

(昭和 43 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

平板の曲げ振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について (Ⅲ)

(複雑な平板座屈問題解法の一手法)

正員 吉 識 雅 夫* 正員 川 井 忠 彦**
正員 大 坪 英 臣***

On the Method of Application of Energy Principles to Problems of Elastic Plates (III)
(A Method of Solution on the Complicated Plate Buckling Problems)

By Masao Yoshiki, *Member*
Tadahiko Kawai, *Member*
Hideomi Otsubo, *Member*

Summary

Applying the general method of solution developed in the first paper of this study, buckling problems of elastic plates are treated extensively in this paper.

To reduce the labour of numerical calculations, the double integrations of various energy terms are transformed into the simpler line integrals by means of Gauss' Theorem and application of these formulae are generally proved very effective in energy approach of plate problems by several examples, especially in the case of polygonal plates.

Using the stress distribution determined by the finite element method, the buckling problem of a perforated square plate under uniaxial compression is studied by the method of numerical calculation.

1 緒 言

第一報⁽¹⁾において薄い弾性平板問題の Rayleigh-Ritz の方法による一般的解析法を展開したが、実際の数値解析において種々のエネルギー項に関する二重積分の計算が所要計算時間の大部分を占め、多大の労力を必要とすることを痛感した⁽²⁾。そこでこれらのエネルギー積分を一般的にしかも精度を落さず実行する方法について検討し、よく知られた Gauss の定理を用いて二重積分を境界線に沿った線積分に変換することにより、その難点を解決し得ることがわかった。これにより積分領域の形状が複雑な場合も自動的に計算できるようになった。

一方最近とみに盛んになってきた有限要素法において、平面応力場の解析に関しては現在最も実用的な方法であると一般に認められているが⁽⁴⁾⁽⁵⁾、平板の曲げ問題においては有限要素の剛性マトリックスが未だ十分満足すべきものが得られていないので、一貫した方法で座屈問題をも取り扱える段階に到っていない。このような現状においては、複雑な平板の弾性座屈の問題を、有限要素法に基づいて求められる応力分布を用い、エネルギー法で解析するのが最も合理的であると著者等は考えるが、上記積分法によりこの解析法が可能となった。その興味ある解析例として、中央に円孔を有する正方形板を圧縮する場合の座屈荷重を求めてみたので報告する次第である⁽³⁾。

* 東大工学部

** 東大生産技術研究所

*** 東大大学院工学系

2 二重積分の線積分への変換

平板の弾性座屈の解は平板の有するポテンシャルエネルギー Π の停留条件より求めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} t \left\{ \sigma_x(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy}(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sigma_y(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

である。ここで w は板のたわみ、 t は板厚、 D は板の曲げ剛性、 ν はポアソン比を表わしており、 $\sigma_x(x, y)$ 、 $\sigma_y(x, y)$ 、 $\tau_{xy}(x, y)$ は平板内の応力分布である。

いま平板のたわみ $w(x, y)$ をつぎのような関数列で表わすとすれば

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} S_{mn}(x, y) \\ S_{mn}(x, y) = & \varphi(x, y) x^m y^n \end{aligned} \quad (2)$$

ポテンシャルエネルギー Π の停留条件は次のように表わすことができる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0 \quad (3)$$

(2)式を(1)式に代入して(3)式で与えられる未知係数 a_{mn} に関する無限連立一次方程式を導く際、後述のように種々のエネルギー項の二重積分を実行しなければならない。さて平板内の応力分布($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)が x, y のべき級数として表わされると仮定すれば、たわみ $w(x, y)$ もべき級数表示を使用しているので結局どのエネルギー積分項も次の積分の線型結合の形で表わすことができる。

$$I_{mn} = \iint_{\Omega} x^m y^n dx dy \quad (4)$$

ここで二重積分に関する Gauss の公式；

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_C F(x, y) \cos(n, x) ds \quad (5)$$

において

$$F(x, y) = \int x^m y^n dx = \frac{x^{m+1} y^n}{m+1}$$

とすれば

$$I_{mn} = \iint_{\Omega} x^m y^n dx dy = \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n \cos(n, x) ds \quad (6)$$

