

(昭和 43 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

## 防撓板の振動時における応力分布 (第 1 報)

正員 清水 茂 俊\*  
佐藤 正 視\*

On the Dynamical Stress Distribution of Stiffened Plate at Vibration (1st report)

By Shigetoshi Shimizu, *Member*  
Masashi Sato

## Summary

One of the causes for the crack damage on the stiffened bulkhead in the neighbourhood of the joint with stiffeners is the fatigue fracture due to the vibration of the plate accompanied by the torsional and bending vibration of the stiffeners. The basic equation representing the stiffened plate which is freely vibrating are introduced by combining the plane stress theory and the equation of lateral vibration of plate, and the dynamical stress distribution of stiffened plate is analysed in the state of its free vibration to make this cause clear. The eigen-values and dynamical stress distributions of the simply supported rectangular plate stiffened by a inverted angle at its centre line are investigated theoretically and experimentally. The experimental results agree fairly well with theoretical ones. The dynamical bending stress in the plate produced in the neighbourhood of the intersection of stiffener and plate are considerably large. Assuming the fatigue limit as  $\sigma_F = 22\text{kg/mm}^2$ , at the time when the maximum dynamical bending stress of the vibrating stiffened plate fall on that fatigue limit, the ratio of the maximum deflection of the plate to the stiffener space is about  $2 \times 10^{-2} \sim 1 \times 10^{-3}$  for the 1st~3rd mode. But the assumed fatigue limit is the value under an ideal condition, and therefore, under an actual condition, this value will decrease to  $1/2 \sim 1/3$ , provided that the shape factor as well as the change in quality of materials due to welding and the influence of corrosion are considered. Thus it is conceivable that the fatigue fracture of the stiffened plate may be caused by local vibration of ship.

## 1 緒 言

水密隔壁等の防撓構造において板と防撓材の取付部付近に亀裂を生じた損傷例がしばしば報告されている\*\*がその原因の一つとして、防撓材の曲げ振り振動をともなつた防撓材の振動による疲労破壊が考えられる。しかしこの原因を明らかにするには板に防撓材を溶接した部分の材料の疲労強度と、防撓板の固有振動数および振動時における防撓板に生じる応力分布の状態を考えなければならない。構造用材料の疲労強度に関しては、多くの研究がなされているが、特に防撓板の撓み振動による疲労強度に関しては、接合部の形状係数、溶接による材質の変化、および腐食疲労等をあわせて考えなければならないので、これに関する資料はほとんどないように思われる。従つてこの種の疲労強度に関しては、実験的に明らかにする必要があるが、ここではまず問題を力学的な後の 2 点だけに限ることとした。防撓板の固有値の計算方法については従来多数の研究がなされていて<sup>1)~10)</sup> 実験結果とかなりよい一致を得ている報告もある。また、防撓材だけを考えた薄肉開断面の梁の曲げと振りの合成振動の固有値の計算方法も、二三報告されている<sup>11) 12) 13) 14)</sup>。さらに、Beresford と Mead<sup>15)</sup> は防撓材の断面の変形を考慮して曲げと振りの合成振動の固有値を求め、興味ある結果を報告しているが、この場合板の方は剛体と仮定している。しかし従来の研究結果は防撓板の固有値を求める方法であつて、振動時に防撓板に生じる応力分

\* 九州大学応用力学研究所

\*\* 船体構造委員会西部地区部会提出資料

布を明らかにした報告は著者が調べた範囲では現在まで未だ発表されては無く、わずかに F. H. Schroeder<sup>16)</sup> が近似的に振動時のフランジの有効幅を求めているにすぎない。また、以上の諸研究では、防撓材のとりあつかいは、板の面に対して上下対称と仮定して取付部における剪断応力を零とおくか、あるいは適当な有効幅をとって防撓材の曲げ剛性を増している。さらに振りの影響を一応考慮した報告もあるが、山形鋼等の非対称断面に生じる曲げ振りの影響を考慮して取扱つたものはない。従来方法では固有値を求める場合撓みの形を仮定してエネルギー法で求めたものが殆んどであるから、この方法では正確なモーメントの分布状態は求まらない。本報告は、板の平面応力状態の式と曲げ振動の式を近似的に組み合わせて、接合部における平衡条件式を作り、防撓材の曲げ振り振動をともなつた一方に補強した防撓板の振動の固有値とその固有値に対する応力状態を求める式を導き、一例として四辺を自由支持した板の中央に防撓材が1本ある場合について、計算と実験を行ない両者の結果について比較検討を試みた。

## 記 号

$s, p$ : 板の縁に作用する単位面積当りの面内の剪断力および垂直力

$V_y$ : 板の縁に、面に直角に作用する単位長さ当りの力

$M_y$ : 板の縁に作用する  $x$  軸に関する単位長さ当りの曲げモーメント

$q_x, q_y, q_z$ : 防撓材と板との接合部に作用する  $x, y$  および  $z$  方向の単位長さ当りの力

$m_x$ :  $x$  軸に関する単位長さ当りのモーメント

$u = B\bar{u}\sin n\pi\xi e^{i\omega t}$

$v = B\bar{v}\sin n\pi\xi e^{i\omega t}$

$w = B\bar{w}\sin n\pi\xi e^{i\omega t}$

$\theta = \bar{\theta}\sin n\pi\xi e^{i\omega t}$ :  $x$  軸に関する角変位

$L$ : 板の防撓材方向の長さ

$B$ : 防撓材間隔

$\xi = x/L$

$t_p, t_s$ : 板および防撓材のウェブの板厚

$\lambda = n\pi B/L$  ( $n$  は整数)

$\alpha = (\gamma t_p \omega^2 / g D)^{1/4} \cdot B$ : 板の撓み振動の固有値

$D = Et_p^3 / 12(1 - \nu^2)$ : 板の曲げ剛性

$\gamma$ : 板および防撓材の材料の単位体積当りの重量

$\omega$ : 角振動数

$[k_p]$ : 板の二次元応力状態に対する stiffness matrix

$[k_b]$ : 板の撓み振動に対する stiffness matrix

$[k_s]$ : 防撓材に対する stiffness matrix

## 2 仮 定

- ii) 防撓材は一方に補強され、防撓材に直角な板の周辺は自由支持とする。
- iii) 防撓材は両端において回転が拘束されているが、断面のそりに対しては自由とする。
- iii) 板の面内の振動は面外の振動に比べて振動数が高く、且つその慣性力は面外の振動の慣性力に比べると小さいのでこれを無視する。
- iv) 防撓材の断面は振動時においても不変とする。
- v)\* 板の面に垂直に荷重が作用する場合の板の方程式は一般に

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left\{ q(x, t) + \sigma_x t_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y t_p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \tau_{xy} t_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (2.1)$$

であらわされるが、板の撓み  $w$  が小さいときは、右辺の括弧内の第2項以下は第一項に比べて一般に小さいので

\* この仮定に基づいて防撓構造の静的な弾性解析が、柳本武<sup>17)</sup>、E. Reissner<sup>18)</sup>、H. Holmes<sup>19)</sup>、清水茂俊<sup>20)</sup>、H. Vaughan<sup>21)</sup> 等によつて行なわれている。

これを無視して、板の撓み振動の方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma t_p}{g} \right) \quad (2.2)$$

を用いる。

一方、板の面内の応力は次式より求まる。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

ただし、 $F$ は応力函数であつて次の適合条件を満足するものとする。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2.4)$$

### 3 防撓板の振動の基礎式

#### 3.1 第 $m$ 交線における平衡方程式

Fig. 3.1 に示すように板と防撓材を切離なすと断面が  $t_p \times t_s$  の立方体が考えられるが、力の平衡条件は、この立方体について考えるものとする、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} t_p s \\ t_p p \\ V_y \\ M_y \end{bmatrix}_{m,m-1} - \begin{bmatrix} t_p s \\ t_p p \\ V_y \\ M_y \end{bmatrix}_{m,m+1} = \begin{bmatrix} -q_x \\ -q_y \\ -q_z \\ m_x \end{bmatrix}_m \quad (3.1)$$

(3.1)式を無次元化するために、次のようにおきかえて(3.1)式を(3.2)式のように書きかえる。

$$\begin{aligned} s &= E \bar{s} \cos n\pi \xi e^{i\omega t} & q_x &= \bar{q}_x \cos n\pi \xi e^{i\omega t} \\ p &= E \bar{p} \sin n\pi \xi e^{i\omega t} & q_y &= \bar{q}_y \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \\ V_y &= -D/B^2 \bar{V}_y \sin n\pi \xi e^{i\omega t} & q_z &= \bar{q}_z \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \\ M_y &= -D/B \bar{M}_y \sin n\pi \xi e^{i\omega t} & m_x &= \bar{m}_x \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{p} \\ \bar{V}_y \\ \bar{M}_y \end{bmatrix}_{m,m-1} - \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{p} \\ \bar{V}_y \\ \bar{M}_y \end{bmatrix}_{m,m+1} = \begin{bmatrix} (-1/Et_p) \bar{q}_x \\ (-1/Et_p) \bar{q}_y \\ (B^2/D) \bar{q}_z \\ (-B/D) \bar{m}_x \end{bmatrix}_m \quad (3.2)$$

あるいは、簡単に次のようにおく。

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_p\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{bmatrix}_{m,m-1} - \begin{bmatrix} \{\bar{P}_p\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{bmatrix}_{m,m+1} = \{\bar{Q}_s\}_m \quad (3.2)$$

(3.2)式の左辺に(A・17), (A・24)式を、右辺に(A・3・26)式を代入すると

$$\begin{bmatrix} [k_p]_3 & 0 \\ 0 & [k_b]_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{U}_p\} \\ \{\bar{U}_b\} \end{bmatrix}_{m,m-1} + \begin{bmatrix} [k_p]_4 - [k_p]_1 & 0 \\ 0 & [k_b]_4 - [k_b]_1 \end{bmatrix} - [k_s] \begin{bmatrix} \{\bar{U}_p\} \\ \{\bar{U}_b\} \end{bmatrix}_m - \begin{bmatrix} [k_p]_2 & 0 \\ 0 & [k_b]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{U}_p\} \\ \{\bar{U}_b\} \end{bmatrix}_{m,m+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

(3.3)式を各交線に対して適用すると次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & \\ & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \\ & & & & \\ & & & & K_{n,n-1} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ここで

