（昭和 23 年 4 月 11 日造船協會春季講演會に於て講演）

矩形平板構造物の振動に就て（II）

正員　工學士　山　本　善　之*

Abstract

On the Vibration of the Rectangular Plane Plate Structure (II)

By Y. Yamamoto, *Kogakushi*, *Member*

The Author attempts to develop the method proposed in his last paper (this Journal Oct. 1947) to the general cases. Specially the Vibration of the rectangular plate stiffened with beams are dealed.

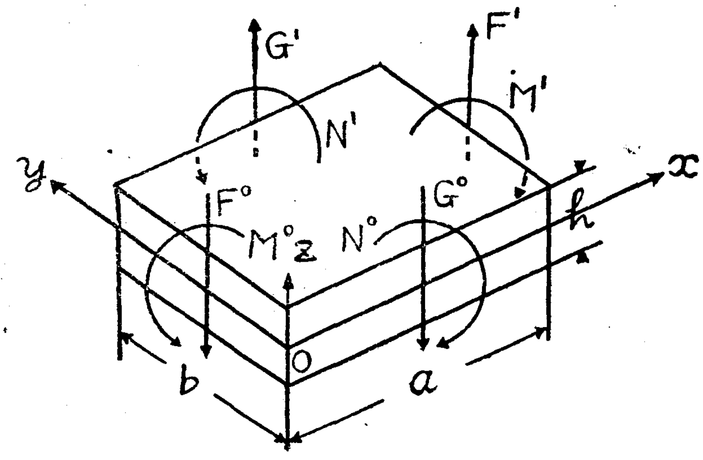
§1　序　　論

先きに發表したる著者の論文，"矩形平板構造物の振動に就て"（會報昭 22 年 11 月）の方法を更に一般化したものを本論で取扱う。前論文の様に極めて一般的に問題を扱う事も出來るが，特に補强梁を有する矩形板を目標にして問題を扱う。實際は極く特殊な問題を除き，一般に現われる問題はこの特殊な場合で片附けられる。尙一般の場合の扱い方に就ては隨所に述べて置く。

§2　變位と回轉の場に於ける影響係數

矩形板に關する量，記號は前論文と同じものを用いる。（第 1 圖參照）此處でも "剪斷力" なる語は眞の剪斷力の意でなく，捩り moment の影響を加えたものである。故に捩り moment に就ては別に考える必要はない。（前論文の注意を參照されたい。）

さて，本節の問題は "矩形板の四周に於ける撓み變位，回轉を與えてその振動狀態を定める事" で，從つて板の撓み形，四周の曲げ moment，剪斷力の分布が定まる。この様に問題を提出された板を "變位と回轉の場" にあると云う。一對の對邊が變位と曲げ moment 又は回轉と剪斷力の場の時は前論文より直ちに結果が導かれるが，然らざる場合の內各對邊が同じ場にある



第　1　圖

場合は下に用いる函數 H, K 等を多少變える事により得られ，一般の場合には之と同じ思想の下に H, K 等に對應する函數を作つて用いれば良い譯である。尙以下に於て前論文と多少異つた記號を用いる故この點注意を要す。

板の振動方程式は變位を we^{ipt} として

$$\nabla^2\nabla^2 w = k'^4 w \qquad (1)$$

此處に

$$\left.\begin{aligned} k'^4 &= \frac{Whp^2}{g\Delta} \\ \Delta &= \frac{1}{12}\frac{Eh^3}{1-\nu^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

k' の元が $\left[\dfrac{1}{L}\right]$ なる故便宜上適當な長さ c をとり

* 東大第一工學部講師

$$k=k'c=c\sqrt[4]{\frac{Whp^2}{g\Delta}} \quad \cdots\cdots(3)$$

なる無次元數を作つて之を用いる。又

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{c}=\alpha, \quad \frac{b}{c}=\beta \\ &\rho_n=\sqrt{k^2+\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2}, \quad \sigma_n=\sqrt{-k^2+\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2} \\ &\lambda_m=\sqrt{k^2+\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2}, \quad \mu_m=\sqrt{-k^2+\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

こゝに σ_n, μ_m は虚數になり得る事に注意を要す。

$\xi=\dfrac{x}{a}$, $\eta=\dfrac{y}{b}$ として次の函數を作る。

$$\left.\begin{aligned} H(\rho_n,\ \xi)&=\frac{\sinh(\alpha\rho_n/2)\ (1-2\xi)}{\alpha\rho_n\cosh(\alpha\rho_n/2)}-\frac{\sinh(\alpha\sigma_n/2)\ (1-2\xi)}{\alpha\sigma_n\cosh(\alpha\sigma_n/2)} \\ K(\rho_n,\ \xi)&=\frac{\cosh(\alpha\rho_n/2)\ (1-2\xi)}{\alpha\rho_n\sinh(\alpha\rho_n/2)}-\frac{\cosh(\alpha\sigma_n/2)\ (1-2\xi)}{\alpha\sigma_n\sinh(\alpha\sigma_n/2)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5)$$

に關する微分を $'$ にて表わすと, $H, H', \cdots, K, K', \cdots$ は σ_n の虚實に關せず實數値をとる。この函數の次の性質が有用である。

$$\left.\begin{aligned} &H'(\rho_n,0)=H'(\rho_n,1)=K'(\rho_n 0)=K'(\rho_n,1)=0 \\ &H^{(2r)}\left(\rho_n,\frac{1}{2}\right)=K^{(2r+1)}\left(\rho_n,\frac{1}{2}\right)=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6\cdot1)$$

$\xi=\dfrac{1}{2}$ に對して $H^{(2r)}(\rho_n,\ \xi)$, $K^{(2r+1)}(\rho_n,\ \xi)$ は反對稱, $H^{(2r+1)}(\rho_n,\ \xi)$, $K^{(2r)}(\rho_n,\xi)$ は對稱である。