が得られる。

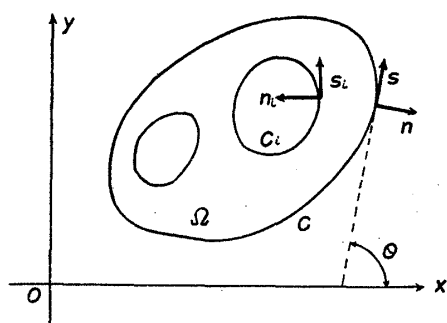
ここに s は領域境界 C に沿って第1図矢印の方向に、ある点から測った曲線の線素を示し、 n は領域の外側に向つて引かれた法線を表わしている。(6)式は単一連結領域の場合にのみ成立する式であるが、多連結領域の場合法線 n の方向が内部境界において外部境界のそれと 180° 向きが異なる点を考慮すれば次のような式が成立する。

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^m y^n dx dy = & \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n \cos(n, x) ds \\ = & \sum_i \frac{1}{m+1} \oint_{C_i} x^{m+1} y^n \cos(n_i, x) ds_i \end{aligned} \quad (7)$$

議論を簡単にするため以後単一連結領域の場合についてのみ考察することにする。切線 s と x 軸のなす角(s, x)を θ とすれば

$$\cos(n, x) = \sin \theta$$

であるから



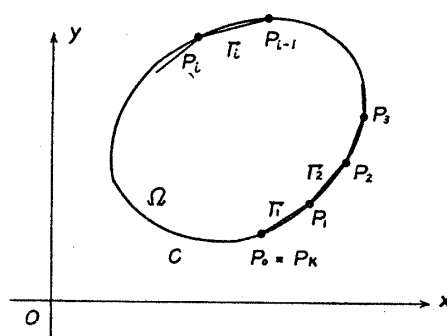
第1図 積分領域と境界切線および法線

$$I_{mn} = \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n \tan \theta dx = \frac{1}{m+1} \oint_C x^{m+1} y^n dy \quad (8)$$

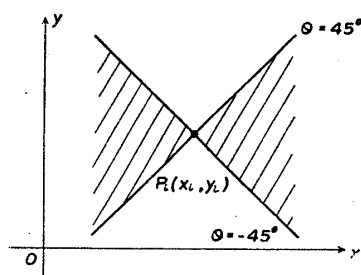
となる。ここで境界曲線 C を第2図に示すごとく、境界上の有限個の点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $\dots$, $P_K(x_K, y_K) = P_0(x_0, y_0)$ を逐次連結して得られる折れ線 $P_0P_1P_2 \dots P_K$ で近似すれば

$$\begin{aligned} I_{mn} &\doteq \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^K \int_{x_{i-1}(\Gamma_i)}^{x_i} x^{m+1} y^n \tan \theta_i dx \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^K \int_{y_{i-1}(\Gamma_i)}^{y_i} x^{m+1} y^n dy \end{aligned} \quad (9)$$

ここに Γ_i は線素 $P_{i-1}P_i$ を示している。 Γ_i は一般に



第2図 積分領域の多角形近似



第3図 公式(12)および(13)の適用範囲

$$\text{または} \quad \left. \begin{aligned} y &= A_i x + B_i \\ x &= C_i y + D_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のいずれかの形に表わされるが、実際の計算の経験から第3図に示すような斜線領域内に線分が存在する場合には、(10)式の第一式を用いることにし、他の場合は第2式を用いる。これは電子計算機を用いた数値計算の際の overflow を避けるためである。今 Γ_i が第1式で表示されるとき、

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ B_i &= y_{i-1} - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) x_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となり、 $|A_i| \leq 1$ である。

さて

(i) $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ の場合には

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{m+1} y^n \tan \theta_i dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{m+1} (A_i x + B_i)^n A_i dx \\ &= A_i \sum_{r=0}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} n C_r (A_i x)^{n-r} (B_i)^r x^{m+1} dx \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{n C_r A_i^{n+1-r} B_i^r}{m+n+2-r} (x_i^{m+n+2-r} - x_{i-1}^{m+n+2-r}) \\ &= \sum_{r=0}^n n C_r \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^{n+1-r} \left\{ y_{i-1} - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) x_{i-1} \right\}^r \left(\frac{x_i^{m+n+2-r} - x_{i-1}^{m+n+2-r}}{m+n+2-r} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、