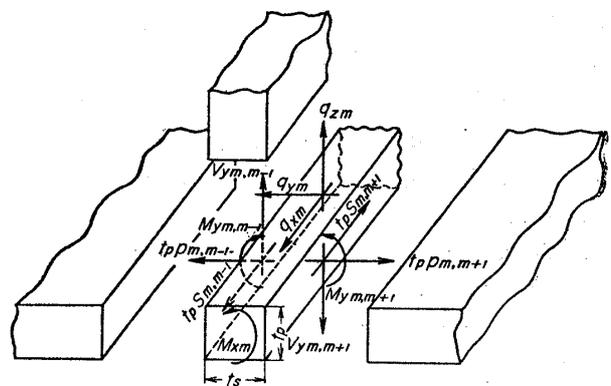


Fig. 3.1 第  $m$  交線に於ける力の釣り合い



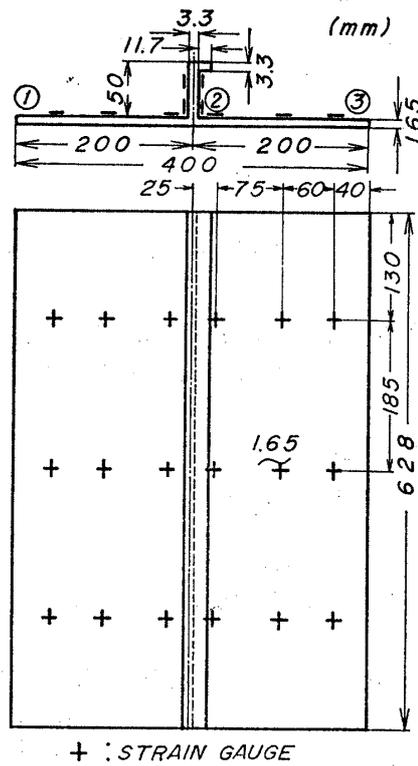


Fig. 4.1 模型ならびに歪ゲージ貼布位置

$$\begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & 0 \\ K'_{21} & K_{22} & K'_{23} \\ 0 & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2 \\ U_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{42} & 0 \\ -k_{42} & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k'_{44} \end{bmatrix}, \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{41} & 0 & 0 \\ -k_{41} & k_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{41}' & k_{43}' \end{bmatrix}, \quad K_{21}' = \begin{bmatrix} k_{21} & -k_{41} & 0 \\ k_{41} & k_{43} & 0 \\ 0 & 0 & k_{41}' \\ 0 & 0 & k_{43}' \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} (2k_{22} - B_{11}) & -B_{12} & -B_{13} & -B_{14} \\ -B_{21} & (2k_{44} - B_{22} - D_{22}) & -B_{23} & -(B_{24} + D_{24}) \\ -B_{31} & -B_{32} & (2k_{22}' - B_{33} - D_{33}) & -(B_{34} + D_{34}) \\ -B_{41} & -(B_{42} + D_{42}) & -(B_{43} + D_{43}) & (2k_{44}' - B_{44} - D_{44}) \end{bmatrix}, \quad K_{23}' = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{41} & 0 \\ -k_{41} & k_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{41}' \\ 0 & 0 & k_{43}' \end{bmatrix}$$

$$K_{32}' = \begin{bmatrix} k_{21} & -k_{41} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{41}' & k_{43}' \end{bmatrix}, \quad K_{33}' = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{42} & 0 \\ k_{42} & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k_{44}' \end{bmatrix}$$

$$U_1' = \{\bar{u}_1 \bar{v}_1 \bar{\theta}_1\}, \quad U_2 = \{\bar{u}_2 \bar{v}_2 \bar{w}_2 \bar{\theta}_2\}, \quad U_3' = \{\bar{u}_3 \bar{v}_3 \bar{\theta}_3\}$$

固有値決定方程式は方程式 (4.1) の係数の行列式を 0 とおけば得られる。各固有値に対する曲げ応力を求めるために Fig. 4.1 に示す節点 3 の撓み角  $\theta_3$  を 1 とおいて、方程式 (4.1) を書き替えると (4.2) 式ようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}' & K_{12}' & 0 \\ K_{21}' & K_{22} & K_{23}'' \\ 0 & K_{32}'' & K_{33}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2 \\ U_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ただし

$$K_{23}'' = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{41} \\ -k_{41} & k_{43} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{32}'' = \begin{bmatrix} k_{21} & -k_{41} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{43} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{44}'' = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{42} \\ k_{42} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \{0 \ 0 \ k_{41}' \ -k_{43}'\}, \quad U_3'' = \{\bar{u}_1 \ \bar{v}_3\}$$

