前の密度 ρ との比は

$$'\rho/\rho = \det{}'g_{\mu\nu}/\det g_{\mu\nu} = \sqrt{1+2I_1+3I_2+8I_3}$$

に依つて與へられる。從つて今 λ 及び μ を常數[7]として

$$\rho\phi = \frac{\lambda+2\mu}{2}I_1{}^2 - 2\mu I_2 \qquad (3\cdot12)$$

と置けば

$$T_{\sigma\tau} = \sqrt{1+2I_1+3I_2+8I_3}\,(\lambda I_1\cdot{}'g_{\sigma\tau} + 2\cdot\mu\varepsilon_{\sigma\tau}) \qquad (3\cdot13)$$

を得る。有限歪に對しても、I_1, I_2, I_3 が 1 に比して無視出來る場合には

$$T_{\sigma\tau} = \lambda I_1\cdot{}'g_{\sigma\tau} + 2\mu\varepsilon_{\sigma\tau} \qquad (3\cdot14)$$

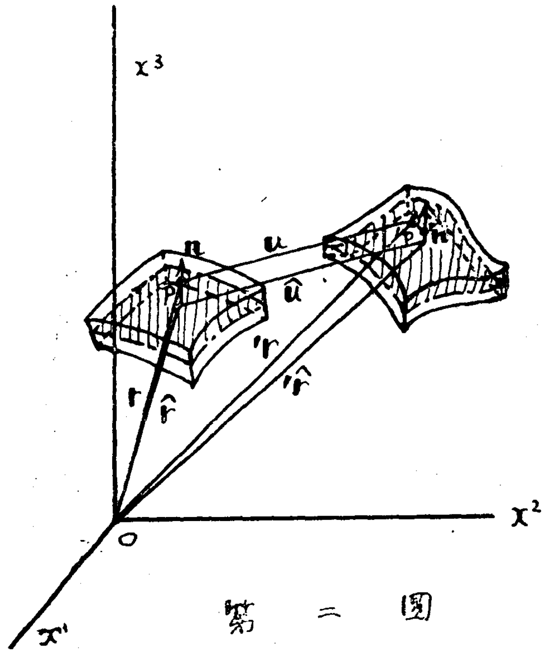
となり、Hooke の法則を得る。[8] E を Young 係數、ν を Poisson 比とすれば、λ, μ と E, ν との間には

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

なる關係がある。

IV. 薄い曲面板の變形及び運動方程式

以下に於ては厚さが一定で、極めて薄い曲面板を取扱ふ事とし、其厚さを2等分する曲面を中央面と呼ぶ事にする。中央面に關するベクトル及びテンソルの成分には指標に α, β, γ 等を用ひ其値は 1 及び 2 をとるものと規約する。且つ豫め變形前に於て ξ^3 = 一定 の面を中央



第二図

(7) 指標の λ, μ, ν とは何等の關係もない

(8) ϕ と I_1, I_2, I_3 との取り方に依り任意の彈性法則が得られる

面に一致する様に R_1 を撰んで置くものとする。板の中の任意の一粒子 $\mathfrak{P}$ の變形前の位置から變形前の中央面に下した垂線は變形後も中央面に垂直に交はると假定し、中央面に關する諸量には"∧"を附して、板内の一般の點の量と區別をする。中央面への變形前の法線に沿つて測つた距離を z とすると板内の任意の一點の歪テンソルは下の如くになる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{\alpha\beta}=\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}+\varepsilon'_{\alpha\beta}-z(\kappa_{\alpha\beta}+\lambda'_{\alpha\beta})+z^2\mu_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{3\alpha}=\varepsilon_{\alpha3}=\varepsilon'_{3\alpha}-z\lambda'_{3\alpha}\end{cases}(\alpha,\beta=1,2)\cdots\cdots\cdots(4\cdot1)$$

玆に

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}={}'\hat{g}_{\alpha\beta}-\hat{g}_{\alpha\beta}$$

