

(昭和 19 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

棒の横振動に対する回転慣性及び 剪断力の影響に就て

正員 工 学 士 金 沢 武*

第 1 章 緒 言

棒の横振動を表わす微分方程式は通例回転慣性及び剪断力の影響を無視している。之は棒の横断寸法と長さとの比が小さい場合には差支がないのであるが、然らざる場合及び振動が高次になり振動する部分が細分されるにつれて、之等に依る修正を考慮する必要がある。殊に剪断力の影響については両端支持の均一断面棒についての Timoshenko¹⁾ 氏の研究、及び両端自由の均一断面棒についての Goens 氏²⁾ の研究によると、その振動数に及ぼす影響は回転慣性に依るものよりも大である。筆者は先に断面が任意に変化する棒の回転慣性の影響について Cowly-Levy 氏の方法によつて研究を試みたのであるが³⁾、本論文に於ては同じ方法に依つて剪断力の影響をも考慮に入れて見たのである。

第 2 章 微分方程式及び境界条件

棒の軸線に沿つて x 軸をとり、 y 軸を棒の撓み面内に x 軸に垂直にとる。剪断力を無視した場合の撓み曲線の傾斜を ψ 、又同じ断面の剪断角を β で表わすと、傾斜の総量は、

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \beta \quad (1)$$

$$\text{位置の勢力は、} V = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int k' AG \beta^2 dx \quad (2)$$

但し E : 材料の young 率 G : 剪断弾性係数

k' : 断面の形状に関する常数 A : 断面積

I : 断面の撓み面に垂直なる軸のまわりの慣性モーメント

$$\begin{aligned} \text{故にその変分は } \delta V &= \int EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \int k' AG \beta \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) dx \\ &= \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right] - \int \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi dx + [k' AG \beta \delta y] - \int \frac{\partial}{\partial x} (k' AG) \delta y dx \\ &\quad - \int k' AG \beta \delta \psi dx \end{aligned} \quad (3)$$

一方加速度の Virtual moment は、 ρ を単位体積当りの密度として

$$\delta T = \int \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx + \int \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \delta \psi dx \quad (4)$$

之より運動の変分方程式は、

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (k' AG \beta) \right\} \delta y dx + \int \left\{ I \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - k' AG \beta - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} \delta \psi dx \\ &+ \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right] + [k' AG \beta \delta y] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

但し積分は棒の長さ全体にわたつて行うものであり、積分された項の $[]$ は両端に於ける値の差を示すもので

* 東京帝国大学第 2 工学部大学院特別研究生

(1) Timoshenko: Phil. mag. Vol. 41. p. 744. Vol. 43. p. 125.

(2) E. Goens: Ann. der Phys. Bd. 11. 1931.

(3) 金沢 武: 未発表

ある。

之より棒の各点に於て満足されるべき方程式として、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k' AG \beta = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k' AG \beta) = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7)$$

を得る。

(1), (6), (2), より断面及び弾性係数が一様な場合には ψ , β を消去すると、

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{EI \rho}{k' G} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I \frac{\rho}{k' G} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

となり之は Timoshenko に依つて求められた式と一致する。扱て (1), (6), (7), より ψ , y を消去すると、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x)u) \right\} \right] + A \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{du}{dx} \right) \\ & + Q f(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x)u) \right\} + A Q f(x) u - \Pi g(x) u = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{但し } \frac{x}{l} \equiv x, \quad I \equiv I_0 f(x), \quad A \equiv A_0 g(x)$$

$$\beta \equiv u \cdot e^{i \nu t}$$

$$A \equiv \frac{\rho \dot{p}^2 l^3}{k' G}, \quad Q \equiv \frac{\rho \dot{p}^2 l^2}{E}, \quad \Pi \equiv \frac{\rho \dot{p}^2 A_0 l^4}{EI_0}$$

とする。

又 $y = y' e^{i \nu t}$ として y' の代りに y とかくと (7) は

$$y = - \frac{1}{A g(x)} \frac{d}{dx} (g(x)u) \quad (9)$$

(7) と (8) より y' が求まる。次に境界条件は (5) より

$$k' AG \beta \delta y = 0, \quad EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi = 0$$

$$\text{或は } k' AG u, \delta y = 0, \quad EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi = 0 \quad (10)$$