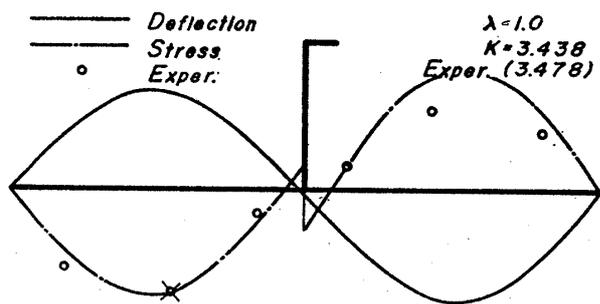


Fig. 4.2.1

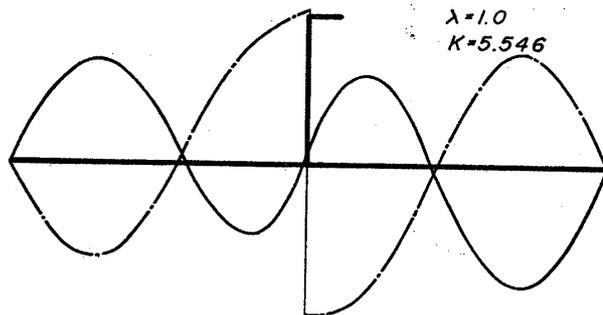


Fig. 4.2.3

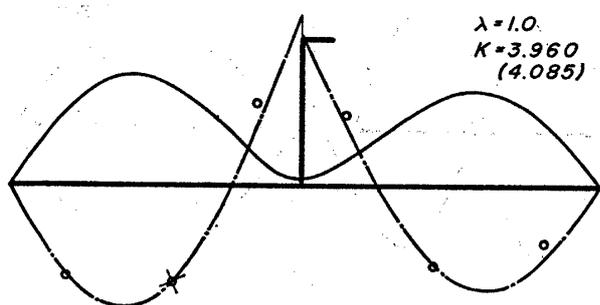


Fig. 4.2.2

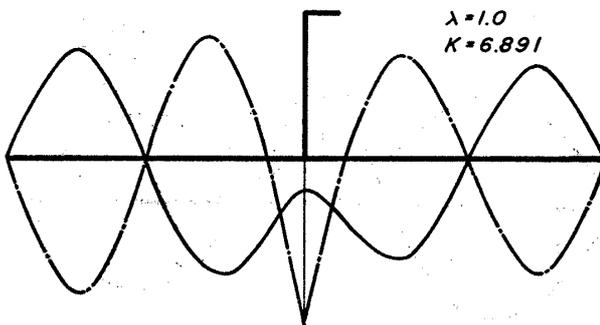


Fig. 4.2.4

Fig. 4.2  $\lambda=1$  におけるモードカーブおよび応力分布

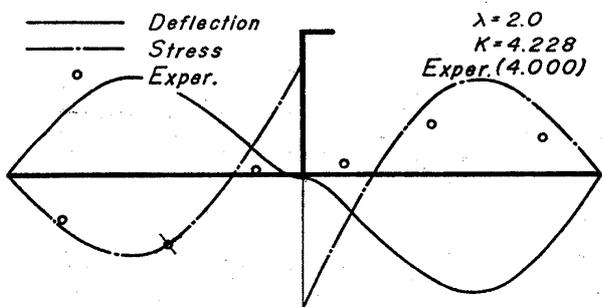


Fig. 4.3.1

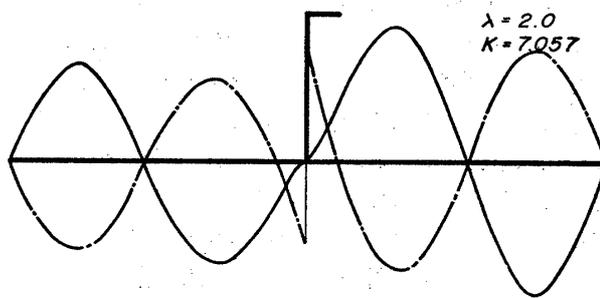


Fig. 4.3.3

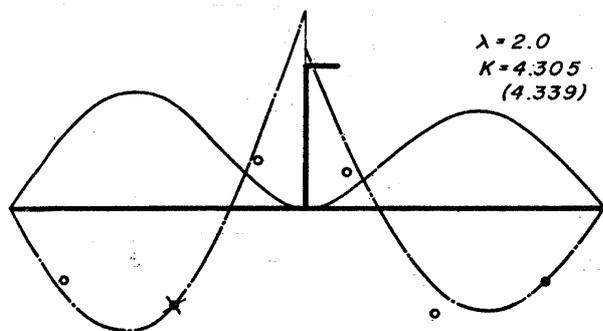


Fig. 4.3.2

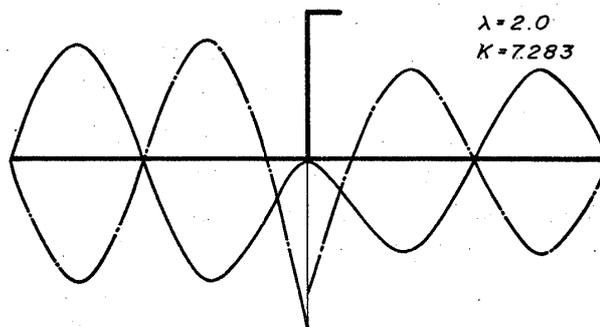


Fig. 4.3.4

Fig. 4.3  $\lambda=2$  におけるモードカーブおよび応力分布

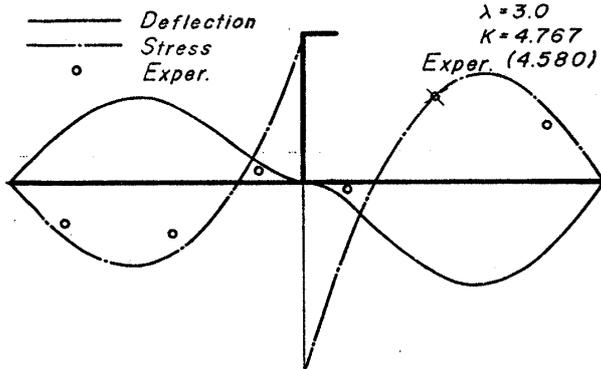


Fig. 4.4.1

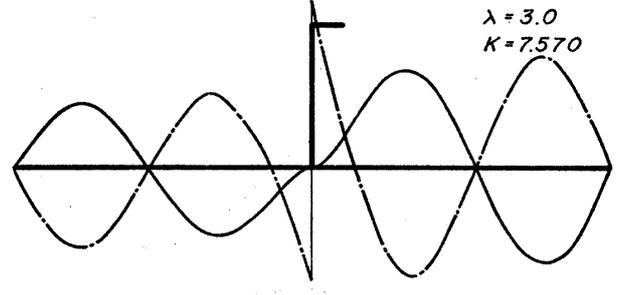


Fig. 4.4.3

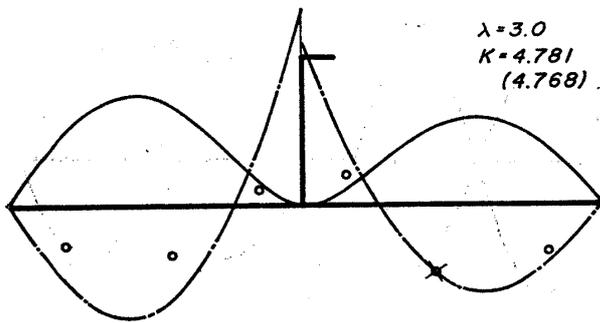


Fig. 4.4.2

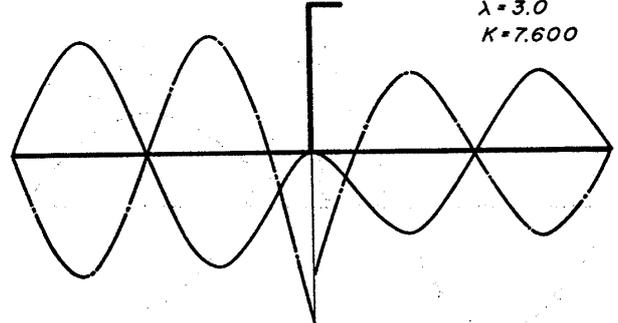


Fig. 4.4.4

Fig. 4.4  $\lambda=3$  におけるモードカーブおよび応力分布

この連立方程式を解いて各節点の変位  $U$  を求め、附録2 (A.2.21)式に代入すると振動時における板の曲げモーメントが求まる。振動時の撓みは (A.2.20) 式より  $\psi$  を求め (A.2.4) 式に代入して求まる。このようにして得られた撓みと曲げ応力の分布を Fig. 4.2~4.4 に示す。Fig. 4.2 はスパン方向の節数が  $2(\lambda=1)$  の場合で、以下 Fig. 4.3, 4.4 はそれぞれ  $3(\lambda=2)$  および  $4(\lambda=3)$  に相当する。さらにスパン方向の各節数における振動のモードを固有値  $\kappa$  の小さい方から  $m=1, 2, 3, \dots$  等の番号を附し、横軸に次数  $m$  縦軸に固有値  $\kappa$  をとつてプロットすると Fig. 4.5 に示すようになる。同図の横軸に平行な線は各  $\lambda$  に対して一辺固定(防撓材の取付部)他辺自由支持とした場合の固有値をあらわす。各固有値は  $\lambda=1$  の場合を除いて殆んどこれらの値に近く、防撓材の取付部で固定に近いことがわかる。このことは Fig. 4.3~Fig. 4.4 に示されるように、取付部で大きい曲げモーメントが作用していることから明らかである。 $\lambda=1$  の場合は防撓材の見掛けのスパン  $l$  は、長さ  $L$  に等しく  $\lambda=2$  および  $\lambda=3$  ではそれぞれ  $l=L/2$ ,  $l=L/3$  になり、見掛けの曲げ剛性  $EI/l$  および振り剛性  $GJ/l$  は、 $\lambda=1$  の場合が一番小さく、振動時における防撓材の効きが  $\lambda=2, 3$  の場合に比較して小さいことになる。したがって  $\lambda=1$  の場合は、固有値も固定の場合から離れている。しかし振動による防撓材の変位は大きく、このために、接合部に慣性力が集中力あるいは集中モーメントとして作用し、この場合も  $\lambda=1, m=1$  を除くと取付部にかなり高い応力が生ずることがわかる (Fig. 4.2)。以上の計算結果は自由振動時における板の撓みと曲げ応力値であるから絶対値ではない。今、材料の疲労強度を  $\sigma_F=22 \text{ kg/mm}^2$  と仮定し、振動時に板に生ずる

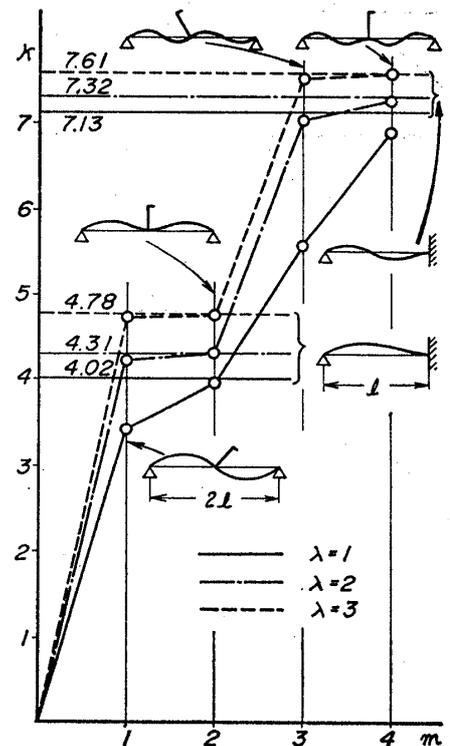


Fig. 4.5 各  $\lambda$  に対する固有値  $\kappa$  と次数  $m$  の関係

最大曲げ応力値がこの値に達したときの板の最大撓みと肋骨心距  $B$  との比を次式によつて求める。すなわち、(A. 2. 2), (A. 2. 4), (A. 2. 11) および (A. 2. 13) 式より板の撓みと曲げモーメントは

$$w = B\psi \sin n\pi\xi e^{i\omega t}$$

$$M_y = -D/B(\psi'' - \nu\lambda^2\psi) \sin n\pi\xi e^{i\omega t}$$

であらわされる。両式より

$$(w/B) = B/D(\psi/(\psi'' - \nu\lambda^2\psi)) M_y$$

しかるに  $\sigma_F = 6(M_y)_{\max}/t_p^2$  であるから、これを上式に代入して次の関係が求まる。

$$(w/B)_{\max} = B t_p^2 \sigma_F / 6 D \cdot (\psi)_{\max} / (\psi'' - \nu\lambda^2\psi)_{\max}$$

Table. 4.1 振動時に防撓板に生ずる最大応力が疲労限度  $\sigma_F = 22 \text{ kg/mm}^2$  に達したときの最大撓み  $w$  とスパン  $B$  との比の値。\* 以外は防撓板と板との接合部における値。

$\lambda=1$		$\lambda=2$		$\lambda=3$	
$\kappa$	$w/B$	$\kappa$	$w/B$	$\kappa$	$w/B$
3.438	$\times 10^{-2}$ 2.06	4.228	$\times 10^{-2}$ 1.20	4.767	$\times 10^{-3}$ 9.63
3.960	$\times 10^{-2}$ 1.15	4.305	$\times 10^{-2}$ 1.03	4.781	$\times 10^{-3}$ 9.32
5.540	$\times 10^{-3}$ 5.50	7.057	$\times 10^{-3}$ 5.02	7.570	$\times 10^{-3}$ 3.37
6.890	$\times 10^{-3}$ 4.05	7.283	$\times 10^{-3}$ 3.39	7.600	$\times 10^{-3}$ 3.21

各  $\lambda$  について、第4次までの  $(w/B)_{\max}$  を求め Table. 4.1 に示す。これによると  $w/B$  が  $2 \times 10^{-2} \sim 10^{-3}$  位の値で、板の曲げ応力が疲労限度に達することがわかる。しかし、疲労限度  $22 \text{ kg/mm}^2$  は軟鋼の理想状態における実験値<sup>23)24)</sup>であつて、防撓板の板と防撓材の接合部附近における疲労強度は形状係数、溶接による材質の変化腐食等を考慮すると、この値の  $1/2 \sim 1/3$  位に低下することが予想される。したがつて  $(w/B)$  の値が  $10^{-2}$  以下の値で疲労限度に達し、接合部付近の亀裂発生の原因の一つに振動による疲労破壊の可能性が考えられる。

## 5 実 験

前節 Fig. 4.1 に示す寸法の模型を製作し、これに同図に示す個処に二方向の歪ゲージを貼布し共振時における歪を測定した。測定装置の概略を Fig. 5.1 に示す。すなわち模型の周辺を上下1組のローラーの間にはさん

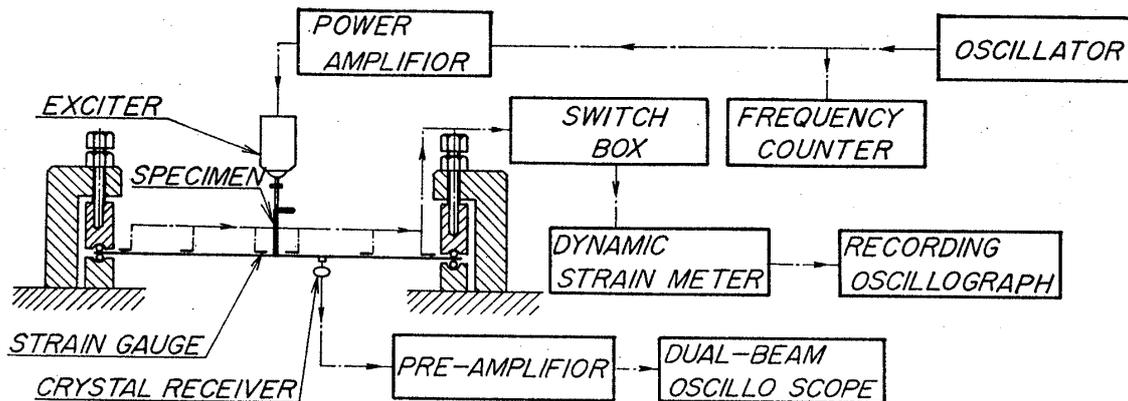


Fig. 5.1 実験装置のブロックダイアグラム

で自由支持し防撓材のウェブは2個のローラーにより支持した。電磁型の加振器により強制振動し共振状態はクリスタルレシーバーを改造した2個のピックアップの出力をデュアルビームオシログラフで読み、防撓材の長さ方向のモードを確認した。歪測定値より応力を求め、これを Fig. 4.2~4.4 に計算で求めた応力曲線に対し1点だけ合わせ(⊕印) 残りの測定値はこれに比例させてプロットした。各固有値の実験値は計算値とかなりよく一致し、かなり大きい応力が接合部に作用していることが実験的にも認められた。