は中央面の歪を表はし、又中央面上に固定した點に對する相對的變位ベクトルの變形後の座標系に關する成分を w'_λ とすると、　$\varepsilon'_{\sigma\tau}=\dfrac{1}{2}(w'_{\sigma,\tau}+w'_{\tau,\sigma}+{}'g_{\lambda\kappa}w^\lambda{}_{,\sigma}w^\kappa{}_{,\tau})$ で中央面に對する相對的歪を表はし

$$\kappa_{\sigma\beta}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}(u_{3,\alpha\beta}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}w_{\mu,3}+w_{\mu,\alpha\beta}w^\mu{}_{,3})$$

は中央面の曲率の變化に關係した量であり、更に變形前後に於ける中央面の第二基本量を $h_{\alpha\beta}$ 及び ${}'h_{\alpha\beta}$ として

$$\lambda'_{\sigma\beta}={}'h_{\alpha\beta}w^\alpha{}_{,\sigma}\quad(\alpha,\beta=1,2,\ \ \sigma=1,2,3)$$

且つ中央面の $d\xi^\alpha, d\xi^\beta$ の比に依つて定められる方向に對する變形前後に於ける曲率半徑を $\dfrac{1}{R_{(\alpha\beta)}}$ 及び $\dfrac{1}{{}'R_{(\alpha\beta)}}$，平均曲率をそれぞれ H 及び ${}'H$，全曲率を K 及び ${}'K$ とすると

$$\mu_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\{{}'g_{\alpha\beta}\left(\frac{{}'H}{{}'R_{(\alpha\beta)}}-{}'K\right)-g_{\alpha\beta}\left(\frac{H}{R_{(\alpha\beta)}}-K\right)\right\}\quad(\alpha,\beta\ \text{に就き和をとらない})$$

を表はすものとする。

中央面に對する相對的歪 $\varepsilon'_{\sigma,\tau}$ に於て板が極めて薄き事及び、變形後も中央面の法線が垂直に保たれると云ふ假定から $,3=\sqrt{{}'g_{33}}\dfrac{\partial}{\partial z}$ と置く事が出來且つ $w'_{\sigma,\tau}$ の二次の項を省略する時は、$\mathfrak{f},\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{i}$ を $\xi^1\xi^2$ にのみ關係し ξ^3 には無關係な函數として w'_σ を近似的に下の如くに表はす事が出來る。

$$\begin{cases}w'_1=-z(\mathfrak{f}_{,1}+\mathfrak{g}_{,1})+z^3\mathfrak{h} \\ w'_2=-z(\mathfrak{f}_{,2}+\mathfrak{g}_{,2})+z^3\mathfrak{h} \\ w'^\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{{}'g_{33}}}\left(z\mathfrak{f}+\dfrac{z^3}{3}\mathfrak{i}\right)_{,3}=\mathfrak{f}+z^2\mathfrak{i}\end{cases}$$

從つて上式及び兩面に於ける境界條件 $z=\pm h$（板の厚さを $2h$ とす）に於て $\varepsilon'_{3\alpha}=0$ $(\alpha=1,2)$ を用ふれば

$$\begin{cases} \varepsilon'_{\alpha\beta}=\{-z(\mathfrak{f}+\mathfrak{g})+z^3\mathfrak{f}\}_{,\alpha\beta} \\ \varepsilon'_{3\alpha}=-\dfrac{1}{2}\left\{\mathfrak{g}\left(1-\dfrac{z^2}{h^2}\right)\right\}_{,\alpha} \qquad (\alpha,\beta=1,2) \\ \varepsilon'_{33}=2z\mathfrak{i} \end{cases}$$

を得る。従つて

$$\int_{-h}^{h}\varepsilon'_{\alpha\beta}dz=\int_{-h}^{h}\varepsilon'_{33}dz=0,\ \int_{-h}^{k}z\varepsilon'_{3\alpha}dz=0 \quad (\alpha,\beta=1,2)\cdots\cdots(4\cdot2)$$