之より自由端に於ては δy , $\delta \psi$ は任意である故

$$u = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

支持端では u , $\partial \psi$ は任意にとれることから

$$\delta y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

固定端に於ては同様に、

$$\delta y = 0, \quad \delta \psi = 0 \quad (13)$$

となる。或は (1) を用いて書き直すと、

$$\text{自由端 : } u = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0 \quad (14)$$

$$\text{支持端 : } y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0 \quad (15)$$

$$\text{固定端 : } y = 0, \quad \frac{dy}{dx} - u = 0 \quad (16)$$

以上の境界条件と運動方程式から回転慣性及び剪断力の影響が求められる⁽⁴⁾。

(4) Timoshenko が両端支持の場合について剪断力及び回転慣性の影響を求めて居るが、之の際境界条件を両端に於て、

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

としているが之は、 $y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0$ とすべきものである。

第3章 微分方程式の解法及び振動数方程式

微分方程式を解くに当り筆者が先に回転慣性の影響を求めた時と同様にして、Cowly-Levy⁽⁵⁾氏の方法を応用する。

即ち u が固有値 Π , A , Ω の整級数に展開出来るものとして先ず

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \Omega^l u_l \text{ として (8) に代入すると}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Omega^l \left[\frac{d}{dx} \left\{ f(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_l) \right) \right\} + A \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{du_l}{dx} \right) - \Pi g(x) u_l + A f(x) u_{l-1} + f(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_{l-1}) \right\} \right] = 0$$

茲に $(u_{l-1})_{l=0} = 0$ とする。

之の式が Ω の値如何に拘らず成立するためには

$$\frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ g(x) \frac{d}{dx} (g(x) u_l) \right\} \right] + A \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{du_l}{dx} \right) - \Pi g(x) u_l + A f(x) u_{l-1} + f(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_{l-1}) \right\} = 0$$

更に $u_l = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi^m u_{l,m}$, $u_{lm} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} u_{l,m,n}$ において同様にして

$$\frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ g(x) u_{l,m,n} \right\} \right] + \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{du_{l,m,n-1}}{dx} \right) + f(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_{l-1,m,n}) \right\} - g(x) u_{l,m-1,n} + f(x) u_{l-1,m,n-1} = 0 \quad (17)$$

茲に $(u_{l-1,m,n})_{l=0} = (u_{l,m-1,n})_{m=0} = (u_{l,m,n-1})_{n=0} = (u_{l-1,m,n-1})_{l=0, n=0} = 0$ (18)

とす。

又 (17) より $\frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ g(x) \frac{d}{dx} g(x) u_{000} \right\} \right] = 0$

$$\therefore u_{000} = -A \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} - B \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx - C \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx - D \frac{1}{g(x)} \quad (19)$$

但し A, B, C, D は積分常数である。

一方 (17) を積分すれば

$$u_{l,m,n} = \mathfrak{U}(u_{l-1,m,n}) + \mathfrak{B}(u_{l,m-1,n}) + \mathfrak{C}(u_{l,m,n-1}) + \mathfrak{D}(u_{l-1,m,n-1}) \quad (20)$$

但し, $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ は次式であたえられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(\phi) &= -\frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} \int_{\delta}^x dx \cdot f(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) \phi) \right\} \\ \mathfrak{B}(\phi) &= \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} \int_{\delta}^x dx \cdot g(x) \phi \\ \mathfrak{C}(\phi) &= -\frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x dx \cdot \frac{d\phi}{dx} \\ \mathfrak{D}(\phi) &= -\frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} \int_{\delta}^x dx \cdot f(x) \cdot \phi \end{aligned} \quad (21)$$

書きかえると $u_{l,m,n} = \Omega^l \Pi^m A^{n+1} P_{l,m,n} \cdot u_{000}$

(5) Cowly-Levy: Phil mag. Vol. 41 (1921)

なお回転慣性, 剪断力を考慮しない場合の任意断面梁の問題を高橋利衛氏が同様な方法でといて居る。

之の時には, $y = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi^m y_m$ として居るので結局本論文中の $\Omega = A = 0$ の場合に相当するものである。