依て

$$\left.\begin{aligned} &H^{(r)}(\rho_n,0=(-)^{r+1}H^{(r)}(\rho_n,\ 1)\equiv\bar{H}^{(r)}(\rho_n) \\ &K^{(r)}(\rho_n,0)=(-)^r K^{(r)}(\rho_n,1)\equiv\bar{K}^{(r)}(\rho_n) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6\cdot2)$$

$H(\rho_n,\xi)$, $K(\rho_n,\xi)$ は次の様に展開出來る。

$$\left.\begin{aligned} &H(\rho_n,\ \xi)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m^n(\rho_n)\ \frac{1-(-)^m}{2}\cos m\pi\xi \\ &K(\rho_n,\ \xi)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m^n(\rho_n)\ \frac{1+(-)^m}{2}\cos m\pi\xi \\ &\text{但し}\quad h_m^n(\rho_n)=-\frac{\varepsilon_m 8\alpha^2k^2}{(m^2\pi^2+\alpha^2\rho^2{}_n)(m^2\pi^2+\alpha^2\sigma^2{}_n)}, \quad \left[\varepsilon_0=\frac{1}{2},\quad \varepsilon_m=1(m\geqq1)\right] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7)$$

尙 $h_n^m(\lambda_m)$ は $\rho_n\to\lambda_m$, $\sigma_n\to\mu_m$, $\alpha\to\beta$, $n\rightleftarrows m$ として得られる。

$\xi=0,1$; $\eta=0,1$ に於ける z 方向の變位, 回轉其他の量を $u^0(\eta), u^1(\eta)$, $v^0(\xi)$, $v^1(\xi)$; θ,ϕ ; M, N ; F, G にて表わす。今の場合は

$$\left.\begin{aligned} &u^i(\eta)=\sum_n u_n^i\cos n\pi\eta, \quad v^i(\xi)=\sum_m v_m^i\cos m\pi\xi \quad (i=0,1) \\ &\theta^i(\eta)=\sum_n\theta_n^i\sin n\pi\eta, \quad \phi^i(\xi)=\sum_m\phi_m^i\sin m\pi\xi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

が與えられ,

$$\left.\begin{aligned} &M^i(\eta)=\sum_n M_n^i\cos n\pi\eta, \quad N^i(\xi)=\sum_m N_m^i\cos m\pi\xi \quad (i=0,1) \\ &F^i(\eta)=\sum_n F_n^i\sin n\pi\eta, \quad G^i(\xi)=\sum_m G_m^i\sin m\pi\xi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

の M_n^i 等を u_n^i 等の函數で書く事が問題なのである。

先ず四邊に於て回轉 0 の場合を考える。この時 (1) 式の解は次の様に與えられる。(以下 $\sum$ の上下限は斷りなき限り, 0～∞ とす)

$$\left.\begin{aligned} w_1=&\sum_n \left[A_n H(\rho_n,\ \xi)/H(\rho_n)+B_n K(\rho_n,\ \xi)/K(\rho_n)\right]\cos n\pi\eta \\ &+\sum_m \left[A'_m H(\lambda_m,\ \eta)/H(\lambda_m)+B'_m K(\lambda_m,\eta)/K(\lambda_m)\right]\cos m\pi\xi \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

明らかに $\theta^0(\eta)=\theta^1(\eta)=\phi^0(\xi)=\phi^1(\xi)=0$ となり確かに條件に適す。

$\xi=0$ 及 1 では

$$u^0(\eta)=\sum_n \cos n\pi\eta\left\{A_n+B_n+\sum_m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]\right\}$$

$$u^1(\eta)=\sum_n \cos n\pi\eta\left\{-A_n+B_n+\sum_m(-)^m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]\right\}$$

之と (8) 式と比較して

$$\left.\begin{aligned} u^0{}_n&=A_n+B_n+\sum_m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right] \\ u^1{}_n&=-A_n+B_n+\sum(-)^m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$u_n^i\to v_m^i$, $A_n\rightleftarrows A'_m$, $B_n\rightleftarrows B'_m, \rho_n\rightleftarrows\lambda_m$, 其他の $n\rightleftarrows m$ としても成立する。(11) より

$$\frac{1}{2}(u^0{}_n-u^1{}_n)=A_n+\sum_m\frac{1-(-)^m}{2}\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]$$

$$\frac{1}{2}(u^0{}_n+u^1{}_n)=B_n+\sum_m\frac{1+(-)^m}{2}\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]$$

$\frac{1}{2}(v^0{}_m\pm v^1{}_m)$ に對しても同型の式が得られる故，夫れより A_m', B_m' を上式に代入すれば，A_n, B_n が分離されて次式で與えられる。

$$\frac{1}{2}(u^0{}_n-u^1{}_n)-\frac{1-(-)^n}{2}\sum_m\frac{1}{2}(v^0{}_m-v^1{}_m)\frac{1-(-)^m}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)-\frac{1+(-)^n}{2}\sum_m\frac{1}{2}(v^0{}_m+v^1{}_m)\frac{1-(-)^m}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)$$

$$=A_n-\sum_l A_l\sum_m\frac{1-(-)^m}{2}\frac{h_m^l}{H}(\rho_l)\left[\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)\frac{1-(-)^n}{2}\frac{1-(-)^l}{2}+\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\frac{1+(-)^n}{2}\frac{1+(-)^l}{2}\right]$$

n の奇偶に分けて書くと A_k が奇偶に分離されるので便利である。

n : 奇數

$$\sum_{l:odd} A_l\left[\delta_n^l-\sum_{m:odd}\frac{h_m^l}{H}(\rho_l)\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)\right]=\frac{1}{2}(u^0{}_n-u^1{}_n)-\sum_{m:odd}\frac{1}{2}(v^0{}_m-v^1{}_m)\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)$$

n : 偶數

$$\sum_{l:even} A_l\left[\delta_n^l-\sum_{m:odd}\frac{h_m^l}{H}(\rho_l)\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]=\frac{1}{2}(u^0{}_n-u^1{}_n)-\sum_{m:odd}\frac{1}{2}(v^0{}_m+v^1{}_m)\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)$$

$$\delta_n^n=1.\ \ \delta_l^n=0.\ (n\neq l)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