## 6 結 言

一方向に補強した防撓板の振動に対する基礎式を板の平面応力の式と撓み振動の式を組合せてこれをマトリックスの形で導いた。一例として四辺を自由支持した板の中央に逆L型の防撓材が1本ある場合に対し、振動の固有値と応力分布について計算と実験を行ない次の結果を得た。

(1) 防撓材と板との接合部はスパン方向の節数( $\lambda$ )が多くなると、防撓材の見掛けの曲げ剛性  $EI/l$ 、振り剛性  $GJ/l$  が増して、接合部では固定に近くなる。

(2) 振動時の防撓材の上下方向の変位および振りのための角変位による慣性力のため、接合部には、集中力および集中モーメントが作用する。

(3) したがつこれが原因になつて、接合部にはかなり大きい曲げ応力が生じ、固有値および撓み曲線は、接合部で固定、他辺自由支持の板の自由振動に近くなる。

(4) 実験的に固有値および振動時の歪みを測定した結果、計算値とかなりよく一致している。

(5) 材料の疲労限度を  $22 \text{ kg/mm}^2$  と仮定し、振動時の曲げ応力がこの値に達した時の最大撓みと肋骨心距の比を求めた結果  $2 \times 10^{-2} \sim 10^{-3}$  位の値になる。しかし、疲労限度は実際にはこの値の  $1/2 \sim 1/3$  程度に低下すると予想されるので、さらに小さい撓みでも疲労限度に達し、取付部付近の亀裂発生の原因の一つに振動による疲労破壊の可能性が十分考えられる。

なお、本報告の数値計算は九州大学中央計数施設において行なわれ、研究の一部は文部省科学研究費によるものである。終りに有益な助言を賜つた渡辺恵弘博士ならびに熊井豊二教授に対し謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 奥田克己, 有馬孝, 縦横に防撓材を有する矩形板の強さおよび固有振動数, 造船協会会報, 第58号, 昭和11年
- 2) 栖原二郎, 平面板の自由振動に及ぼす防撓材の影響について, 造船協会会報, 第78号, 昭和22年
- 3) 樋口道之助, 防撓矩形板の振動について, 造船協会論文集, 第88号, 昭和25年
- 4) T. Kumai, Vibration of the Deck Panels in Ship Structure, Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Vol. 11, No. 8, 1953
- 5) R. L. Thorkildsen, W. H. Hoppmann, Effect of Rotatory Inertia on the Frequencies of Vibration of Stiffened Plates, Trans. of ASME, 1959
- 6) S. Mahalingam, Flexural Vibration of Rectangular Plates with Stiffeners Parallel to the Edges, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 66, 1963
- 7) L. Kirk, Vibration Characteristics of Stiffened Plates, Journal of Mechanical Engineering Science Vol. 2, No. 3, 1963
- 8) K. T. Sundara Raja Iyengar, K. S. Jagadish., Vibration of Stiffened Rectangular Plates, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 68, 1964
- 9) C. S. Smith, Free Vibration of Grillage and Panel Structure, R. I. N. A. Vol. 107, No. 2, 1965
- 10) 樋口道之助, 電子計算機による防撓矩形板の固有振動数の計算(その1), 造船協会論文集, 第120号, 昭和41年
- 11) H. R. Lembecke, Biege- und Torsions Schwingungen Von mit Beliebigen Querschnitten, Ingenieur-Archiv, Band 20, 1952
- 12) J. M. Gere, Y. K. Lin, Coupled Vibrations of Thin-walled Beams of Open Cross Section, Journal of Applied Mechanics, 1958
- 13) Wai Keung Tso, Coupled Vibrations of Thin-Walled Elastic Bars, Journals of the Engineering Mechanics Division, Proceeding of the A. S. C. E. EM. 3, 1965
- 14) K. H. Schrader, Übertragungsmatrizen bei Schwingungen dünnwandiger Stäbe mit offenen Profilen bei Kopplung von Biegung und Drillung, Ingenieur-Archiv, Band 34, 1965
- 15) R. F. Bersford, D. J. Mead, The Free Vibration of an Angle Section involving Cross-sectional Distortions, Journal of Sound and Vibrations, 3, 1966
- 16) F. H. Schroeder, Die näherungsweise Berücksichtigung der mitträngenden Breite bei Spannungs-Stabilitäts- und Schwingungsproblemen, Ingenieur-Archiv, Band 36, 1967
- 17) 柳本 武, 防撓せる板の有効幅, 造船協会会報, 第54号, 昭和9年
- 18) E. Reissner, Über die Berücksichtigung der Gursteifigkeit bei der berechnung der "mitträngende Breite", Schweizerische Bauzeitung, Band 108, Nr. 18, 1936
- 19) H. Holmes, Stiffened Plating under Transverse Load, Quart, Journal of Mechanics and Applied

Mathematics, Vol.12, 1959

- 20) 清水茂俊, 船体防撓構造の強度に関する研究(その1), 西部造船会会報, 第23号, 昭和37年
- 21) H. Vaughan Elastic Analysis of I beam Using Plate Theory, R.I.N.A. Vol.107, No.3, 1965
- 22) 清水茂俊, 佐藤正視, 附加物体のある梁の撓み振動時における応力分布(その1), 西部造船会会報, 第33号, 昭和42年
- 23) 石橋 正, 金属の疲労と破壊の防止, 養賢堂, 1954
- 24) 日本機械学会, 金属材料の疲れ強さの設計資料, 昭和36年, 40年

附 録 1

板の二次元応力状態に対する Stiffness Matrix

Fig. A.1.1 に状すように, 防撓材の長さ方向に  $x$  軸, これと直角方向に  $y$  軸をとり, 板の防撓材方向の長さを  $L$ , 防撓材間隔を  $B$  とする。

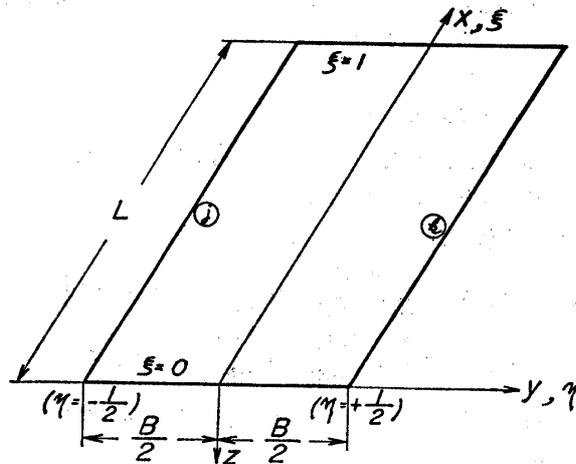


Fig. A.1.1

$$\xi = x/L, \quad \eta = y/B \tag{A.1.1}$$

とおけば(2.3), (2.4)式は次のようになる

$$\sigma_x = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{BL} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \tag{A.1.2}$$

$$\frac{1}{L^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + \frac{2}{L^2 B^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} = 0 \tag{A.1.3}$$

応力関数  $F$  を

$$F = \sum F_n = EB^2 \sum \phi_n(\eta) \sin n\pi\xi \tag{A.1.4}$$

とおき, (A.1.4)式の級数の各項を(A.1.3)式に代入すると, 第  $n$  項に対して次の常微分方程式を得る。(以下において特にことわらない限り項数をあらわす添字  $n$  は省略する。)

$$\phi^{IV} - 2\lambda^2 \phi'' + \lambda^4 \phi = 0$$

ただし  $\lambda = n\pi B/L$  とする。

この常微分方程式の一般解は

$$\phi(\eta) = C_1 \cosh \lambda\eta + C_2 \sinh \lambda\eta + C_3 \eta \cosh \lambda\eta + C_4 \eta \sinh \lambda\eta$$

ここで  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分定数で境界条件によって定まる。

いま, Fig. A.1.2 に示すように

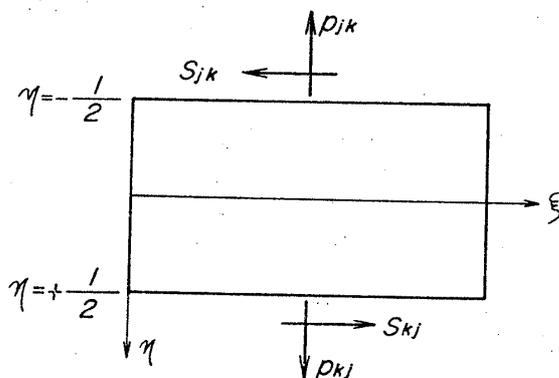


Fig. A.1.2

$$j \text{ 辺 } (\eta = -1/2) : \text{ 剪断応力 } s_{jk} = E \bar{s}_{jk} \cos n\pi\xi$$

$$\text{垂直応力 } p_{jk} = E \bar{p}_{jk} \sin n\pi\xi$$

$k$  辺 ( $\eta=1/2$ ) : 剪断応力  $s_{kj} = E\bar{s}_{kj} \cos n\pi\xi$

垂直応力  $p_{kj} = E\bar{p}_{kj} \sin n\pi\xi$

がそれぞれに作用する場合の、級数の第  $n$  項に相当する応力関数は次のようになる<sup>20)</sup>。

$$F = EB^2 \{ \bar{s}_{jk}(f_1+f_2) + \bar{s}_{kj}(f_1-f_2) + \bar{p}_{jk}(f_3+f_4) + \bar{p}_{kj}(f_3-f_4) \} \sin n\pi\xi \quad (\text{A. 1.5})$$