(ii) $A_i = 0$ の場合には、明らかに積分は零になる。

(iii) $A_i \neq 0$, $B_i = 0$ の場合には

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{m+1} y^n \tan \theta_i dx = A_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^{m+1} (A_i x)^n dx = \frac{1}{m+n+2} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^{n+1} (x_i^{m+n+2} - x_{i-1}^{m+n+2}) \quad (13)$$

となる。

まったく同様にして Γ_i が $x = C_i y + D_i$ で表わされる場合についても以下のような結果が得られる。

(iv) $C_i \neq 0$, $D_i \neq 0$ の場合

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} x^{m+1} y^n dy = \sum_{r=0}^{m+1} \frac{m+1}{r} C_r \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \right)^{m+1-r} \left(x_{i-1} - \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} y_{i-1} \right)^r \frac{(y_i^{m+n+2-r} - y_{i-1}^{m+n+2-r})}{m+n+2-r} \quad (14)$$

(v) $C_i = 0$ の場合

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} x^{m+1} y^n dy = \frac{1}{n+1} \left(x_{i-1} - \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} y_{i-1} \right)^{m+1} (y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) \quad (15)$$

(vi) $C_i \neq 0$, $D_i = 0$ の場合

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} x^{m+1} y^n dy = \frac{1}{m+n+2} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \right)^{m+1} (y_i^{m+n+2} - y_{i-1}^{m+n+2}) \quad (16)$$

(vii) $C_i = D_i = 0$ の場合

この積分は明らかに零となる。

以上の結果を使用すれば x, y の多項式で表わされた関数の二重積分の計算を行なうことができるが、ここで注意すべきことは積分領域境界 C が曲線で与えられる場合には近似計算であるということである。したがってその精度が問題となるわけであるが、一般的には多角形の頂点の数を限りなく増せばいくらかでも真の値に近づけることができるといえるであろう。

また面積分を線積分に変えて手計算をすることは却つて煩雑になる場合が出てくるかも知れないが、あくまでも電子計算機の高速性を利用し、種々の問題を統一的に解くという点にこの方法の主眼があるのである。

以上の二重積分から線積分の変換を利用して座屈問題においては次の積分を行なう。

$$\Phi_{mnrs} = \int \int_{\Omega} [P_{mn}(x, y) P_{rs}(x, y) + \nu \{P_{mn}(x, y) Q_{rs}(x, y) + Q_{mn}(x, y) P_{rs}(x, y)\} + Q_{mn}(x, y) Q_{rs}(x, y) + 2(1-\nu) R_{mn}(x, y) R_{rs}(x, y)] dx dy \quad (17)$$

$$\Psi_{mnrs} = \int \int_{\Omega} t [\sigma_x^{\circ}(x, y) L_{mn}(x, y) L_{rs}(x, y) + \tau_{xy}^{\circ}(x, y) \{L_{mn}(x, y) M_{rs}(x, y) + M_{mn}(x, y) L_{rs}(x, y)\} + \sigma_y^{\circ}(x, y) M_{mn}(x, y) M_{rs}(x, y)] dx dy \quad (18)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} P_{mn}(x, y) &= \frac{\partial^2 S_{mn}(x, y)}{\partial x^2}, \quad Q_{mn}(x, y) = \frac{\partial^2 S_{mn}(x, y)}{\partial y^2}, \quad R_{mn} = \frac{\partial^2 S_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \\ L_{mn}(x, y) &= \frac{\partial S_{mn}(x, y)}{\partial x}, \quad M_{mn}(x, y) = \frac{\partial S_{mn}(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

また $\sigma_x^{\circ}(x, y)$, $\sigma_y^{\circ}(x, y)$, $\tau_{xy}^{\circ}(x, y)$ は基準の面内荷重が加わったときの平板内における応力分布である。そして (3) 式で与えられる未知係数 a_{mn} に関する連立一次方程式は次式で与えられる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{rs} (D \Phi_{mnrs} + p \Psi_{mnrs}) = 0 \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