となる。同様にして

$$\int_{-h}^{h}\lambda'_{\alpha\beta}dz=\int_{-h}^{k}\lambda'_{33}dz=0,\quad \int_{-k}^{h}z\lambda'_{3\alpha}dz=0 \quad (\alpha,\beta=1,2)\cdot \quad (4\cdot3)$$

更に

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial\hat{\xi}^\alpha}\cdot\dfrac{\partial\xi^\beta}{\partial\hat{\xi}^\beta}\equiv k,\ \left(\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}kdz\doteqdot1\right) \\ \displaystyle\int_{-h}^{h}kT^{\alpha\beta}\equiv P^{\alpha\beta},\quad \int_{-h}^{h}kzT^{\alpha\beta}dz=M^{\alpha\beta} \\ \displaystyle\int_{-h}^{h}k\rho\,dz\equiv\bar{\rho},\quad \int_{-h}^{h}k\rho X^\mu=\bar{\rho}\cdot\bar{X}^\mu \\ \displaystyle\int_{-h}^{h}k\rho b^\mu\,dz\equiv\bar{\rho}\cdot b^\mu \end{cases}$$

と置いて、(3,7) に k 及び zh を乗じて板厚間に於て積分し、(4·2), (4·3) を用ふれば薄い曲面板の運動の方程式は

$$\begin{cases} P^{\lambda\mu}{}_{,\mu}+\bar{\rho}\cdot\bar{X}^\lambda-\bar{\rho}\cdot\bar{b}^\lambda=0 \\ M^{\alpha\mu}{}_{,\mu}=P^{\alpha3},\quad (\alpha=1,2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot4) \\ M^{3\mu}{}_{,\mu}=0 \end{cases}$$

となる。板は極めて薄い故普通 $P^{33}=0$ と置き得る。且つ (4·2) を用ふれば

$$P^{\alpha\beta}=\frac{2hE\nu}{1-\nu^2}\left(\dot{I}_1'g^{\alpha\beta}+\frac{1-\nu}{\nu}\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot5)$$

を得る。玆に $\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}k\varepsilon^{\alpha\beta}dz,\ \dot{I}_1=\bar{\varepsilon}^\alpha{}_\alpha$ $(\alpha=1,2)$ とする。

更に

$$\begin{cases} \hat{I}_1=\hat{\varepsilon}^\alpha{}_\alpha \\ K_1=\kappa^\alpha{}_\alpha \quad (\alpha=1,2) \\ M_1=\mu^\alpha{}_\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{I}_1'=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}\varepsilon^\alpha{}_\alpha dz \\ \bar{L}'=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}\lambda'^\alpha{}_\alpha dz \quad (\alpha,\beta=1,2) \\ \bar{\lambda}'^{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}\lambda'^{\alpha\beta}dz \end{cases}$$

と置けば (4·5) は

$$P^{\alpha\beta}=\frac{2hE\nu}{1-\nu^2}\left\{\left(\hat{I}_1-2h\bar{L}'+\frac{8h^3}{3}M_1\right)'g^{\alpha\beta}+\frac{1-\nu}{\nu}\left(\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}-2h\bar{\lambda}'^{\alpha\beta}+\frac{3h^2}{8}\mu^{\alpha\beta}\right)\right\}\cdots\cdots(4\cdot6)$$

となる。同様にして

$$\bar{\bar{\varepsilon}}'^{\alpha\beta}=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}z\varepsilon'^{\alpha\beta}dz,\quad \bar{\bar{I}}'_1=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}z\varepsilon'^{\alpha}{}_{\alpha}dz\quad(\alpha,\beta=1,2)$$

と置くと

$$M^{\alpha\beta}=\frac{2h^3}{3}\cdot\frac{E\nu}{1-\nu^2}\left\{\left(\frac{6\bar{\bar{I}}'_1}{h}-K_1\right)'g^{\alpha\beta}+\frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{6\bar{\bar{\varepsilon}}'^{\alpha\beta}}{h}-\kappa^{\alpha\beta}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot7)$$