ただし

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{-\lambda\eta \sinh(\lambda/2) \cosh \lambda\eta + (\lambda/2) \cosh(\lambda/2) \sinh \lambda\eta}{\lambda^2(\sinh \lambda - \lambda)} \\ f_2 &= \frac{\lambda\eta \cosh(\lambda/2) \sinh \lambda\eta - (\lambda/2) \sinh(\lambda/2) \cos \lambda\eta}{\lambda^2(\sinh \lambda + \lambda)} \\ f_3 &= \frac{\lambda\eta \sinh(\lambda/2) \sinh \lambda\eta - (\sinh(\lambda/2) + (\lambda/2) \cosh(\lambda/2)) \cosh \lambda\eta}{\lambda^2(\sinh \lambda + \lambda)} \\ f_4 &= \frac{-\lambda\eta \cosh(\lambda/2) \cosh \lambda\eta + ((\lambda/2) \sinh(\lambda/2) + \cosh(\lambda/2)) \sinh \lambda\eta}{\lambda^2(\sinh \lambda - \lambda)} \end{aligned}$$

あるいは(A.1.5)式を matrix であらわして

$$[F] = EB^2 [\phi] (\bar{P}_p) \sin n\pi\xi \quad (\text{A. 1.7})$$

$$[\phi] = [(f_1+f_2) \quad (f_1-f_2) \quad (f_3+f_4) \quad (f_3-f_4)] \quad (\text{A. 1.8})$$

$$[\bar{P}_p] = \{ \bar{s}_{jk} \quad \bar{s}_{kj} \quad \bar{p}_{jk} \quad \bar{p}_{kj} \} \quad (\text{A. 1.9})$$

つぎに  $x, y$  方向の変位を  $u, v$  とすれば、これらの値は次の式より求まる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \nu\sigma_y) dx = \frac{1}{E} \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dx + \phi_1(y) \\ v &= \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \nu\sigma_x) dy = \frac{1}{E} \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dy + \phi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.10})$$

(A.1.10)式の積分定数  $\phi_1(y), \phi_2(x)$  は (A.1.4) 式のように応力関数を選べば零になる。各応力成分および変位成分は(A.1.2)および(A.1.10)式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= [\phi''] \{ \bar{P}_p \} E \sin n\pi\xi \\ \sigma_y &= -\lambda^2 [\phi] \{ \bar{P}_p \} E \sin n\pi\xi \\ \tau_{xy} &= -\lambda [\phi'] \{ \bar{P}_p \} E \cos n\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.11})$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -(B/\lambda) [[\phi''] + \nu\lambda^2[\phi]] \{ \bar{P}_p \} \sin n\pi\xi \\ v &= -B[(1+\nu)[\phi'] + [\Delta\phi']] \{ \bar{P}_p \} \sin n\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.12})$$

を得る。ただし

$$[\Delta\phi'] = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{2 \sinh \lambda/2 \cosh \lambda\eta}{\lambda(\sinh \lambda - \lambda)} & \frac{-2 \cosh \lambda/2 \sinh \lambda\eta}{\lambda(\sinh \lambda + \lambda)} & \frac{-2 \sinh \lambda/2 \sinh \lambda\eta}{\lambda(\sinh \lambda + \lambda)} & \frac{2 \cosh \lambda/2 \cosh \lambda\eta}{\lambda(\sinh \lambda - \lambda)} \end{array} \right]$$

$\eta = -1/2, \eta = 1/2$  における変位成分をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_{jk} &= B\bar{u}_{jk} \cos n\pi\xi \\ v_{jk} &= B\bar{v}_{jk} \sin n\pi\xi \\ u_{kj} &= B\bar{u}_{kj} \cos n\pi\xi \\ v_{kj} &= B\bar{v}_{kj} \sin n\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.13})$$

とすれば、(A.1.12)式に  $\eta = -1/2, \eta = 1/2$  を代入して次の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{jk} \\ \bar{u}_{kj} \\ \bar{v}_{jk} \\ \bar{v}_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c+d) & (c-d) & (a+b-2-2\nu) & -(a-b) \\ -(c-d) & -(c+d) & -(a-b) & (a+b-2-2\nu) \\ (a+b-2-2\nu) & (a-b) & (e+g) & -(e-g) \\ (a-b) & (a+b-2-2\nu) & (e-g) & -(e+g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_{jk} \\ \bar{s}_{kj} \\ \bar{p}_{jk} \\ \bar{p}_{kj} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 1.14})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sinh \lambda}{\lambda(\sinh \lambda - \lambda)}, & b &= \frac{\sinh \lambda}{\lambda(\sinh \lambda + \lambda)} \\ c &= \frac{2 \sinh^2(\lambda/2)}{\lambda(\sinh \lambda - \lambda)}, & d &= \frac{2 \cosh^2(\lambda/2)}{\lambda(\sinh \lambda + \lambda)} \\ e &= \frac{2 \cosh^2(\lambda/2)}{\lambda(\sinh \lambda - \lambda)}, & g &= \frac{2 \sinh^2(\lambda/2)}{\lambda(\sinh \lambda + \lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.15})$$

(A.1.14)式を次のようにおきかえる。

$$\{\bar{U}_p\} = [f_p] \{\bar{P}_p\} \quad (\text{A. 1. 16})$$

さらに(A. 1. 16)より次の関係が得られる。

$$\{\bar{P}_p\} = [k_p] \{\bar{U}_p\} \quad (\text{A. 1. 17})$$

$$[k_p] = [f_p]^{-1} = [k_{ij}], \quad (i=1, 2, \dots, 4, \quad j=1, 2, \dots, 4) \quad (\text{A. 1. 18})$$

(A. 1. 18)式が板の二次元応力状態に対する stiffness matrix である。(A. 1. 17)式を次のように書きかえる。

$$\begin{cases} \{\bar{P}_p\}_{jk} = [k_p]_1 \{\bar{U}_p\}_{jk} + [k_p]_2 \{\bar{U}_p\}_{kj} \\ \{\bar{P}_p\}_{kj} = [k_p]_3 \{\bar{U}_p\}_{jk} + [k_p]_4 \{\bar{U}_p\}_{kj} \end{cases} \quad (\text{A. 1. 19})$$

ただし

$$\begin{aligned} \{\bar{P}_p\}_{jk} &= \{\bar{s}_{jk} \bar{p}_{jk}\}, \quad \{\bar{P}_p\}_{kj} = \{\bar{s}_{kj} \bar{p}_{kj}\} \\ \{\bar{U}_p\}_{jk} &= \{\bar{u}_j \bar{v}_j\}, \quad \{\bar{U}_p\}_{kj} = \{\bar{u}_k \bar{v}_k\} \\ [k_p]_1 &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{31} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad [k_p]_2 = \begin{bmatrix} k_{12} & k_{14} \\ k_{32} & k_{34} \end{bmatrix}, \quad [k_p]_3 = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{23} \\ k_{41} & k_{43} \end{bmatrix}, \quad [k_p]_4 = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

stiffness matrix  $[k_{ij}]$  の要素の間には次の関係が成り立つ

$$k_{21} = -k_{12}, \quad k_{22} = -k_{11}, \quad k_{23} = k_{14} = -k_{32} = -k_{41}, \quad k_{24} = k_{13} = k_{31} = k_{42}, \quad k_{43} = -k_{34}, \quad k_{44} = -k_{33}$$

## 附 録 2

### 板の撓み振動の方程式の解と Stiffness Matrix

Fig. A. 1. 1 に示すように長さ  $L$ , 幅  $B$  の板の面に  $x, y$  座標をとり,  $x$  軸を板の中心線の一つに一致させ, 垂直下方に  $z$  軸をとると, 板の面に垂直方向の振動方程式は(2. 2)式のようにあらわされる。すなわち

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\gamma t_p}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A. 2. 1})$$

(A. 2. 1)式を無次元化するために

$$w = B\tilde{w}, \quad x = L\xi, \quad y = B\eta \quad (\text{A. 2. 2})$$

とおいて(A. 2. 1)式を書きかえると次のようになる。

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^4} + 2 \left( \frac{L^2}{B^2} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left( \frac{L^4}{B^4} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \eta^4} = -\frac{\gamma t_p}{gD} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} L^4 \quad (\text{A. 2. 3})$$

板は  $\xi=0, \xi=1$  で自由支持すれば

$$\tilde{w} = \phi(\eta) \sin n\pi\xi e^{i\omega t} = \bar{w} \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \quad (\text{A. 2. 4})$$

とおけば(A. 2. 4)は偏微分方程式(A. 2. 3)および上記の境界条件を満足する。ただし  $\omega$  は角速度である。

(A. 2. 4)式を(A. 2. 3)式に代入すると次の常微分方程式が得られる。

$$\phi^{IV} - 2\lambda^2 \phi'' + (\lambda^4 - \kappa^4) \phi = 0 \quad (\text{A. 2. 5})$$

ただし

$$\lambda = n\pi B/L, \quad \kappa = \sqrt[4]{(\gamma t_p/gD)\omega^2} \cdot B \quad (\text{A. 2. 6})$$

ここで

$$\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} = \alpha, \quad \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} = \beta \quad (\text{A. 2. 7})$$

とおけば(A. 2. 5)式の一般解は  $\lambda^2 - \kappa^2$  の正負により次のようになる。

$$(i) \quad \lambda^2 - \kappa^2 < 0 \quad (\lambda^2 + \kappa^2 = \alpha^2, \quad \lambda^2 - \kappa^2 = -\beta^2)$$

$$\phi(\eta) = A_1 \sinh \alpha\eta + A_2 \cosh \alpha\eta + A_3 \sin \beta\eta + A_4 \cos \beta\eta \quad (\text{A. 2. 8})$$

$$(ii) \quad \lambda^2 - \kappa^2 > 0 \quad (\lambda^2 + \kappa^2 = \alpha^2, \quad \lambda^2 - \kappa^2 = \beta^2)$$

$$\phi(\eta) = A_1 \sinh \alpha\eta + A_2 \cosh \alpha\eta + A_3 \sinh \beta\eta + A_4 \cosh \beta\eta \quad (\text{A. 2. 9})$$

(A. 2. 8)式, (A. 2. 9)式の  $A_1, A_2, A_3, A_4$  は積分定数で  $\eta = \pm 1/2$  における境界条件から定まる。以下においては(i)の場合につき述べ(ii)の場合の結果はこの節の末尾に示すことにする。板の  $x$  軸に関する曲げモーメント  $M_y$  および  $x$  軸に平行な縁に沿った反力は次式で示される。

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad V_y = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