B_l に對する表式は $A_l\to B_l$, $H(\rho_l)\to K(\rho_l)$, $m: odd\to m: even$, $\frac{1}{2}(u^0{}_n-u^1{}_n)\rightleftarrows\frac{1}{2}(u^0{}_n+u^1{}_n)$ 等として得られる。更に之等より A_m', B_m' は前述の變換 $A_l\rightleftarrows A_l'$ $B_l\rightleftarrows B_l'$, $u_n^i\rightleftarrows v_m^i, \rho\rightleftarrows\lambda$ 其他 $n\rightleftarrows m$ により得られる。

(12)式より A を求める事が問題であるが，この事は後に論ずるとして，今之が解けたとする。然らば B, A', B' も同様に求められる。從つて w_1 は u_n^i, v_m^i にて定められる事になる。

同様に四邊に於ける變位 0 の場合には (1) の解は，

$$\left.\begin{aligned} w_2=&\sum_n\left[C_n H'(\rho_n,\xi)/H''(\rho_n)+D_n K'(\rho_n,\xi)/K''(\rho_n)\right]\sin n\pi\eta \\ &+\sum_m\left[C'_m H'(\lambda_m,\eta)/H''(\lambda_m)+D'_m K'(\lambda_m,\eta)/K''(\lambda_m)\right]\sin m\pi\xi \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

とせば明らかに $u^i(\eta)=v^i(\xi)=0$ 故，確かに條件に適す。此の場合は w_1 の場合と全く平行に論じ得る。即，

$$\left.\begin{aligned} a\theta^0{}_n&=C_n+D_n-n\pi\sum_m m\pi\left[C'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)+D'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K''}(\lambda_m)\right]\\ a\theta'_n&=-C_n+D_n-n\pi\sum_m(-)^m m\pi\left[C'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)+D'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K''}(\lambda_m)\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

故に C_n は (12) 式に於て $A\to C$, $u_n^i\to a\theta_n^i$, $v_m^i\to b\phi_m^i$, $H\to H''$, $K\to K''$ $h_n^m\to -mn\pi^2 h_n^m$ として得られる。D, C', D' も之に對應するものから同樣な變換により得られる。

かくて四邊に於ける變位及び回轉が (8) 式の樣に與えられると (12) 式及び之より導かれた式にて $A, B, C, D, A', B', C', D'$ が定まり，之を用いる事によりこの場合の變位式は $w=w_1+w_2$ にて表わされる。故に之より M_n^i, F_n^i 等が求められる。

$$\left.\begin{aligned} &\sin m\pi\xi=\sum_n \varepsilon_n S_n^m\cos n\pi\xi \qquad \left[\varepsilon_0=\frac{1}{2},\ \varepsilon_n=1.\ n\geqq 1\right]\\ &\cos n\pi\xi=\sum_m S_n^m\sin m\pi\xi\\ &S_n^m=\frac{4m}{\pi(m^2-n^2)}\frac{1-(-)^{m+n}}{2} \qquad (m\neq n)\\ &\quad\ =0 \qquad (m=n)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \frac{M_n^i}{\varDelta}&=(-)^{i+1}A_n\left\{\frac{1}{a^2}\frac{H''}{H}(\rho_n)-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}-B_n\left\{\frac{1}{a^2}\frac{K''}{K}(\rho_n)-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\\ &\quad+\sum_m(-)^{im}\left\{A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right\}\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\\ &\quad-\frac{1}{a^2}\sum_l\left\{C_l\frac{H'''}{H''}(\rho_l)+(-)^{i+1}D_l\frac{K'''}{K''}(\rho_l)\right\}\varepsilon_n S_n^l\cdots\cdots\cdots(16)\\ \frac{F_n^i}{\varDelta}&=-\frac{1}{a^3}\sum_l\left\{A_l\frac{H'''}{H}(\rho_l)+(-)^{i+1}B_l\frac{K'''}{K}(\rho_l)\right\}S_l^n\\ &\quad+(-)^{i+1}C_n\left\{\frac{1}{a^3}\frac{H''''}{H''}(\rho_n)-\frac{2-\nu}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}-D_n\left\{\frac{1}{a^2}\frac{K''''}{K''}(\rho_n)-\frac{2-\nu}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\\ &\quad-\sum_m(-)^{im}\left\{C'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)+D'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K''}(\lambda_m)\right\}\frac{mn\pi^2}{a}\\ &\qquad\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\cdots\cdots\cdots(17)\end{aligned}$$

N_m^i, G_m^i に對する表式は之等の式に於て，$M_n^i\to N_m^i$, $F_n^i\to G_m^i$, $A_n\rightleftarrows A'_m$ 等. $a\rightleftarrows b$, $\rho_n\rightleftarrows\lambda_m$, $n\rightleftarrows m$ として得られる。

(15), (16) 式に (12) 式等から得られる A_n 等の値を入れる事により $M_n^i, N_m^i, F_n^i, G_n^i$ が u_n^i, $v_m^i, \theta_n^i, \phi_m^i$ で表わされる。從つて四邊が變位と回轉の場に於ける影響係數が定まる。