a_{mn} が有意の解であるための条件として、座屈応力係数 p が決定できる固有行列式が得られる。

著者等が開発した計算プログラムにおいては (19) 式の微分、(17) 式の x, y に関する多項式どうしの掛け算等を自動的に行なうようになっている。

3 数 値 計 算 例

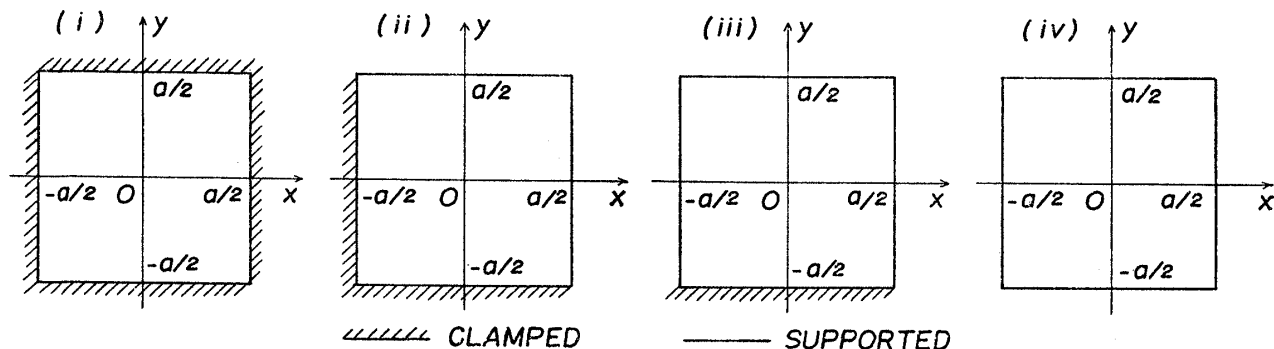
(A) 等応力圧縮を受ける正方形板の座屈

最初の数値計算例として厳密解への収束状況等を調べるために、一部厳密解の得られている問題を取り扱った。すなわち周辺のいずれの辺も固定または支持された正方形平板が二軸一定等応力を受けて座屈する場合の問題を研究した。

平板内の応力分布は常に次の式で与えられる。

$$\sigma_x^{\circ} = \sigma_y^{\circ} = -1, \quad \tau_{xy}^{\circ} = 0 \quad (21)$$

その解析結果をまとめて第1表に示しておく。ただし第4図に境界条件を図示して同じローマ数字で第1表に対応させている。たわみ $w(x, y)$ は6項近似をしているが、明らかに対称性のあるものは、これを利用して



第4図 二軸一定等応力を受ける正方形板の座屈問題において考察した4種の境界条件

第1表 正方形板の均等水圧による座屈

境界条件	σ_{cr}/σ_s	$\varphi(x, y)$	$w(x, y)/\varphi(x, y)$
(i)	5.4024	$\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2$	$1.0000 - 0.0004 \frac{x^2}{(a/2)^2} - 0.0004 \frac{y^2}{(a/2)^2}$ $-0.0001 \frac{x^4}{(a/2)^4} - 0.0000 \frac{x^2 y^2}{(a/2)^4} - 0.0001 \frac{y^4}{(a/2)^4}$
	5.304(Faxen)		
	5.3036(井口)		
(ii)	3.2603	$\left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \left(y - \frac{a}{2}\right) \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$	$0.9775 - 0.1471 \frac{x}{a/2} - 0.1471 \frac{y}{a/2}$ $-0.0170 \frac{x^2}{(a/2)^2} + 0.0236 \frac{xy}{(a/2)^2} - 0.0170 \frac{y^2}{(a/2)^2}$
	3.2316(岩藤)		
(iii)	2.6631	$\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y - \frac{a}{2}\right) \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$	$0.9854 - 0.1631 \frac{y}{a/2} - 0.0346 \frac{x^2}{(a/2)^2}$ $-0.0320 \frac{y^2}{(a/2)^2} + 0.0060 \frac{x^2 y}{(a/2)^3} + 0.0098 \frac{y^3}{(a/2)^3}$
	2.69 (岩藤)		
	2.6627(井口)		
(iv)	2.0000	$\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right)$	$0.9984 - 0.0398 \frac{x^2}{(a/2)^2} - 0.0397 \frac{y^2}{(a/2)^2}$ $+0.0012 \frac{x^4}{(a/2)^4} + 0.0014 \frac{x^2 y^2}{(a/2)^4} + 0.0012 \frac{y^4}{(a/2)^4}$
	厳密解 2		

$$\sigma_s = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$$

第2表 全辺支持正方形板の座屈値の収束度

近似項数	1	2	3	4	5	6
	1	x^2	y^2	x^4	$x^2 y^2$	y^4
最小固有値	2.2291	2.1152	2.0008	2.0004	2.0001	2.0000
誤差	11.45%	5.76%	0.04%	0.02%	0.01%	0.00%