これらの式に(A. 2. 2)式を代入して無次元化し,  $\tilde{w}$  に(A. 2. 4)式を代入するとそれぞれ次のようになる。

$$M_y = -\frac{D}{B} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \eta^2} + \nu \left( \frac{B}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} \right\} = -\frac{D}{B} \bar{M}_y \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \quad (\text{A. 2.11})$$

$$V_y = -\frac{D}{B^2} \left\{ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \left( \frac{B}{L} \right)^2 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right\} = -\frac{D}{B^2} \bar{V}_y \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \quad (\text{A. 2.12})$$

ただし(A. 2.11), (A. 2.12)式において

$$\bar{M}_y = \psi'' - \nu \lambda^2 \psi \quad (\text{A. 2.13})$$

$$\bar{V}_y = \psi''' - (2-\nu) \lambda^2 \psi' \quad (\text{A. 2.14})$$

である。 $x$ 軸まわりの角変位を $\theta$ とし、(A. 2.2)のおきかえをすれば

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta}$$

上式に(A. 2.4)を代入して

$$\theta = \psi' \sin n\pi \xi e^{i\omega t} = \bar{\theta} \sin n\pi \xi e^{i\omega t} \quad (\text{A. 2.15})$$

ただし、 $\bar{\theta} = \psi'$  とおく。

つぎに Fig. A. 1.1 に示すように、板の  $\eta = -1/2$ ,  $\eta = 1/2$  における縁をそれぞれ  $j$  辺および  $k$  辺とし、これらの辺の垂直変位および角変位をそれぞれ  $w_j, w_k, \theta_j, \theta_k$  とすれば(A. 2.4), (A. 2.15), (A. 2.9) 式より積分定数を求めると次のよになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (1/2 A_1) \{ (w_j - w_k) \beta \cos(\beta/2) + (\theta_j + \theta_k) \sin(\beta/2) \} \\ A_2 &= (1/2 A_2) \{ (w_j + w_k) \beta \sin(\beta/2) - (\theta_j - \theta_k) \cos(\beta/2) \} \\ A_3 &= (1/A_1) \{ -(w_j - w_k) \alpha \cosh(\alpha/2) - (\theta_j + \theta_k) \sinh(\alpha/2) \} \\ A_4 &= (1/A_2) \{ (w_j + w_k) \alpha \sinh(\alpha/2) + (\theta_j - \theta_k) \cosh(\alpha/2) \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.16})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \alpha \sin(\beta/2) \cosh(\alpha/2) - \beta \cos(\beta/2) \sinh(\alpha/2) \\ A_2 &= \beta \sin(\beta/2) \cosh(\alpha/2) + \alpha \cos(\beta/2) \sinh(\alpha/2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.17})$$

(A. 2.16)式を(A. 2.8)式に代入して整理すると

$$\psi(\eta) = (f_{b1} + f_{b2}) \bar{w}_j + (f_{b1} - f_{b2}) \bar{w}_k + (f_{b3} + f_{b4}) \bar{\theta}_j + (f_{b3} - f_{b4}) \bar{\theta}_k \quad (\text{A. 2.18})$$

ただし、 $f_{b1}, \dots, f_{b4}$  は  $\eta$  の関数であつて次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} f_{b1} &= (1/2 A_2) \{ \beta \sin(\beta/2) \cosh \alpha \eta + \alpha \sinh(\alpha/2) \cos \beta \eta \} \\ f_{b2} &= (1/2 A_1) \{ \beta \cos(\beta/2) \sinh \alpha \eta - \alpha \cosh(\alpha/2) \sin \beta \eta \} \\ f_{b3} &= (1/2 A_1) \{ \sin(\beta/2) \sinh \alpha \eta - \sinh(\alpha/2) \sin \beta \eta \} \\ f_{b4} &= (1/2 A_2) \{ -\cos(\beta/2) \cosh \alpha \eta + \cosh(\alpha/2) \cos \beta \eta \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.19})$$

(A. 2.19)式の分母の  $A_1, A_2$  は(A. 2.17)式で与えられる。(A. 2.18)式を簡単に次のように書くことにする。

$$[\psi] = [f_b] \{ \bar{U}_b \} \quad (\text{A. 2.20})$$

ただし

$$\begin{aligned} [f_b] &= [f_{b1} + f_{b2} \quad f_{b1} - f_{b2} \quad f_{b3} + f_{b4} \quad f_{b3} - f_{b4}], \\ \{ \bar{U}_b \} &= \{ \bar{w}_j \quad \bar{w}_k \quad \bar{\theta}_j \quad \bar{\theta}_k \} \end{aligned}$$

(A. 2.13), (A. 2.14) 式に (A. 2.18) 式を代入して (A. 2.20) 式の形で書き改めると無次元化した曲げモーメント  $\bar{M}_y$  および反力  $\bar{V}_y$  は次のよになる。

$$[\bar{M}_y] = [[f_b''] - \nu \lambda^2 [f_b]] \{ \bar{U}_b \} \quad (\text{A. 2.21})$$

$$[\bar{V}_y] = [[f_b'''] - (2-\nu) \lambda^2 [f_b']] \{ \bar{U}_b \} \quad (\text{A. 2.22})$$

板の  $j$  および  $k$  辺における曲げモーメントと反力は(A. 2.21), (A. 2.22)式において  $\eta = -1/2$ ,  $\eta = 1/2$  とおけば求まる。すなわち

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{yjk} \\ \bar{V}_{ykj} \\ \bar{M}_{yjk} \\ \bar{M}_{ykj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e' & -h' & (c'k - A_1) & d' \\ h' & -e' & d' & (c'k' - A_1) \\ -(c' + A_2) & d' & -a' & -b' \\ d' & -(c' + A_2) & b' & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_j \\ \bar{w}_k \\ \bar{\theta}_j \\ \bar{\theta}_k \end{bmatrix} \quad (\text{A. 2.23})$$

ただし

$$a' = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \left( \frac{\sin(\beta/2) \sinh(\alpha/2)}{A_1} + \frac{\cos(\beta/2) \cosh(\alpha/2)}{A_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 b' &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \left( \frac{\sin(\beta/2) \sinh(\alpha/2)}{A_1} - \frac{\cos(\beta/2) \cosh(\alpha/2)}{A_2} \right) \\
 c' &= \frac{\alpha\beta}{2} \left( \frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right), \quad d' = \frac{\alpha\beta}{2} \left( \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) \\
 e' &= \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{2} \left( \frac{\cos(\beta/2) \cosh(\alpha/2)}{A_1} - \frac{\sin(\beta/2) \sinh(\alpha/2)}{A_2} \right) \\
 h' &= \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{2} \left( \frac{\cos(\beta/2) \cosh(\alpha/2)}{A_1} + \frac{\sin(\beta/2) \sinh(\alpha/2)}{A_2} \right) \\
 c'_k &= c' + (\alpha^2 - \beta^2), \quad A_1 = (2 - \nu)\lambda^2, \quad A_2 = \nu\lambda^2
 \end{aligned}$$

特に板の長さ  $L$  が板幅  $B$  に比べて大きい場合には,

$$\lambda = n\pi B/L \rightarrow 0, \quad \alpha = \beta$$

となり, (A. 2.23)式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{jk} \\ \bar{V}_{kj} \\ \bar{M}_{jk} \\ \bar{M}_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e' & -h' & c' & d' \\ h' & -e' & d' & c' \\ -c' & d' & -a' & -b' \\ d' & -c' & b' & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_j \\ \bar{w}_k \\ \bar{\theta}_j \\ \bar{\theta}_k \end{bmatrix} \quad (\text{A. 2.23})'$$

ただし

$$\begin{aligned}
 a' &= (\beta/\Delta) (\cosh \beta \sin \beta - \sinh \beta \cos \beta) \\
 b' &= (\beta/\Delta) (\sinh \beta - \sin \beta) \\
 c' &= (\beta^2/\Delta) \sinh \beta \sin \beta \\
 d' &= (\beta^2/\Delta) (\cosh \beta - \cos \beta) \\
 e' &= (\beta^3/\Delta) (\cosh \beta \sin \beta + \cos \beta \sinh \beta) \\
 h' &= (\beta^3/\Delta) (\sinh \beta + \sin \beta) \\
 \Delta &= 1 - \cos \beta \cosh \beta
 \end{aligned}$$

(A. 2.23)' 式は梁の撓み振動の式から導かれた結果と一致する<sup>22)</sup>。次に (A. 2.23) 式を次のようにおきかえる。

$$\begin{aligned}
 \{\bar{P}_b\} &= [k_b] \{\bar{U}_b\} \\
 [k_b] &= [k_{ij}] \quad (i=1, 2, \dots, 4, \quad j=1, 2, \dots, 4) \\
 \{\bar{P}_b\}_{jk} &= [k_b]_1 \{\bar{U}_b\}_{jk} + [k_b]_2 \{\bar{U}_b\}_{kj} \\
 \{\bar{P}_b\}_{kj} &= [k_b]_3 \{\bar{U}_b\}_{jk} + [k_b]_4 \{\bar{U}_b\}_{kj}
 \end{aligned} \quad (\text{A. 2.24})$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \{\bar{P}_b\}_{jk} &= \{\bar{V}_{yjk} \bar{M}_{yjk}\}, \quad \{\bar{P}_b\}_{kj} = \{\bar{V}_{ykj} \bar{M}_{ykj}\} \\
 \{\bar{U}_b\}_{jk} &= \{\bar{w}_j \bar{\theta}_j\}, \quad \{\bar{U}_b\}_{kj} = \{\bar{w}_k \bar{\theta}_k\} \\
 [k_b]_1 &= \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{13} \\ k'_{31} & k'_{33} \end{bmatrix}, \quad [k_b]_2 = \begin{bmatrix} k'_{12} & k'_{14} \\ k'_{32} & k'_{34} \end{bmatrix}, \\
 [k_b]_3 &= \begin{bmatrix} k'_{21} & k'_{23} \\ k'_{43} & k'_{43} \end{bmatrix}, \quad [k_b]_4 = \begin{bmatrix} k'_{22} & k'_{24} \\ k'_{42} & k'_{44} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

なお stiffness matrix  $[k_{ij}]$  の要素の間には次の関係がある。

$$\begin{aligned}
 k'_{11} &= -k'_{22}, \quad k'_{12} = -k'_{21}, \quad k'_{34} = -k'_{43}, \quad k'_{33} = -k'_{44}. \\
 k'_{13} &= -k'_{31} = k'_{24} = -k'_{41}, \quad k'_{14} = k'_{41} = k'_{23} = k'_{32}
 \end{aligned}$$