(10) 式に於て例えば $H(\rho_n)=0$ 等となる ρ_n が存在する場合はこのまゝでは用い得ない。例えば

$$H(\rho_{\bar n})=0 \quad \text{卽} \quad \sum_m h_m^{\bar n}(\rho_{\bar n})\frac{1-(-)^m}{2}=0 \qquad \text{の時}$$

$$\begin{aligned} w_1&=\sum_{n\neq\bar n}[A_n\ H(\rho_n\xi)/H(\rho_n)]+A_{\bar n}H(\rho_{\bar n},\xi)+\sum_n[B_n K(\rho_n,\xi)/K(\rho_n)]\\ &\quad+\sum_m[A'_mH(\lambda_m,\eta)/H(\lambda_m)+B'_mK(\lambda_m,\eta)/K(\lambda_m)]\end{aligned}$$

と置くと前の $A_{\bar n}$ の代りに $A_{\bar n}H(\rho_{\bar n})$ と置いた結果が得られる。但し A'_m, B'_m を定める式は $A_{\bar n}$ が入り，從つて $\sum$ には $\bar n$ に相當する項は落ちる。又 A_n を定める式に於て $A_{\bar n}$ に對しては $\delta_{\bar n}^i$ が無くなる。

§3 一邊又は隣接二邊が支持又は不傾の場合

この場合は §2 の結果が其のまゝ用い得る。

(1) $x=a$ が支持の時

§2 に於て a と書ける所を總て $2a$ と書き，

$$u_n^0=-u_n^1,\ \theta_n^0=\theta_n^1,\ v_{2m}^i=\phi_{2m+1}^i=0$$

と置けば直ちに，$B_n=C_n=A'_{2m}=B'_{2m}=C'_{2m+1}=D'_{2m+1}=0$

其他總て前の結果か用い得る。

（2） $x=a$ が不傾の時

§2 に於て a と書ける所を總て $2a$ と書き，

$$u_n^0=u_n^1,\ \theta_n^0=-\theta_n^1,\ v_{2m+1}^i=\phi_{2m}^i=0$$

と置けば，直ちに，$A_n=D_n=A'_{2m+1}=B'_{2m+1}=C'_{2m}=D'_{2m}=0$

其他總て前の結果が用い得る。

（3） $x=a, y=b$ が支持の時

§2 に於て a,b と書ける所を $2a$, $2b$ と書き，

$$u_{2n+1}^0=-u_{2n+1}^1,\ \theta_{2n}^0=\theta_{2n}^1,\ v_{2m+1}^0=-v_{2m+1}^1,\ \phi_{2m}^0=\phi_{2m}^1 \quad \text{其他總て } 0$$

と置けば，$A_{2n+1}, D_{2n}, A'_{2m+1}, D'_{2m}$ 以外は 0 となる。

（4） $x=a$, $y=b$ が不傾の時

§2 の a,b を $2a$, $2b$ と書き，

$$u_{2n}^0=u_{2n}^1,\ \theta_{2n+1}^0=\theta_{2n+1}^1,\ v_{2m}^0=v_{2m}^1,\ \phi_{2m+1}^0=-\phi_{2m},\ \text{其他總て } 0$$

と置けば，B_{2n}, C_{2n+1}, B'_{2m}, C'_{2m+1} 以外は總て 0 となる。

（5） $x=a$ が支持，$y=b$ が不傾

§2 の a,b を $2a$, $2b$ と書き，

$$u_{2n}^0=-u_{2n}^1,\ \theta_{2n+1}^0=\theta_{2n+1}^1,\ v_{2m+1}^0=v_{2m+1}^1,\ \phi_{2m}^0=-\phi_{2m}^1 \quad \text{其他總て } 0$$

と置けば A_{2n}, D_{2n+1}, B'_{2m+1}, C'_{2m} 以外は總て 0 となる。

尚本 § の場合 (8), (9) 式は適當に邊を延長して考えている事に注意を要す。

§4 自由邊のある場合

（1） $\xi=1$ が自由邊の場合

次の函數を定義す

$$\left.\begin{aligned}
P(\rho_n,\ \xi)&=\frac{\cosh\alpha\rho_n(1-\xi)}{\alpha\rho_n\sinh\alpha\rho_n}-\frac{\cosh\alpha\sigma_n(1-\xi)}{\alpha\sigma_n\sinh\alpha\sigma_n}\\
Q(\rho_n,\ \xi)&=\left[\left(\frac{\sigma_n}{c}\right)^2-(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{\cosh\alpha\rho_n\xi}{\alpha\rho_n\sinh\alpha\rho_n}\\
&\quad-\left[\left(\frac{\rho_n}{c}\right)^2-(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{\cosh\alpha\sigma_n\xi}{\alpha\sigma_n\sinh\alpha\sigma_n}\\
R(\rho_n,\ \xi)&=\left[\left(\frac{\sigma_n}{c}\right)^2-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{\sinh\alpha\rho_n\xi}{\sinh\alpha\rho_n}\\
&\quad-\left[\left(\frac{\rho_n}{c}\right)^2-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{\sinh\alpha\sigma_n\xi}{\sinh\alpha\sigma_n}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

之等の函數を用いて §2 に準じて行う。

$$\left.\begin{aligned}
P(\rho_n,\ \xi)&=\sum_m p_m^n(\rho_n)\cos m\pi\xi\\
Q(\rho_n,\ \xi)&=\sum_m q_m^n(\rho_n)\cos m\pi\xi\\
R(\rho_n,\ \xi)&=\sum_m r_m^n(\rho_n)\sin m\pi\xi\\
\text{但し，}\quad p_m^n(\rho_n)&=-\varepsilon_m 4\alpha^2k^2/\{(m\pi)^2+(\alpha\rho_n)^2\}\{(m\pi)^2+(\alpha\sigma_n)^2\}\\
q_m^n(\rho_n)&=(-)^{m+1}\varepsilon_m\alpha^2k^2\left[(m\pi)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2-\nu}{b^2}\right)+2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\Big/\\
&\qquad\left\{(m\pi)^2+(\alpha\rho_n)^2\right\}\left\{(m\pi)^2+(\alpha\sigma_n)^2\right\}\\
r_m^n(\rho_n)&=(-)^m 4\alpha^2k^2 m\pi\left[(m\pi)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\nu}{b^2}\right)+2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\Big/\\
&\qquad\left\{(m\pi)^2+(\alpha\rho_n)^2\right\}\left\{(m\pi)^2+(\alpha\sigma_n)^2\right\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