を得る。(4·6) に於て右邊の $\mu^{\alpha\beta}$ は曲率に關する二次の項であつて新たに附加されたものである。然し此量は普通 $\varepsilon'^{\alpha\beta}$ 及び $\lambda'^{\alpha\beta}$ と共に其他の量に比し省略し得る程微小である。(4·6) 中有限歪の影響として特に新たに考慮せねばならぬ量は $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ の中に含まれる $w^3{}_{,\alpha}w_{3,\beta}$ なる量である。

V. 薄い曲面板の變形勢力及び安定條件

板が薄い場合には $P^{33}\doteqdot0$ と置ける故、$\varepsilon_3{}^3$ を $\varepsilon_1{}^1$ 及び $\varepsilon_2{}^2$ に依つて表はす事が出來、且つ (4·1) 式中 $\varepsilon'_{\sigma\tau}$ 及び $\lambda'_{\sigma\tau}$ を省略すれば、結局板全體に就いての變形勢力 $\Phi=\int_V{}'\rho\phi\,dV$ は變形前後に於ける密度の變化を省略すれば下の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}
\Phi&=A\int_S\{\hat{I}_1{}^2+2(1-\nu)\hat{I}_2\}dS+D\int_S\{K_1{}^2+2(1-\nu)K_2\}dS\\
&=\frac{h}{E}\int_S\{P_1{}^2+2(1+\nu)P_2\}dS+\frac{1}{D}\int_S\{M_1{}^2+2(1+\nu)M_2\}dS\\
&\text{茲に}\quad A=\frac{Eh}{2(1-\nu^2)},\quad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\\
&\hat{I}_1=\varepsilon^{\alpha}{}_{\alpha},\quad \hat{I}_2=\det\varepsilon^{\beta}{}_{\alpha}\\
&K_1=\kappa^{\alpha}{}_{\alpha},\quad K_2=\det\kappa^{\beta}{}_{\alpha}\qquad(\alpha,\beta=1,2)\\
&P_1=P^{\alpha}{}_{\alpha},\quad P_2=\det P^{\beta}{}_{\alpha}\\
&M_1=M^{\alpha}{}_{\alpha},\quad M_2=\det M^{\beta}{}_{\alpha}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot1)$$

外壓 p の爲す仕事を Ψ とすれば

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi=p\int_S\mathring{w}_3dS\\
&\text{茲に}\quad \mathring{w}_3=\sqrt{'g_{33}}w^3,\quad dS=\sqrt{\det{}'g_{\alpha}{}^{\beta}}\,d\xi^1d\xi^2\\
&(\alpha,\beta=1,2)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot3)$$

從つて薄板全體の位置勢力 Π は下の如く書ける。

$$\Pi=\Phi-\Psi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot4)$$

故に薄板の平衡の條件は任意の δw^{λ} に對し

$$\delta \Pi = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5{\cdot}5)$$

であり

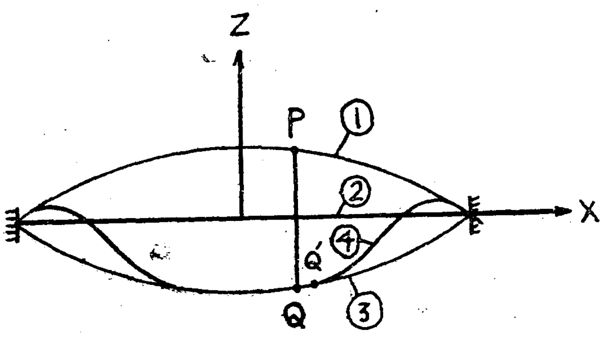
此平衡狀態が安定なる平衡か不安定なる平衡かに依つて任意の δw_{λ} に對して、$\delta^2 \Pi > 0$ 又は $\delta^2 \Pi < 0$ なるを必要とし、安定な平衡から不安定な平衡に變る荷重は (5·5) 及び任意の δw^{λ} に對し

$$\delta^2 \Pi = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5{\cdot}6)$$