日本航空学会誌 昭 18.7

$$\therefore u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^{n+1} P_{l \cdot m \cdot n} u_{000} \quad (22)$$

茲に

$P_{l \cdot m \cdot n} = (l \text{ への } \mathcal{U}, m \text{ への } \mathcal{B}, n \text{ への } \mathcal{C} \text{ の順列の和})$

$+ \frac{1}{2} (l \text{ への } \mathcal{U}, m \text{ への } \mathcal{B}, n \text{ への } \mathcal{C} \text{ の順列中 } \mathcal{UC}, \mathcal{CU}, \text{ を } \mathcal{D} \text{ にて, おきかえたものの和})^*$

$$P_{000} = 1 \quad (24)$$

である。(9)を用いて

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-) Q^l \Pi^m A^n \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) P_{l \cdot m \cdot n} u_{000})$$

然るに u_{000} は (19) であたえられる故

$$\begin{aligned} y = & A \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^n \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} \left(g(x) P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} \right) \\ & + B \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^n \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} \left(g(x) P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \right) \\ & + C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^n \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} \left(g(x) P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \right) \\ & + D \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^n \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} \left(g(x) P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

之が運動方程式の一般解である。或は

$$y = Ay_1(x) + By_2(x) + Cy_3(x) + Dy_4(x) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &= A \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_1) + B \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_2) + C \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_3) \\ &+ D \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_4) \end{aligned} \quad (27)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_1) \\ y_2(x) &= \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_2) \\ y_3(x) &= \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_3) \\ y_4(x) &= \frac{1}{\Lambda g(x)} \frac{d}{dx} (g(x) u_4) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^{n+1} P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x \frac{dx}{f(x)} \\ u_2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^{n+1} P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x dx \\ u_3 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^{n+1} P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \int_{\delta}^x g(x) dx \\ u_4 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q^l \Pi^m A^{n+1} P_{l \cdot m \cdot n} \frac{1}{g(x)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

次に振動数方程式を出してみる。

先ず $x=\delta$ で固定された $x=1$ で自由な片持梁を考えると境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x=\delta : y=0, \quad \frac{dy}{dx} - u &= 0 \\ x=1 : y=0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

* 例えば $P_{101} = \mathcal{UC} + \mathcal{CU} + \mathcal{D}$

$P_{111} = \mathcal{UB} + \mathcal{UCB} + \mathcal{B CU} + \mathcal{B UC} + \mathcal{CU B} + \mathcal{CB U} + \mathcal{D B} + \mathcal{B D}$

$x=\delta$ の条件の最初の式より

$$(y_1)_{x=\delta} (y_2)_{x=\delta} (y_3)_{x=\delta} = 0, (y_4)_{x=\delta} \neq 0 \\ \therefore D=0$$

又後の式より

$$\left(\frac{dy_1}{dx} + u_1 \right)_{x=\delta} = \left(\frac{dy_3}{dx} + u_3 \right)_{x=\delta} = 0, \left(\frac{dy_1}{dx} + u_1 \right)_{x=\delta} \neq 0 \\ \therefore A=0$$

$$\therefore y = By_2(x) + Cy_3(x)$$

$x=1$ に於ける条件を代入して

$$\left. \begin{aligned} B[u_2(x)]_{x=1} + C[u_3(x)]_{x=1} &= 0 \\ B \left[\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} \right]_{x=1} + C \left[\frac{d^2 y_3}{dx^2} + \frac{du_3}{dx} \right]_{x=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

故に振動数方程式は

$$\left[u_2 \left(\frac{d^2 y_3}{dx^2} + \frac{du_3}{dx} \right) - u_3 \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} \right) \right]_{x=1} = 0 \quad (32)$$

となる。

次に両端支持の場合は境界条件は

$$x=\delta, x=1 : y=0, \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0 \quad (33)$$

なる故前と同様にして

$$\left[y_2 \left(\frac{d^2 y_4}{dx^2} + \frac{du_4}{dx} \right) - y_4 \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} \right) \right]_{x=1} = 0 \quad (34)$$