又前と同様に

$$P(\rho_n,0)=P(\rho_n),\quad Q(\rho_n,0)=Q(\rho_n),\quad R(\rho_n,0)=R(\rho_n)$$

等と置く，$P(\rho_n,1)\neq P(\rho_n)$ 等なる事注意を要す。

さて $\xi=0,\ \eta=0,1$ にて回轉 0, $\xi=1$ にて剪斷力 0 となる (1) 式の解は次式にて與えられる。

$$\left.\begin{aligned} w_1=&\sum_n\{A_n P(\rho_n,\xi)/P(\rho_n)+B_nQ(\rho_n,\xi)/Q(\rho_n)\}\cos n\pi\eta\\ &+\sum_m\{A'_mH(\lambda_m,\eta)/H(\lambda_m)+B'_mK(\lambda_m,\eta)/K(\lambda_m)\}\cos m\pi\xi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20.1)$$

係數 A, B, A', B' を定める式は，

$$\left.\begin{aligned} u_n^0=&A_n+B_n+\sum_m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)\right]\\ \frac{M^1{}_n}{\varDelta}=&-A_n\left[\frac{1}{a^2}\frac{P''(\rho_n,1)}{P(\rho_n)}-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\frac{P(\rho_n,1)}{P(\rho_n)}\right]-B_n\left[\frac{1}{a^2}\frac{Q''(\rho_n,1)}{Q(\rho_n)}\right.\\ &\left.-\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\frac{Q(\rho_n,1)}{Q(\rho_n)}\right]+\sum_m(-)^m\left[A'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H}(\lambda_m)\right.\\ &\left.+B'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K}(\lambda_m)\right]\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\\ v_m^0=&\sum_n\left\{A_n\frac{p_m^n}{P}(\rho_n)+B_n\frac{q_m^n}{Q}(\rho_n)\right\}+A'_m+B'_m\\ v_m^1=&\sum_n(-)^n\left\{A_n\frac{p_m^n}{P}(\rho_n)+B_n\frac{q_m^n}{Q}(\rho_n)\right\}-A'_m+B'_m\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21.1)$$

後の2式より A_m', B_m' を求め之を前の2式に入れると A_n, B_n が定まる。從つて A_m', B_m' も求められる。特に今の場合 $M^1{}_n=0$ とすれば良い。

$\xi=0, \eta=0,1$ にて變位 0, $\xi=1$ にて曲げ moment 0 となる。

（1） 式の解は

$$\begin{aligned} w_2=&\sum_n\{C_n P'(\rho_n,\xi)/P''(\rho_n)+D_n R(\rho_n,\xi)/R'(\rho_n)\}\sin n\pi\eta\\ &+\sum_m\{C'_mH(\lambda_m,\eta)/H''(\lambda_m)+D'_mK'(\lambda_m,\eta)/K''(\lambda_m)\}\sin m\pi\eta\cdots\cdots\cdots\cdots(20.2)\end{aligned}$$

として w_1 の時と同様に

$$\left.\begin{aligned} a\theta_n^0=&C_n+D_n-n\pi\sum m\pi\left[C'_m\frac{1-(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)+D'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)\right]\\ \frac{F_n^1}{\varDelta}=&-C_n\left[\frac{1}{a^3}\frac{P''''(\rho_n,1)}{P''(\rho_n)}-\frac{2-\nu}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\frac{P''(\rho_n,1)}{P''(\rho_n)}\right]-D_n\left[\frac{1}{a^3}\frac{R'''(\rho_n,1)}{R'(\rho_n)}\right.\\ &\left.-\frac{2-\nu}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\frac{R'(\rho_n,1)}{R'(\rho_n)}\right]-\sum_m(-)^m\left\{C'_m\frac{1-(-)^m}{2}\frac{h_n^m}{H''}(\lambda_m)\right.\\ &\left.+D'_m\frac{1+(-)^n}{2}\frac{h_n^m}{K''}(\lambda_m)\right\}\frac{m\pi}{a}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+(2-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\\ b\phi_m^0=&\sum_n n\pi\left[-C_n\frac{p_m^n}{P''}(\rho_n)m\pi+D_n\frac{r_m^n}{R'}(\rho_n)\right]+C'_m+D'_m\\ b\phi_m^1=&\sum_n(-)^n n\pi\left[-C_n\frac{p_m^n}{P''}(\rho_n)m\pi+D_n\frac{r_m^n}{R'}(\rho_n)\right]-C'_m+D'_m\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21.2)$$

前と同様にこの式より C, D, C', D' が定まる。今の場合特に $F^1{}_n=0$ とすれば良い。かくて $\xi=1$ が自由邊なる場合は $M^1{}_n=F^1{}_n=0$ として (21) 式により定めた係數 $A, B, \cdots\cdots$ を用いて殘りの邊の變位及び回轉にて振動狀態が定まる。即その變位は $w=w_1+w_2$ にて與えられる。この方法は $\xi=0$ が固定の時用いて便である。