厳密解=2.0 σ_s

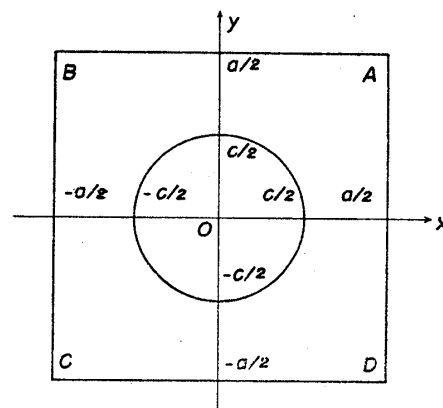
いる。座屈値は固有行列式の最小固有値を求めることであるが、この最小固有値に対応する固有ベクトルの各要素は、たわみの各項の係数 a_{mn} の相対比を表わす。これによって各項のたわみ形への影響を知ることができる。極く小さければこの項を無視しても座屈値ほとんど変わらないことになる。第1表には決定された近似座屈たわみの式を併せ載せておく。

また項数を増すことによつてどのように最小固有値が収束していくかを全周支持条件を例にとつて第2表に示す。この例では第3項程度までとれば工学的には十分な精度が得られることがわかる。

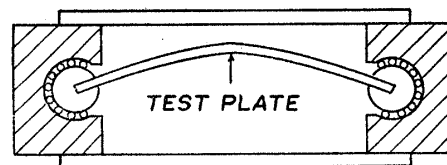
(B) 一定変位圧縮の有孔正方形板の座屈 (A. L. Schlack, Jr.⁽³⁾ の研究との比較)

重量軽減孔が板の座屈強度に及ぼす影響は船舶、航空機、車輛、橋梁その他の薄板構造において非常に重要な設計上の問題であるが、その解析的研究は従来ほとんど行なわれていなかったといつても過言ではない。その理由を挙げるならば、まず第一に平板の座屈強度の計算に必要な平板内の応力分布を精密に求めることかこれまでほとんど不可能であったことと、仮に応力分布が適当に求められても有孔板の座屈荷重を工学的に求める方法自身が十分確立されていなかったのである。

この問題に関して A. L. Schlack, Jr.⁽³⁾ が 1964 年に研究結果を発表している。彼の実験は第5図(a)中の AD および BC 辺で、第5図(b)に示すようなベアリング・ブロックを使用して x 方向の変位が拘束され、かつ板の曲げに対しては単純支持条件になるようになっている。さらに AB および CD 辺でも同様なベアリング・ブロックを介して一定変位で圧縮され、単純支持となっている。Schlack の解析方法はたわみ w と同様に面内変位 u, v も次に示すような実験における境界条件を満足



(a) 考察した平板の形状

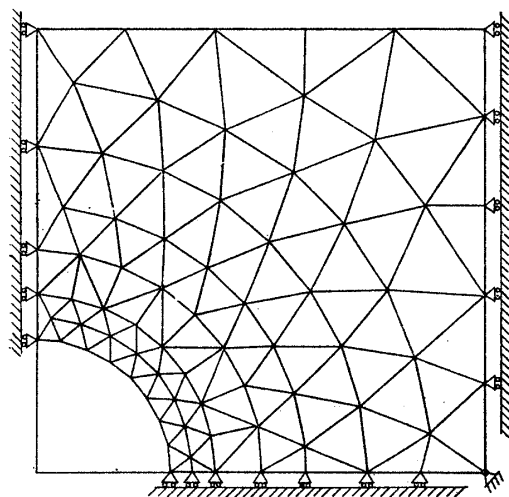


(b) 実験に使用したベアリング・ブロック

第5図 A. L. Schlack, Jr. の有孔板の座屈に関する研究

する x, y のべき級数で近似させ、エネルギー法で座屈値を得ている。

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=\pm a/2} &= 0 \\ v|_{y=\pm a/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



第6図 平面応力場の解析および積分に使用した有限要素の分割状況の例 ($r=0.3$)