の二式より求められる。

VI. 轉屈の基礎方程式

轉屈の意味に就いては緒論に於て述べた。實際荷重と撓みとの關係を求むるには、(4·6)、(4·7) と共に (4·4) を解析式になほして境界條件に合ふ如く解けば良い。然るに轉屈現象に對しては次の如く計算すれば簡單となる。



第 三 圖

轉屈は必ず小さな初期曲率を有する棒又は板に起る。例へば第三圖の如き部分球殼[2)]に於て、曲げ剛性がないとすれば、③の位置も外壓なくして平衡狀態を保ち得る。且つ①の狀態で初期歪がなければ③の狀態でも歪はない筈である。歪がなければ①に於ける任意の一點 P は、Z 軸に平行直線上の③の點 Q に對應する。次に曲げ剛性を考へれば①の如き位置で外壓を受ければ④の如く變形し、且つ中性面に歪が生ずるであらう。然し P 點は④の狀態に於ける Q' の如き點に移動したとすると、板は伸長に對しては大きな抵抗を持つから $\overline{QQ'}$ の水平距離は極めて小さいと見做し得る。故に①上の總ての粒子は Z 軸に平行に移動すると假定して行つた計算から更に $\overline{QQ'}$ の水平距離を考慮する計算へ進んだ方が簡單である。既に Kármán [2)] は $\overline{QQ'}$ の水平距離 $=0$ として計算してゐる。次に初曲率が小さい故、第一近似として中性面の應力及歪の方向を x 軸の方向と見做す事が出來る。斯かる場合には、水平面方向の歪は、$\xi^3=0$ を基準平面として、最初板の基準平面からの距離を $W(\xi^1,\xi^2)$, 撓みの垂直方向の成分を $\mathfrak{W}$ とすれば、中央面の歪の ξ^α, ξ^β に關する成分は

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha} + \frac{1}{2}(W+\mathfrak{W})_{,\alpha}(W+\mathfrak{W})_{,\beta} - \frac{1}{2}W_{,\alpha}W_{,\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2) \cdots\cdots (6{\cdot}1)$$

上式に於て W 及び $\mathfrak{W}$ は基準平面內の曲線座標間の變換に對しては不變である。境界に於て $W=\mathfrak{W}=0$ なる條件を用ふれば、(5·4), (5·5) は下の如く書ける。

$$\delta \Pi = \delta(\Phi - \Psi) = \int_S P^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\,\delta(w_{,\alpha} + \mathfrak{W}_{,\alpha}) + \{D g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \mathfrak{W}_{,\alpha\beta\gamma\delta} - P^{\alpha\beta}(W+\mathfrak{W})_{,\alpha\beta} - p\}\,\delta\mathfrak{W} = 0 \ (\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2)$$

從つて

$$\left.\begin{aligned} &P^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \\ &D\Delta\Delta\mathfrak{W}=p+P^{\alpha\beta}(W+\mathfrak{W})_{,\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha,\beta=1,2) \cdots\cdots (6\cdot2)$$

適合の條件は (2·8) 及 (6·1) より

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\varepsilon_{\gamma\delta,\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\gamma,\beta\delta}-\varepsilon_{\beta\delta,\alpha\gamma}=(W+\mathfrak{W})_{,\alpha\gamma}(W+\mathfrak{W})_{,\beta\delta}-(W+\mathfrak{W})_{,\alpha\beta}\cdot(W+\mathfrak{W})_{,\gamma\delta}$$
$$-(W_{,\alpha\gamma}\cdot W_{,\beta\delta}-W_{,\alpha\beta}\cdot W_{,\gamma\delta})\cdots\cdots (6\cdot3)$$

となる。次に特殊な場合に關して上の方程式を書き直して見る。

（1） **直角座標系** $(\xi^1=x,\xi^2=y,\ \mathring{w}^1=u,\ \mathring{w}^2=v,\ \mathfrak{W}=w)$