（2） 普通の場合は場を對邊にて同じものに取ると便利である。即今の場合 $\xi=0,1$ 共に曲げ moment と剪斷力にとる。改めて次の函數を定義する。

$$\left.\begin{aligned}P(\rho_n,\xi)\\Q(\rho_n,\xi)\end{aligned}\right\}=\left[\left(\frac{\alpha\sigma_n}{a}\right)^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\left\{\begin{aligned}&\frac{\sinh(\alpha\rho_n/2)(1-2\xi)}{\alpha\rho_n\cosh(\alpha\rho_n/2)}\\ &\frac{\cosh(\alpha\rho_n/2)(1-2\xi)}{\alpha\rho_n\sinh(\alpha\rho_n/2)}\end{aligned}\right.$$

$$-\left[\left(\frac{\alpha\rho_n}{a}\right)^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\begin{cases}\dfrac{\sinh(\alpha\sigma_n/2)(1-2\xi)}{\alpha\sigma_n\cosh(\alpha\sigma_n/2)}\\ \dfrac{\cosh(\alpha\sigma_n/2)(1-2\xi)}{\alpha\sigma_n\sinh(\alpha\sigma_n/2)}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}R(\rho_n,\ \xi)\\ S(\rho_n,\ \xi)\end{matrix}\right\}=\left[\left(\frac{\alpha\sigma_n}{a}\right)^2-\nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\begin{cases}\dfrac{\cosh(\alpha\rho_n/2)(1-2\xi)}{\cosh(\alpha\rho_n/2)}\\ \dfrac{\sinh(\alpha\rho_n/2)(1-2\xi)}{\sinh(\alpha\rho_n/2)}\end{cases}$$

$$-\left[\left(\frac{\alpha\rho_n}{2}\right)^2-\nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\begin{cases}\dfrac{\cosh(\alpha\sigma_n/2)(1-2\xi)}{\cosh(\alpha\sigma_n/2)}\\ \dfrac{\sinh(\alpha\sigma_n/2)(1-2\xi)}{\sinh(\alpha\sigma_n/2)}\end{cases}$$

之等の函數は $\xi=\frac{1}{2}$ に對して對稱又は反對稱である。故に

$$P^{(r)}(\rho_n,0)=(-)^{r+1}P^{(r)}(\rho_n,1)\equiv P^{(r)}(\rho_n),\quad Q^{(r)}(\rho_n,0)=(-)^rQ^{(r)}(\rho_n,1)\equiv Q^{(r)}(\rho_n)$$

$$R^{(r)}(\rho_n,0)=(-)^{r+1}R^{(r)}(\rho_n,1)\equiv R^{(r)}(\sigma_n),\quad S^{(r)}(\rho_n,0)=(-)^rS^{(r)}(\rho_n,1)\equiv S^{(r)}(\rho_n)$$

$\xi=0,1$ にて剪斷力 $0,\eta=,1$ にて回轉 0 の時は

$$w_1=\sum_n\left\{A_nP(\rho_n,\xi)\Big/\left[\frac{1}{a^2}P''(\rho_n)-\nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2P(\rho_n)\right]\right.$$
$$\left.+B_nQ(\rho_n,\ \xi)\Big/\left[\frac{1}{a^2}Q''(\rho_n)-\nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2Q(\rho_n)\right]\right\}\cos n\pi\eta$$
$$+\sum_m[A'_mH(\lambda_m,\eta)/H(\lambda_m)+B'_mK(\lambda_m,\eta)/K(\lambda_m)]\cos m\pi\xi$$

$\xi=0,1$ にて曲げ moment $0,\eta=0,1,$ にて變位 0 の時は

$$w_2=\sum_n\left\{C_nR(\rho_n,\xi)\Big/\left[\frac{1}{a^2}R'''(\rho_n)-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2R'(\rho_n)\right]\right.$$
$$\left.+D_nS(\rho_n,\xi)\Big/\left[\frac{1}{a^2}S'''(\rho_n)-\nu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2S'(\rho_n)\right]\right\}\sin n\pi\eta$$
$$+\sum_m[C'_mH'(\lambda_m,\eta)/H''(\lambda_m)+D'_mK(\lambda_m,\eta)/K''(\lambda_m)]\sin m\pi\eta$$

之等の式を用い §2 と全く平行に論ずる事が出來る。卽之により，一對の對邊では曲げ moment, 剪斷力，他の對邊では變位，回轉が與えられた時の變位式が得られる。

一對の對邊が自由なる時，一對の對邊の一つが自由，他が支持又は不傾なる時に特に便である。後の場合には §3 に對應する方法を用いれば良い。

尙この場合にも (12) 式と同形の係數を定める式が得られる。

（3） 隣接二邊が自由なる時は (1) 又は (2) の方法を組合して解ける。

以上により，前論文と合せて面內應力の影響なき限りあらゆる場合の矩形平板構造物の振動が解ける譯である。

§5 實際問題への應用

§2 の (12) 式を嚴密に解く事は困難ではあるが，數値的には如何程でも精確に計算爲し得る。こゝでは近似表式を求める。卽各段數の第一項のみとる。之は友近博士の計算に於ける第一近似に相當する。博士の結果によると滿足すべきものとも思えぬが，精密計算への第一步として十分價値がある。特に振動數に對しては Rayleigh 法と反對にその下限を與える[1] 點有用である。但しこの近似式は高次の振動には用い得ない。