$(\lambda^2 - \kappa^2) < 0$  の場合の (A. 2.14), (A. 2.23) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 f_{b1} &= (1/2 A_1) \{ \alpha \sinh(\alpha/2) \cosh \beta\eta - \beta \sinh(\beta/2) \cosh \alpha\eta \} \\
 f_{b2} &= (1/2 A_2) \{ -\alpha \cosh(\alpha/2) \sinh \beta\eta + \beta \cosh(\beta/2) \sinh \alpha\eta \} \\
 f_{b3} &= (1/2 A_2) \{ -\sinh(\alpha/2) \sinh \beta\eta + \sinh(\beta/2) \sinh \alpha\eta \} \\
 f_{b4} &= (1/2 A_1) \{ \cosh(\alpha/2) \cosh \beta\eta - \cosh(\beta/2) \cosh \alpha\eta \}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2.19})$$

ただし

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \alpha \sinh(\alpha/2) \cosh(\beta/2) - \beta \cosh(\alpha/2) \sinh(\beta/2) \\
 A_2 &= \alpha \cosh(\alpha/2) \sinh(\beta/2) - \beta \sinh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{yjk} \\ \bar{V}_{y^k j} \\ \bar{M}_{yjk} \\ \bar{M}_{y^k j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e' & -h' & (c'_k - A_1) & d' \\ h' & -e' & d' & (c'_k - A_1) \\ -(c' + A_2) & d' & -a' & -b' \\ d' & -(c' + A_2) & -b' & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_j \\ \bar{w}_k \\ \bar{o}_j \\ \bar{o}_k \end{bmatrix} \quad (\text{A. 2. 23})'$$

ただし

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \left( \frac{\sinh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)}{A_2} + \frac{\cosh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)}{A_1} \right) \\ b' &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \left( \frac{\sinh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)}{A_2} - \frac{\cosh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)}{A_1} \right) \\ c' &= \frac{\alpha\beta}{2} \left( \frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_1} \right), \quad d' = \frac{\alpha\beta}{2} \left( \frac{A_1}{A_2} - \frac{A_2}{A_1} \right) \\ e' &= \frac{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \left( \frac{\cosh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)}{A_2} + \frac{\sinh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)}{A_1} \right) \\ h' &= \frac{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \left( \frac{\cosh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)}{A_2} - \frac{\sinh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)}{A_1} \right) \end{aligned}$$

附 録 3

曲げ振りと剪断力を受ける防撓材の Stiffness Matrix

A. 3.1 曲げ振りを受ける梁の一般式

防撓材の断面の重心 G に座標の原点をとり剪断中心 S ( $y_s, z_s$ ) の  $x, y, z$  方向の変位成分を  $u, v, w$ , 回転角を  $\theta$  とする。防撓材と板との交線上の任意の点 A ( $y_A, z_A$ ) における板からくる反力の単位長さ当りの成分を  $q_{Ax}, q_{Ay}, q_{Az}$  とし, 重心 G に作用する単位長さ当りの慣性力の  $x, y, z$  方向の成分を  $q_{Gx}, q_{Gy}, q_{Gz}$  とすると, 剪断中心 S に作用する単位長さ当りの力の成分  $q_x(x, t), q_y(x, t), q_z(x, t), m_x(x, t)$  は Fig. A. 3.1 により次のようにあらわされる。

$$q_x(x, t) = q_{Ax}(x, t) + q_{Gy}(x, t) \quad (\text{A. 3. 1})$$

$$q_y(x, t) = q_{Ay}(x, t) + q_{Gy}(x, t) \quad (\text{A. 3. 2})$$

$$q_z(x, t) = q_{Az}(x, t) + q_{Gz}(x, t) \quad (\text{A. 3. 3})$$

$$\begin{aligned} m_x(x, t) &= m_{sx}(x, t) - (z_A - z_s)q_{Ay} \\ &\quad + (y_A - y_s)q_{Az} + m_{Ax} \end{aligned} \quad (\text{A. 3. 4})$$

最初に仮定したように防撓材の長さ方向の慣性力を無視すると (A. 3. 1) 式は

$$q_x(x, t) = q_{Ax}(x, t) \quad (\text{A. 3. 1})'$$

となる。次に  $y$  および  $z$  軸に関する曲げモーメントを  $M_y, M_z$  とすれば曲げ振りを受ける梁の方程式は一般に次式であらわされる。

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} EI_z + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EI_{yz} = -\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} \quad (\text{A. 3. 5})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EI_y + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} EI_{yz} = -\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} \quad (\text{A. 3. 6})$$

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} C_1 - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} C = m_x \quad (\text{A. 3. 7})$$

ただし  $I_y, I_z$  は  $y, z$  軸に関する断面の慣性モーメント,  $I_{yz}$  はその相乗モーメント,  $C_1$  は曲げ振り剛性,  $C$  は振り剛性とする。Fig. A. 3. 2 に示すように  $zx$  平面に平行な平面内で梁の長さ方向に微小要素  $dx$  をとると, この要素に作用する力は重心に作用する軸力  $N$ , 曲げモーメント  $M_y$ , 剪断力  $Q$ , 剪断中心に作用する外力  $q_z$  および板との交線に作用する  $x$  方向の反力  $q_{Ax}$  である。

力の釣合条件は

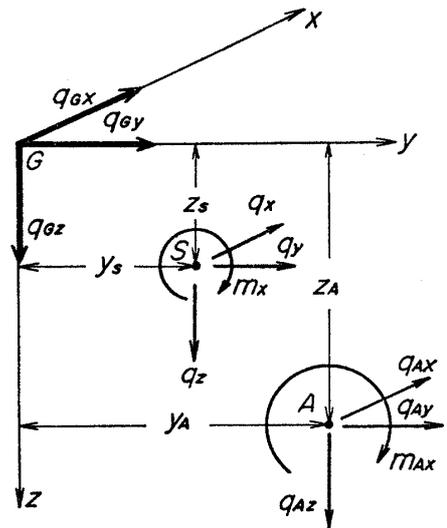


Fig. A. 3. 1

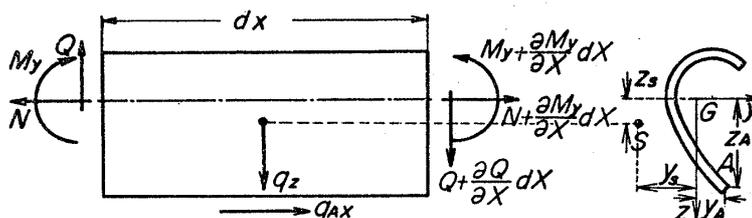


Fig. A. 3. 2

$$\text{水平方向: } N - \left( N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - q_{Ax} dx = 0, \quad q_{Ax} = -\frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{a})$$

$$\text{垂直方向: } Q - \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) - q_z dx = 0, \quad q_z = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{b})$$

$$\text{モーメント: } M_y - \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x} dx \right) - q_{Az} dx \cdot z_A + \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dz - \frac{1}{2} q_z (dx)^2 = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = -q_{Az} z_A + Q$$

上式を  $x$  で微分して (b) 式を代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} z_A + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} z_A - q_z \quad (\text{c})$$

同様に  $xy$  平面に平行な平面内における力の釣合から

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} y_A - q_y \quad (\text{d})$$

(c), (d) 式を (A. 3. 5), (A. 3. 6) 式の右辺に代入すると

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EI_y + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} EI_{yz} = q_z(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} q_{Ax}(x, t) \cdot z_A \quad (\text{A. 3. 5})'$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} EI_z + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EI_{yz} = q_y(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} q_{Ax}(x, t) \cdot y_A \quad (\text{A. 3. 6})'$$

(A. 3. 5)', (A. 3. 6)' 式の右辺第 2 項の  $q_{Ax}$  は防撓板が曲げを受ける場合にその接合部に生ずる剪断力であつて、次のようにして求まる。板と防撓材の交線上の任意の点 A における  $x$  方向の歪を  $\partial u_A / \partial x$  とすれば次のようにならわされる。

$$\left( \frac{\partial u_A}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_G + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{q_{Ax}} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{q_y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{q_z} \quad (\text{A. 3. 8})$$

ただし

$(\partial u / \partial x)_G$ : A 点に作用する単位長さ当りの軸力  $q_{Ax}$  による梁の中心線の歪

$(\partial u / \partial x)_{q_{Ax}}$ :  $q_{Ax}$  によつて生ずる曲げモーメントによる歪

$(\partial u / \partial x)_{q_y}$ : 剪断中心に作用する水平荷重  $q_y$  による曲げ歪

$(\partial u / \partial x)_{q_z}$ : 剪断中心に作用する垂直荷重  $q_z$  による曲げ歪

この中で防撓材の断面積を  $A_s$  とすれば  $(\partial u / \partial x)_G = N / (A_s E)$  であるから  $x$  で微分すると次式を得る。

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_G = \frac{1}{A_s E} \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{q_{Ax}}{A_s E} \quad (\text{e})$$

座標軸の正の方向に引張りを生ずるモーメントを正とすれば、曲げモーメント  $M_z, M_y$  による応力  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$  はそれぞれ次のようになる。

$$\sigma_{x1} = \frac{M_z}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_y y - I_{yz} z) \quad (\text{f})$$

$$\sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_z z - I_{yz} y) \quad (\text{g})$$

したがつて  $q_y$  による歪  $(\partial u / \partial x)_{q_y}$  は (f) 式より

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{q_y} = \frac{M_z(q_y)}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_y y_A - I_{yz} \cdot z_A) \frac{1}{E} \quad (\text{h})$$

同様に  $q_z$  による歪は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{qz} = \frac{M_y(q_z)}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_z z_A - I_{yz} y_A) \frac{1}{E} \tag{i}$$

つぎにA点に作用するx方向の剪断力  $q_{Ax}$  によつて生ずる曲げモーメントを  $M_y', M_z'$  とすれば

$$M_y' = - \int_0^x q_{Ax} \cdot z \cdot dx, \quad M_z' = - \int_0^x q_{Ax} \cdot y_A \cdot dx$$

したがつてこれらの曲げモーメントによつて生ずる歪  $(\partial u / \partial x)_{q_{Ax}}$  は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{q_{Ax}} &= \frac{-1}{E} [\sigma_x(M_y') + \sigma_x(M_z')] \\ &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{\int_0^x q_{Ax} \cdot z_A \cdot dx}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_z z_A - I_{yz} y_A) + \frac{\int_0^x q_{Ax} \cdot y_A \cdot dx}{I_z I_y - I_{yz}^2} (I_y y_A - I_{yz} z_A) \right] \end{aligned} \tag{j}$$