歪成分 :—

$$\left.\begin{aligned} \mathring{\varepsilon}_{11}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \\ \mathring{\varepsilon}_{22}&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \\ \mathring{\varepsilon}_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}\right\}\cdots (6\cdot3)$$

[9]

平衡方程式 :— 應力函數 F を導入し

$$\mathring{P}_{11}=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\ \mathring{P}_{12}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y},\ \mathring{P}_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}$$

$$D\Delta\Delta w=p+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)$$

適合の條件 :—

$$\Delta\Delta F=\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)-\left\{\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right\}\cdots\cdots (6\cdot4)$$

玆に

$$\Delta\Delta\equiv\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$ を示す

彈性法則 :—

$$\left.\begin{aligned} \mathring{\varepsilon}_{11}&=\frac{1}{E}\left(\mathring{P}_{11}-\nu\mathring{P}_{22}\right)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right) \\ \mathring{\varepsilon}_{22}&=\frac{1}{E}\left(\mathring{P}_{22}-\nu\mathring{P}_{11}\right)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right) \\ \mathring{\varepsilon}_{12}&=\frac{1}{G}\mathring{P}_{12}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots (9\cdot5)$$

但し上の諸式に於ては基準面方向の座標の伸長の影響は微小なる故省略してある。又更に前述の如く中央面方向の諸量の成分は基準面方向の成分を以て代用してある。

此等の影響をも考慮に入れる爲には、上の諸式中に現はれる成分例へば $P_{\alpha\beta}$ の物理的成分として

[9] $\mathring{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}/g_{\alpha\beta}$ を示し、基準座標系に對する物理的成分を示す。以下之に倣ふ。

は $\overset{\circ}{P}_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}/'g_{\alpha\beta}$ を用ひ Christoffel の記號は $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ の代りに $'\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ を用ふれば良い。前者に對しては (2·5) より

$$'g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\beta}$$

を用ふれば良く、後者には (2·7) より次式を用ふれば良い。

$$'\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}+g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\delta\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}+\frac{\partial\varepsilon_{\delta\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}-\frac{\partial\xi_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\delta}}\right)-\gamma^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\delta}}\right)\quad(\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2)$$

(2) 極座標 $(\xi'=r,\ \xi^2=\theta,\ \overset{\circ}{w}^1=u,\ \overset{\circ}{w}^2=v,\ \mathfrak{W}=w)$

歪成分 :—

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}&=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}&=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial h}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdot(6{\cdot}5)$$

平衡方程式 :— 應力函數 F を導入し

$$\overset{\circ}{P}_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2},\quad \overset{\circ}{P}_{12}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right),\quad \overset{\circ}{P}_{22}=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}$$

$$D\Delta\Delta w=p+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{\partial^2w}{\partial r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial^2F}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}\right)$$

適合の條件 :—

$$\Delta\Delta F=\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right\}^2-\left(\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{\partial^2w}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}\right)-\left[\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)\right\}^2-\frac{\partial^2W}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

玆に

$$\Delta\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\qquad\cdots\cdots(6{\cdot}6)$$

彈性法則 :—

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}&=\frac{1}{E}\left(\overset{\circ}{P}_{11}-\nu\overset{\circ}{P}_{22}\right)=\frac{1}{E}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}-\nu\frac{\partial^2F}{\partial r^2}\right\}\\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}&=\frac{1}{E}\left(\overset{\circ}{P}_{22}-\nu\overset{\circ}{P}_{11}\right)=\frac{1}{E}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial r^2}-\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\nu\theta^2}\right)\right\}\\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}&=\frac{1}{G}\overset{\circ}{P}_{12}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdot(6{\cdot}7)$$