なる式が得られる。

他の境界条件の場合も容易に振動数方程式が得られる。

第4章 数 値 計 算 例

上に求めた振動数方程式を用いて数値計算を試みて見る。 u_2, u_3, u_4 等を求める際の積分の下限 δ は如何に小さくともよいのであるから $\delta=0$ として計算を行う。断面一様なる片持梁の場合には、 $f(x)=g(x)=1$ となり振動数方程式は高次の項を省略して

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}(\varrho + A) - \pi \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{20}(\varrho + A) \right\} + \pi^2 \left\{ \frac{1}{7!} - \frac{48}{10!}(\varrho + A) \right\} - \pi^2 \left\{ \frac{32}{12!} \right. \\ \left. - \frac{256}{14!}(\varrho + A) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

之より $\nu \equiv \pi$ として π^2 以上を省略して第一近似値：

$$\nu = 1.861 \{ 1 - 0.09165(\varrho + A) \} \quad (36)$$

を得る。 $\varrho = A = 0$ とすると $\nu = 1.861$ となり、之を正確な値 1.875 に比して +0.7% の誤差がある。

π^2 の項をも考えに入れて第二近似値：

$$\nu = 1.874 \{ 1 - 0.09375(\varrho + A) \} \quad (37)$$

を得る。之は $\varrho = A = 0$ とおくと $\nu = 1.874$ となり、正確な値との誤差は +0.05% にすぎない。之等 $\varrho = A = 0$ の時の ν の値はすでに高橋氏に依つて得られている。

次に第二次振動数を求めるには、

$$\begin{aligned} \pi \left\{ \frac{1}{7!} - \frac{48}{10!}(\varrho + A) \right\} = \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{90}(\varrho + A) \right\} - \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\varrho + A) \right\} + \pi^2 \left\{ \frac{32}{12!} \right. \\ \left. - \frac{257}{14!}(\varrho + A) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

之より第二近似値として

$$\nu = 4.649 \{ 1 - 0.01785(\varrho + A) \} \quad (39)$$

$\Omega = A = 0$ とすれば $\nu = 4.649$ 之は正確な値 $\nu = 4.694$ に比し誤差は $+0.1\%$ にすぎない。今回転慣性、剪断力の影響を考慮しない時の ν を ν_0 で表わすと

$$\text{第一次振動では } \frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 1.15714 \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} \right) \quad (40)$$

$$\text{第二次振動では } \frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 8.33280 \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} \right) \quad (41)$$

となる。茲に κ は断面の回転半径である。

矩形断面 $\left(\kappa' = \frac{5}{6} \right)$ 円形断面 $\left(\kappa' = \frac{9}{10} \right)^*$ について計算すると、 $G = \frac{3}{8} E$ として

	第一次振動	第二次振動
矩形断面	$1 - 4.8600 \left(\frac{k}{l} \right)^2$	$1 - 34.9978 \left(\frac{k}{l} \right)^2$
円形断面	$1 - 4.5857 \left(\frac{k}{l} \right)^2$	$1 - 33.0226 \left(\frac{k}{l} \right)^2$

次に両端支持の均等断面棒について考えて見る。

前と同様にして振動数方程式は高次の項を省略して $\frac{\nu}{\nu_0}$ を第二近似まで求めると

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 2.25405 \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} \right) \quad (42)$$

又 $\Omega = A = 0$ とすると $\nu = 3.133$ 正確な値 $\nu = \pi (= 3.141 \dots)$ に比し誤差は 0.25% である。Timoshenko に依つて求められた値

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 2.4674 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{E}{\kappa' G} \right) \quad (43)$$

と比べてよくあつて居ることが分る。併し Timoshenko は先にも述べた如く境界条件を $y=0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ とし
てあるが、之は明らかに $y=0$, $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 0$ とすべきものである。修正の項の係数の相違は之の境界条件によるものと考えられる。

$$\text{矩形断面では, } \frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 9.46701 \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2$$

$$\text{円形断面では, } \frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 8.93271 \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2$$

となる。

扱て断面一様ならざる場合の例として慣性モーメント断面積が夫々 x^m , x^n ($x \leq 1$, $m \geq 0$, $n \geq 0$) に比例して変化する如き片持梁を考え第2近似までとると