(12) 式より

$$\left.\begin{aligned}A_0&=\frac{\frac{1}{2}(u_0^0-u_0^1)-\frac{1}{2}(v_1^0+v_1^1)\frac{h_0^1}{K}(\lambda_1)}{1-\frac{h_1^0}{H}(\rho_0)\frac{h_0^1}{K}(\lambda_1)},\quad A_1=\frac{\frac{1}{2}(u_1^0-u_1^1)-\frac{1}{2}(v_1^0-v_1^1)\frac{h_1^1}{H}(\lambda_1)}{1-\frac{h_1^1}{H}(\rho_1)\frac{h_1^1}{H}(\lambda_1)}\\ B_0&=\frac{\frac{1}{2}(u_0^0+u_0^1)-\frac{1}{2}(v_0^0+v_0^1)\frac{h_0^0}{K}(\lambda_0)}{1-\frac{h_0^0}{K}(\rho_0)\frac{h_0^0}{K}(\lambda_0)},\quad B_1=\frac{\frac{1}{2}(u_1^0+u_1^1)-\frac{1}{2}(v_0^0-v_0^1)\frac{h_1^0}{H}(\lambda_0)}{1-\frac{h_0^1}{K}(\rho_1)\frac{h_1^0}{H}(\lambda_0)}\end{aligned}\right\}.$$

1) この事は友近博士の2論文は內容的には實は同じである事より明かである。精くは附錄2參照。

$$C_1=\frac{\frac{a}{2}(\theta_1^0-\theta_1^1)+\frac{b}{2}(\phi_1^0-\phi_1^1)\frac{\pi^2h_1^1}{H''}(\lambda_1)}{1-\pi^4\frac{h_1^1}{H''}(\rho_1)\frac{h_1^1}{H''}(\lambda_1)},\quad C_2=\frac{\frac{a}{2}(\theta_2^0-\theta_2^1)+\frac{b}{2}(\phi_1^0+\phi_1^1)\frac{2\pi^2h_2^1}{K''}(\lambda_1)}{1-4\pi^4\frac{h_1^2}{H''}(\rho_2)\frac{h_2^1}{K''}(\lambda_1)}$$

$$D_1=\frac{\frac{a}{2}(\theta_1^0+\theta_1^1)+\frac{b}{2}(\phi_1^0-\phi_1^1)\frac{2\pi^2h_1^2}{H''}(\lambda_2)}{1-4\pi^4\frac{h_2^1}{K''}(\rho_1)\frac{h_2^1}{H''}(\lambda_2)},\quad D_2=\frac{\frac{a}{2}(\theta_2^0+\theta_2^1)+\frac{b}{2}(\phi_2^0+\phi_2^1)\frac{4\pi^2h_2^2}{K''}(\lambda_2)}{1-16\pi^4\frac{h_2^2}{H''}(\rho_2)\frac{h_2^2}{K''}(\lambda_2)}$$

A' 等の表式は $n\rightleftarrows v$, $\theta\rightleftarrows\phi$, $a\rightleftarrows b$, $\lambda\rightleftarrows\rho$ として得られる。之を(16), (17)式に入れると變位回轉の場が定まる。

但し

$$H(\rho_n)=\frac{1}{\alpha\rho_n}\tanh\frac{\alpha\rho_n}{2}-\frac{1}{\alpha\sigma_n}\tanh\frac{\alpha\sigma_n}{2}$$

$$K(\rho_n)=\frac{1}{\alpha\rho_n}\coth\frac{\alpha\rho_n}{2}-\frac{1}{\alpha\sigma_n}\coth\frac{\alpha\sigma_n}{2}$$

$$H''(\rho_n)=\alpha\rho_n\tanh\frac{\alpha\rho_n}{2}-\alpha\sigma^n\tanh\frac{\alpha\sigma^n}{2}$$

$$K''(\rho_n)=\alpha\rho_n\coth\frac{\alpha\rho_n}{2}-\alpha\sigma_n\coth\frac{\alpha\sigma_n}{2}$$

$$H'''(\rho_n)=-(\alpha\rho_n)^2+(\alpha\sigma_n)^2=-2(\alpha k)^2=K'''(\rho_n)$$

$$H''''(\rho_n)=(\alpha\rho_n)^3\tanh\frac{\alpha\rho_n}{2}-(\alpha\sigma_n)^3\tanh\frac{\alpha\sigma_n}{2}$$

$$K''''(\rho_n)=(\alpha\rho_n)^3\coth\frac{\alpha\rho_n}{2}-(\alpha\sigma_n)^3\coth\frac{\alpha\sigma_n}{2}$$

之を用いて前論文に示した樣に夫々の問題を扱えば良い。但し $H(\rho_n)$, $H''(\rho_n)$ 等は 0 にならぬとする。その場合は §2 の最後の注意により多少 modify すれば良い。

1. 四邊固定の矩形板の固有振動數

最低次。例えば $C_1\to\infty$ となる事より，振動數方程式

$$1-\pi^4\frac{h_1^1}{H''}(\rho_1)\frac{h_1^1}{H''}(\lambda_1)=0$$

之は正方形板につき友近博士の得られたものと同じで，その場合のこの式の根は博士により與えられている。(航研報告) 即 $k^{12}=3.6043\,\pi^2$ にて之は同博士の與えられた精密解 $3.6462\,\pi^2$ と倚隔る事大なるも，近似解としては十分價値がある。

y 軸に平行な節線一本有する時 $D_1\to\infty$ より

$$1-4\pi^4\frac{h_2^1}{K''}(\rho_1)\frac{h_1^2}{H''}(\lambda_2)=0$$

x 軸に平行な節線を一本有する時 $C_2\to\infty$ より

$$1-4\pi^4\frac{h_1^2}{H''}(\rho_2)\frac{h_2^1}{K''}(\lambda_1)=0$$

x, y 軸に平行な節線各一本有する時 $D_2\to\infty$ より

$$1-16\,\pi^4\frac{h_2^2}{H''}(\rho_2)\frac{h_2^2}{K''}(\lambda_2)=0$$

振動數方程式は勿論 B_0, A_0, B_1, $A_1\to\infty$ となる條件からも得られ，嚴密な場合には上記と常數係數を除いて一致すべきである。

2. 中央に x, y 軸に平行な上下對稱な梁を有する正方形板の固有振動數——最低次の

$u_0^1=v_0^1$, $u_1^1=v_1^1$ 其他總て 0 として，

$$\left\{A_n\frac{H'''}{H}(\rho_n)+B_n\frac{K'''}{K}(\rho_n)\right\}+\left\{\frac{WAp^2}{g}-EI\left(\frac{u\pi}{b}\right)^2\right\}u_n=0.\qquad(n=1.2)$$