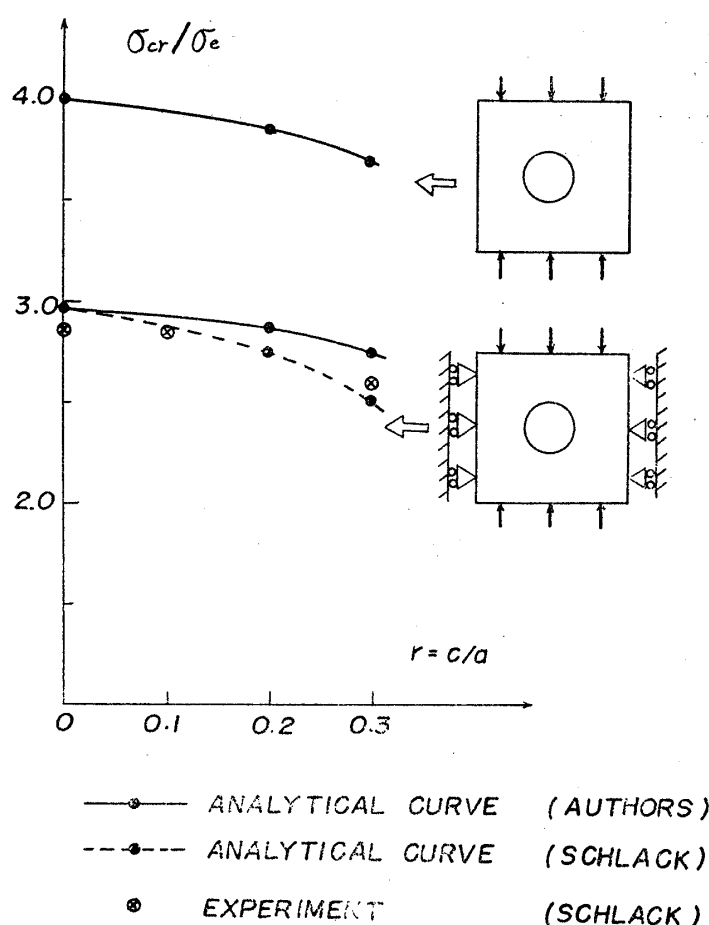
のは各要素ごとに線積分を行ない、全要素ごとの積分値を総和することにより求められる。

板のたわみ形は

$$\begin{aligned} w(x, y) = & (x^2 - a^2/4)(y^2 - a^2/4) \\ & \times (a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \\ & + a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4) \end{aligned} \quad (23)$$

と6項で近似し、正方形板の一辺の長さ a と孔の直径 c の比 c/a を0から0.3まで変えて計算した。その結果と Schlack の解析値および実験値との比較を第7図に示す。とくに孔無しの場合は厳密解が得られ、実験板の $\nu=0.35$ のとき $2.96296 E\pi^2/12(1-\nu^2) \times (t/a)^2$ である。一方有限要素48分割、6項までのたわみ近似をして得られた値が $2.9630 E\pi^2/12(1-\nu^2) \times (t/a)^2$ となり、良好な一致を示している。しかし対応する実験値と比較すると約3%高目に出ており、孔が大きくなってもその傾向がみられる。通常平板の座屈に関する理論値と実験値との間に10%程度の誤差はまぬがれないことを考慮すれば計算結果は非常に信頼しうるものであることがわかる。 $r=c/a=0$ の場合の厳密解への収束度を調べるために横軸に近似項数、縦軸に対応する最小固有値を第8図に示す。同様に第9図に $r=0.3$ の場合の収束度を示す。第7図には併せ

しかし変位がただか3項程度の近似であるため面内応力分布が特に不正確になり、孔が大きくなるとともに座屈値が低目に出る傾向がある。著者等の開発したプログラムの一部を変更すればこのような方法でも精密な応力分布が求められるであろうが、平板内の変位 u, v を x, y のべき級数で近似する場合、円孔周辺の応力分布を精度よく求めるにはかなりの項数をとらねばならない。その点、有限要素法による平面応力場の解析は完全に実用化の段階に到達しており、任意形状の平板が与られた外力を受けて変形する場合の応力分布を求める計算プログラムが既に開発されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。そこでこのプログラムを利用して著者等はまず与えられた有孔正方形板内の応力分布を求めた。この場合変位の対称性から板の1/4の領域を考慮すればよい。もちいた三角形有限要素による分割状況を第6図に示す。このとき各要素内では応力分布が一定となる解が得られる。したがってエネルギー積分のうち応力分布を含んでいるも