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - A_{mn} \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 - B_{mn} \frac{E}{\kappa' G} \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 \quad (44)$$

$$\text{但し } \nu_0^4 = \frac{1}{2} (1+n)(2+n)(3+n)(4+n-m) U_{mn}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{m \cdot n} &= \frac{1}{4} \nu_0^4 V_{m \cdot n} \\ B_{m \cdot n} &= \frac{1}{4} \nu_0^4 W_{m \cdot n} \\ V_{m \cdot n} &= \frac{1}{U_{m \cdot n}} \left[3 L_{m \cdot n} - \frac{1}{2(1+m)} \right] \times (U_{mn} - 1) + L_{mn} \\ W_{m \cdot n} &= \frac{1}{U_{m \cdot n}} \left[3 M_{m \cdot n} - \frac{1}{2(1+n)} \right] \times (U_{mn} - 1) + M_{mn} \\ U_{m \cdot n} &= 1 + \frac{(1+n)(3+n)}{4(3+n-m)(5+n-m)} + \frac{(1+n)^2(2+n)(3+n)(4+n-m)}{4(5+n-m)(6+2n-m)(7+2n-m)(8+2n-2m)} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

* E. Goens: Ann. der phys. Bd. 11. 1931.

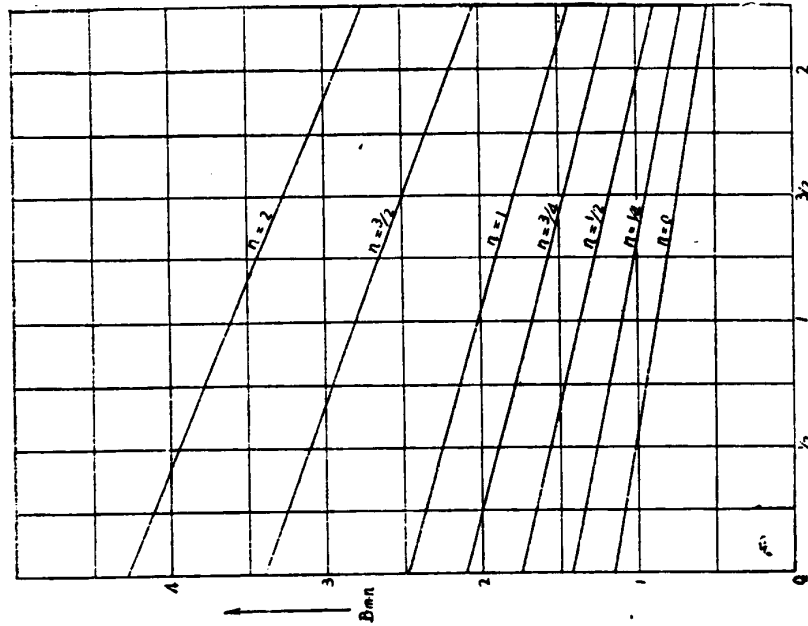


Fig. 3.

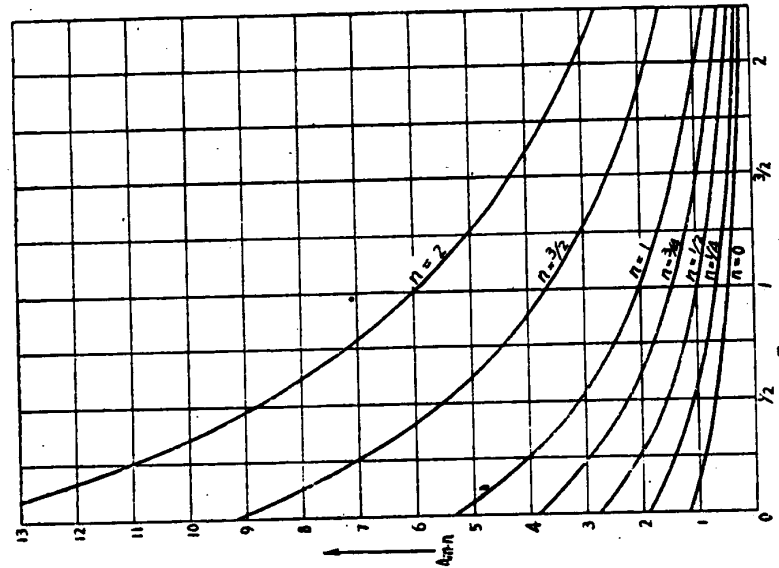


Fig. 2.