より u_0^1, u_1^1 の係數の行列式 $=0$ として振動數方程式

$$\left[-\frac{\dfrac{H'''}{H}(\rho_0)}{1-\dfrac{h_1^0}{H}(\rho_0)\dfrac{h_0^1}{K}(\rho_1)}+\frac{\dfrac{K'''}{K}(\rho_0)}{1+\dfrac{h_0^0}{K}(\rho_0)}+\frac{Wa^3Ap^2}{g\Delta}\right]$$

$$\times\left[-\frac{\dfrac{H'''}{H}(\rho_1)}{1+\dfrac{h_1^1}{H}(\rho_1)}+\frac{\dfrac{K'''}{K}(\rho_1)}{1-\dfrac{h_0^1}{K}(\rho_1)\dfrac{h_1^0}{H}(\rho_0)}+\frac{Wa^3Ap^2}{g\Delta}-\frac{\pi^2a^3EI}{b^2\Delta}\right]$$

$$+\frac{\dfrac{h_0^1}{K}(\rho_1)}{1-\dfrac{h_1^0}{H}(\rho_0)\dfrac{h_0^1}{K}(\rho_1)}\cdot\frac{\dfrac{h_1^0}{H}(\rho_0)}{1-\dfrac{h_0^1}{K}(\rho_1)\dfrac{h_1^0}{H}(\rho_0)}=0$$

3. 强制振動の場合は前論文文獻3と同様に扱える。

本論文を草するに當り絕えず御激勵賜まわりたる吉識教授に厚く感謝致します。

附錄 1. 參考文獻

1) The Transverse Vibration of a Square Plate clamped at Four Edges. By S. Tomotika. Phil. Mag. XXI. (1936) p.745-760

2) 正方形平板の横振動に就て
友近晉 航研報告 10 卷第 11 册 129 號 (昭 10.9) p.299-328

3) Die erzwungen Schwingungen der rechteckigen Platten von S. Iguchi Ing. Arch. XI (1940) 1. p. 53-72
函數 $H.K.$ はこの論文より得た。

4) 振動學，妹澤克惟 p. 130-138，又は航研報告 70. (1931) 昭 6.4. (p.61-70)

5) 平面構造物の振動に就て 會報(昭 21.5) 著者

6) 矩形平板構造物の振動に就て 會報 (昭 22.11) 著者

附 錄 2.

本論文にて取りたる各邊に於ける量の Fourier 成分を隣接邊の夫れと一致せしめる思想は文獻 1,3 に於いて夫等のあるものを0に等置する思想の單なる一般化である。文獻4にてとられた邊上の特定の點に於けるある量を0にする方法も全く同様の思想であつて，前者の場合 Fourier 成分を，一般に任意の完全直交函數系による展開成分を總て取る時，後者に於ては變位函數を連續函數に限りながら，點を邊上一様に密に無限に (abzählbar で良い) とる時嚴密解に一致する。兩者は同程度の近似を與えるが，前者の方が formulate するにより便な點優る。近似を一段進める時，前者では夫迄の結果を用い得るに反し，後者では初めから出發せねば前者と同程度の近似は得られぬ。

文獻2は上述の意味附けに過ぎない。吾々は無限行列，無限級數を取扱うに際し，之を眞に嚴密に扱う事は出來ぬ。即ち重要なる初めの數項のみをとつて近似する。之はこの特定の項に相當する量のみ拘束され他は自由な場合の嚴密解である譯で，當然前者の嚴密解による振動數は後者の夫れより低くはない。この點，妹澤氏の文獻4に與えた振動數の値は正しくない様に思われる。

附 錄 3.

本文 (12) 式に相當する無限一次式は形式的には簡單に解ける。竹內氏又は日高氏の積分方程式の Fredholm の積分方程式の項又は Kowalevski の Determinant Theorie の Fredholm 行列式の項に精しい。結果のみ記すると次の様になる。

$\sum_l(\delta_n^l-a_n^l)x_l=b_n$ の解は

$$x_l=\frac{1}{D}\sum_n D_l^n b_n$$

但し

$$D=|\delta^l_n-a^l_n|=1-\frac{1}{1!}\sum_i a^i_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\begin{vmatrix} a^i_i, & a^i_j \\ a^j_i, & a^j_j \end{vmatrix}-\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\begin{vmatrix} a^i_i, & a^i_j, & a^i_k \\ a^j_i, & a^j_j, & a^j_k \\ a^k_i, & a^k_j, & a^k_k \end{vmatrix}+\cdots\cdots$$

$$D^l_l=1-\frac{1}{1!}\sum_{i\neq l} a^i_l+\frac{1}{2!}\sum_{i,j\neq l}\begin{vmatrix} a^i_i, & a^i_j \\ a^j_i, & a^j_j \end{vmatrix}-\cdots\cdots$$

$$D^n_l=a^l_n-\frac{1}{1!}\sum_i\begin{vmatrix} a^l_n, & a^l_i \\ a^i_n, & a^i_i \end{vmatrix}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\begin{vmatrix} a^l_r, & a^l_i, & a^l_j \\ a^i_r, & a^i_i, & a^i_j \\ a^j_r, & a^j_i, & a^j_j \end{vmatrix}-\cdots\cdots(n\neq l)$$

尙 §2 の最後に述べた注意の場合現われる方程式は上記に似たもので，その解法はやはり竹內氏の書物に出ている。