上の諸式に於ても中央面の伸長等の影響は省略してある。此等の補正も(1)に於て述べた方法と全く同樣にして求める事が出來る。

VII. 結　　語

著者は有限變形彈性理論に基いて、有限變形を受ける曲面板の理論を基礎的に吟味した。其結果を從來の理論と比較して表にして示せば第一表の如くなる。最後に轉屈に關する基礎方程式を導き、具體的な解析方程式の形に示した。此等方程式の解に就いては次の機會に讓り度い。

第　一　表

		微小變位一般理論	Love の曲面板の理論	Kármán の平板理論	有限變形一般理論及び曲面板の理論
歪成分に於ける變位の成分		一　次　迄	一　次　迄	二　次　迄	二　次　迄
彈　性　法　則		Hooke の法則	Hooke の法則	Hooke の法則	任　意
座標系の變形	面方向	無　視	無　視	無　視	無視又は一次迄
	面に垂直方向	無　視	無　視	一　次　迄	一次又は二次迄
計量の變化（中央面の伸びの影響）		無　視	無　視	無　視	無視又は一次迄
曲　率　の　變　化			一　次　迄	一　次　迄	一次又は二次迄
適　用　限　界		微小變形に限る	撓みが板厚に比し小なる場合	撓みが板厚の數倍の程度迄	任　意
荷重撓み特性	挫屈以外の場合	線　形	線　形	非　線　形	非　線　形
	挫屈の場合		挫屈荷重は平衡方程式の固有値として決まる。變位不定。	挫屈荷重迄撓み0。其以後の特性は非線形	同　左

最後に本研究を行ふに當り御懇篤なる御指導を賜つた渡邊教授に對し厚く御禮申上げる次第である。

（以　上）

（追記）V 章以下は今後の解法の爲の便宜を考慮して、講演會の後に追補したものである。

參 考 文 獻

1) A. E. H. Love. Mathematical Theory of Elasticity. Fourth Edd. p. 515
2) Th. V. Kármán and Hsue-Shen Tsien, The Buckling of Spherical Shells by External Pressure, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol 7. p. 43. 1939
3) Th. V. Kármán, G. D. Louis and Hsue-Shen Tsien. The Influence of Curvature the Buckling Characteristics of Structures, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol 7. p. 277. 1940
4) 河野忠義、曲面板の彈性不安定現象の理論的考察。日本航空學會誌第 8 卷、70 號、p. 178 昭和 16 年 2 月
5) 水木三郎、圓壔殼の壓壞に關する理論的研究。九州帝國大學卒業論文、昭和 17 年 10 月
6) 皿谷嘉夫、圓錐殼の壓壞に關する理論的研究、　同　上　　同　上
7) F. D. Murnaghan. Finite Deformation of an Elastic Solid. American Journal of Mathematics. April, 1937. p. 235
8) R. Kappus. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. Zeit. für Angewandte Mathematik und Mechanik Bd. 19. Nr. 5. S. 271. 1939

9) M. A. Biot. Elastizitätstheorie Zweiter Ordnung mit Anwendungen. Deit. für Angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 20. Nr. 2. s. 89
10) A. J. McConnell. Application of The Absolute Differential Calculus. 1931

討 論

○座長(井口常雄君) 只今の御講演に對して御質疑、御討論が御座いますでせうか。どなたか御座いませんか。……どなたも御發言なきやうですから一言著者に御禮を申上げます。栖原君は先程御說明の通り薄板の變形の大なる場合について極く基礎的の事より出發され、それに必要なる彈性の式を立てられました。又伺ひまするに刷物の通り大變むづかしい手のかかつた論文のやうに思ひます。平面板、曲面板の理論が造船家に必要なるは勿論で、例へば現在の梁の理論は船體のやうな薄肉のものにはあてはまらず、假に用ひてゐるのであります。之につき解析を各方面でなしつつあります。之に對して基礎的の研究に手をつけられたのは結構な事であります。將來の發展を大ひに期待致すものであります。大變骨の折れた立派な論文を發表して下さつて有難う御座いました。皆様と一同で拍手を以て御禮に代へ度いと思ひます。(一同拍手)