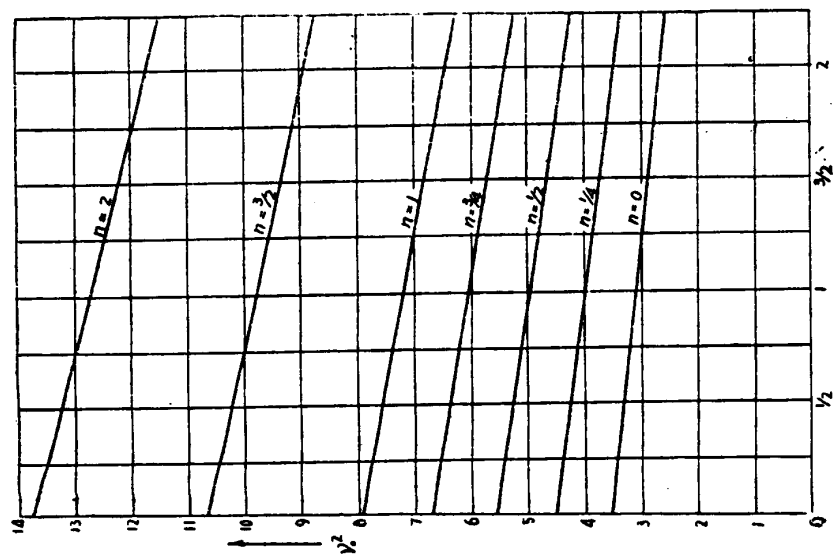


Fig. 1.

$$\begin{aligned}
& \times \frac{m(1+n)(2+n)(3+n)^2(4+n-m)}{4(3+n-m)(5+2n-m)(6+2n-m)(7+2n-m)(7+2n-2m)} \\
& - \frac{(1+n)(2+n)(3+n)^2(4+n-m)}{4(3+n-m)(5+2n-m)(6+2n-m)(8+2n-2m)} \\
L_{m,n} = & \frac{1}{2(1+m)} + \frac{(1+n)}{2(5+n)(6+n-m)} + \frac{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n-m)}{12(4+n)(5+n)(6+n-m)(1+m)} \\
& - \frac{(3+n)(4+n-m)}{2(3+n-m)(4+n)(6+n-m)} - \frac{(3+n)(1+n-m)}{12(3+n-m)(1+m)} \\
M_{m,n} = & \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+n)} + \frac{(3+n)}{2(3+n-m)(5+2n-m)(6+n-m)} \\
& - \frac{(3+n)(4+n-m)}{6(2+n)(3+n-m)} - \frac{(n^2+13n+24)(4+n-m)}{12(4+n)(5+n)(6+n-m)}
\end{aligned}$$

$n, m=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2$ の場合につき夫々 $v_0^2 A_{m,n}, B_{m,n}$ を計算して図示すると第1図, 第2図, 第3図の如くなる。

第5章 結 語

以上に於て, 任意断面棒の横振動に対する回転慣性及び剪断力の影響を考慮して見たのであるが, その結果次のことが分る。

(1) 回転慣性及び剪断力に依る修正は, いずれも $\left(\frac{\kappa}{l}\right)^2$ に比例する。故に $\left(\frac{\kappa}{l}\right)^2$ が小さい時には之等の影響は無視出来るが然らざる場合には考慮する必要がある。

(2) 振動が高次になるにつれて $\left(\frac{\kappa}{l}\right)^2$ の係数は大となり, 従つて修正が必要となる。このことは高次の振動では棒の振動する部分が細くなり, 結果に於て $\left(\frac{\kappa}{l}\right)^2$ が大となつたと同じであることを考えると当然のことである。

(3) 回転慣性, 剪断力の影響は恒に振動数を減ずるごとくに作用するものである。

終りに恒に不変らずの御指導を賜つた井口教授, 原田助教授に対して厚く御礼申し上げます。又本計算を遂行するに努力された井桁, 伊東両嬢の努力によること再度の戦災による原稿整理に手伝われた三平嬢に感謝の意を表するものである。