第7図 有孔正方形板の圧縮座屈に関する理論値と実験値との比較 (σ_{cr} は座屈荷重を辺断面積 at で除した平均応力)

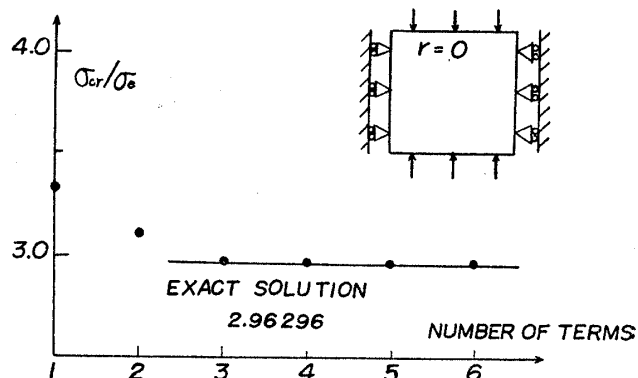
て第5図(a)の AD, BC 辺で x 方向の変位を拘束しない場合の座屈値も表示してある。これは同じ支持条件であっても xy 平面内での拘束条件が異なることによって座屈値がどの程度変わるかを示すものである。これは解析値と実験値とを比較する場合特に留意すべき点である。たとえば支持条件をナイフエッジで実現させようとするとき、その締め方を強くすることにより境界辺上の面内変位に対する拘束が増大し、付加応力が生じ座屈値は一般に下がることになる。しかし締め方が強すぎれば板の曲げに対する境界条件は、支持条件から固定条件へと変化していき座屈値は高くなっていく。極論すればナイフエッジの締め方で座屈値はある範囲の任意の値を取りうることになり、この点に注意しないと実験値に対する信頼度は薄れることになる。

4 結 論

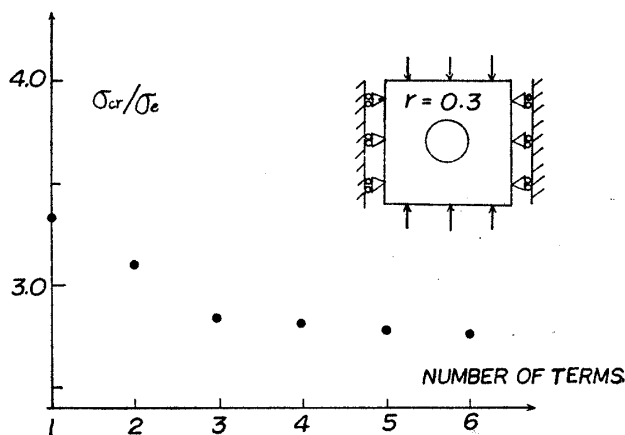
第一報で展開した平板問題の Rayleigh-Ritz の方法による一般的解析法の実用性を高める目的で、実際の数値計算において現われる煩雑なエネルギーに関する二重積分を Gauss の定理を用いて線積分に変換し、計算の高速化に成功した。この方法と平面応力場の有限要素法による数値解と組合せることにより、複雑な形状と境界条件を有する平板が任意の外荷重を受けて座屈を起こす限界応力が比較的容易に求められることがわかった。

参 考 文 献

- (1) 吉識, 川井: “平板の曲げ, 振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について(Ⅰ)” 造船協会論文集第117号, pp.153~163 (昭和40年5月)
- (2) 吉識, 川井, 吉村: “同上(Ⅱ)” 造船協会論文集 第118号, pp.271~278 (昭和40年11月)
- (3) A. L. Schlack, Jr.: “Elastic Stability of Pierced Square Plates” EXPERIMENTAL MECHANICS pp.167~172 (June 1964)
- (4) 吉識, 川井, 吉村: “マトリックス法による船体構造解析に関する研究(Ⅰ)” 造船協会論文集 第120号 pp.127~134 (昭和41年11月)
- (5) 吉識, 川井, 吉村: “同上(Ⅱ)” 造船協会論文集 第121号, pp.150~156 (昭和42年5月)



第8図 $r=0$ の場合の厳密解への収束度 (σ_{cr} は平均応力)



第9図 $r=0.3$ の場合の収束度 (σ_{cr} は平均応力)