(A.3.8)式の右边に上に求めた(e), (j), (h), (i)式を代入しxについて2回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} \left( \frac{1}{A_s} - \frac{I_z z_A^2 - 2 I_{yz} \cdot y_A \cdot z_A + I_y y_A^2}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) \frac{1}{E} \\ = \frac{\partial^3 u_A}{\partial x^3} + \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \{q_z(I_z z_A - I_{yz} y_A) + q_y(I_y y_A - I_{yz} z_A)\} \end{aligned}$$

これより  $(\partial q_{Ax} / \partial x)$  は次のようになる。

$$\frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} = B_1 \frac{\partial^3 u_A}{\partial x^3} + B_z q_z + B_y q_y \tag{A.3.9}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= - \frac{E A_s (I_z I_y - I_{yz}^2)}{(I_z I_y - I_{yz}^2) + A_s (I_z z_A^2 - 2 I_{yz} y_A z_A + I_y y_A^2)} \\ B_y &= - \frac{A_s (I_y y_A - I_{yz} \cdot z_A)}{(I_z I_y - I_{yz}^2) + A_s (I_z z_A^2 - 2 I_{yz} y_A z_A + I_y y_A^2)} \\ B_z &= - \frac{A_s (I_z z_A - I_{yz} y_A)}{(I_z I_y - I_{yz}^2) + A_s (I_z z_A^2 - 2 I_{yz} y_A z_A + I_y y_A^2)} \end{aligned} \right\} \tag{A.3.10}$$

以上防撓材と板とを切離した場合の防撓材の弾性方程式は(A.3.5)', (A.3.6)', (A.3.7)および(A.3.9)式で与えられる。

### A.3.2 振動によつて防撓材に生ずる慣性力

Fig. A.3.3 に示すように防撓材の断面上の任意の点Bの座標を  $y_B, z_B, yz$  方向の変位を  $v_B, w_B$ , 剪断中心の座標を  $y_s, z_s$ , その変位成分を  $v, w, \theta$  とすれば, 変位が微小な場合は, 次の関係が成り立つ。

$$v_B = v - (z_B - z_s) \theta \tag{A.3.11}$$

$$w_B = w + (y_B - y_s) \theta \tag{A.3.12}$$

防撓材は板とともに振動しているから, その断面の任意の点Bには単位面積当り次の慣性力  $p_y, p_z$  がそれぞれyおよびz方向に作用する。

防撓材の材料の密度を  $\gamma$ , 板厚を  $t_s(s)$  とすれば

$$p_y = - \frac{\gamma t_s(s)}{g} \frac{\partial^2 v_B}{\partial t^2} = - \frac{\gamma t_s(s)}{g} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (z_B - z_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\}$$

$$p_z = - \frac{\gamma t_s(s)}{g} \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = - \frac{\gamma t_s(s)}{g} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (y_B - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\}$$

この他に軸方向に作用する慣性力  $p_x$  があるが, これは  $p_y, p_z$  に比べて小さいから無視する。断面の重心に作用する慣性力のy,z方向の成分を  $q_{Gy}, q_{Gz}$  とすれば

$$q_{Gy} = \int_s p_y ds = -m_{st} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + z_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \tag{A.3.13}$$

$$q_{Gz} = \int_s p_z ds = -m_{st} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \tag{A.3.14}$$

ただし積分は断面の中心に沿つて行ない,  $m_{st} = \gamma A_s / g$  は防撓材の単位長さ当りの質量とする。剪断中心に関

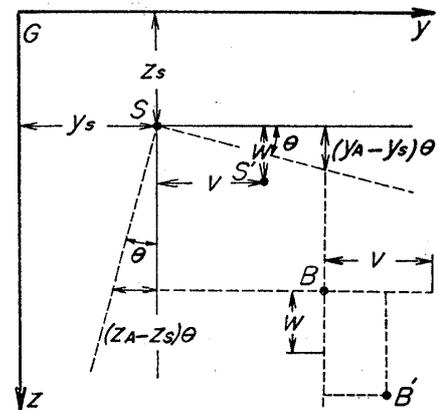


Fig. A.3.3

する慣性力による振りモーメントを  $m_{sx}$  とすれば

$$\begin{aligned} m_{sx} &= \int_s \{-p_y(z_B - z_s) + p_z(y_B - y_s)\} ds \\ &= -\frac{\gamma A_s}{g} \left( z_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - y_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - (\Theta_G + r_s^2 m_{st}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{A. 3.15})$$

ただし  $\Theta_G = \int_{A_s} \frac{\gamma}{A_s} (z_B^2 + y_B^2) dA_s$  (断面の重心を通り  $x$  軸に平行な軸のまわりの慣性モーメント),  $r_s^2 = z_s^2 + y_s^2$  とする。

いま  $A$  点を防撓材と板の交線上の点とし, その点における変位の  $x, y, z$  方向の成分を  $u_A, v_A, w_A$  とし  $x$  軸まわりの角変位を  $\theta_A$  とすれば (A. 3.11), (A. 3.12) 式は

$$v = v_A + (z_A - z_s) \theta_A \quad (\text{A. 3.11})'$$

$$w = w_A - (y_A - y_s) \theta_A \quad (\text{A. 3.12})'$$

となるから (A. 3.13), (A. 3.14), (A. 3.15) 式に (A. 3.11)', (A. 3.12)' を代入して  $q_{Gy}, q_{Gz}, m_{sx}$  を  $v_A, w_A, \theta_A$  でかきかえると次のようになる。

$$q_{Gy} = -m_{st} \left( \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} + z_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} \right) \quad (\text{A. 3.13})'$$

$$q_{Gz} = -m_{st} \left( \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} - y_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} \right) \quad (\text{A. 3.14})'$$

$$m_{sx} = -m_{st} \left( z_A \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} - y_A \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} \right) - \Theta_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} \quad (\text{A. 3.15})'$$

ただし

$$\Theta_A = \Theta_G + \frac{\gamma A_s}{g} (z_A^2 + y_A^2)$$

### A. 3.3 板と防撓材の接合部に作用する力と変位の関係式

A. 3.1 で求めた剪断中心  $S$  に作用する単位長さ当りの力の成分の式 (A. 3.2), (A. 3.3), (A. 3.4) の  $q_{Gy}, q_{Gz}, m_{sx}$  にそれぞれ (A. 3.13)', (A. 3.14)', (A. 3.15)' を代入すると防撓材と板との交線上の点  $A$  に作用する力は次のようになる。

$$q_{Ay} = m_{st} \left( \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} + z_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} \right) + q_y \quad (\text{A. 3.16})$$

$$q_{Az} = m_{st} \left( \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} - y_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} \right) + q_z \quad (\text{A. 3.17})$$

$$m_{Ax} = m_{st} z_A \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} - m_{st} y_A \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} + \Theta_A \frac{\partial^2 \theta_A}{\partial t^2} + (z_A - z_s) q_y - (y_A - y_s) q_z + m_x \quad (\text{A. 3.18})$$

つぎに防撓材の弾性方程式 (A. 3.5)', (A. 3.6)' 式の  $v, w$  に (A. 3.11)', (A. 3.12)' を代入して  $A$  点における変位で書きかえ, それぞれの右辺に式 (A. 3.9) を代入すると

$$v_A^{\text{IV}} EI_z + w_A^{\text{IV}} EI_{yz} + \{(z_A - z_s) EI_z - (y_A - y_s) EI_{yz}\} \theta_A^{\text{IV}} - B_1 y_A u_A^{\text{III}} = B_z y_A q_z + (1 + B_y y_A) q_y \quad (\text{A. 3.19})$$

$$w_A^{\text{IV}} EI_y + v_A^{\text{IV}} EI_{yz} + \{(z_A - z_s) EI_{yz} - (y_A - y_s) EI_y\} \theta_A^{\text{IV}} - B_1 z_A u_A^{\text{III}} = B_y z_A q_y + (1 + B_z z_A) q_z \quad (\text{A. 3.20})$$

(A. 3.19), (A. 3.20) 式より  $q_y, q_z$  を求めこれを (A. 3.9), (A. 3.16), (A. 3.17), (A. 3.18) に代入し, さらに (A. 3.18) 式の  $m_x$  に (A. 3.7) 式を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} \\ q_{Ay} \\ q_{Az} \\ m_{Ax} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{xx} & -B_{xy} & -B_{xz} & -B_{x\theta} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} & B_{y\theta} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} & B_{z\theta} \\ B_{\theta x} & B_{\theta y} & B_{\theta z} & B_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A^{\text{III}} \\ v_A^{\text{IV}} \\ w_A^{\text{IV}} \\ \theta_A^{\text{IV}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C\theta_A^{\text{II}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{st} & 0 & z_A m_{st} \\ 0 & 0 & m_{st} & -y_A m_{st} \\ 0 & z_A m_{st} & -y_A m_{st} & \Theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_A \\ \ddot{v}_A \\ \ddot{w}_A \\ \ddot{\theta}_A \end{pmatrix} \quad (\text{A. 3.21})$$

$$B_{xx} = EA_s, \quad B_{xy} = B_{yx} = EA_s y_A, \quad B_{xz} = B_{zx} = EA_s z_A,$$

$$B_{x\theta} = B_{\theta x} = EA_s \{(z_A - z_s) y_A - (y_A - y_s) z_A\}, \quad B_{yy} = E(I_z + A_s y_A^2),$$

$$B_{yz} = B_{zy} = E(I_{yz} + A_s y_A z_A),$$

$$B_{y\theta} = B_{\theta y} = E\{(z_A - z_s)(I_z + A_s y_A^2) - (y_A - y_s)(I_{yz} + A_s y_A z_A)\},$$

$$B_{zz} = E(I_y + A_s z_A^2), \quad B_{z\theta} = B_{\theta z} = E\{(z_A - z_s)(I_{yz} + A_s y_A z_A) - (y_A - y_s)(I_y + A_s z_A^2)\}$$

$$B_{\theta\theta} = C_1 + E \{ (z_A - z_s)^2 (I_z + A_s y_A^2) + (y_A - y_s)^2 (I_y + A_s z_A^2) - 2(z_A - z_s)(y_A - y_s)(I_{yz} + A_s y_A z_A) \}$$

なおこれらの係数は次のような特殊な断面の場合には簡単になる。

- (a)  $\Gamma$  型:  $-y_A = -y_s, z_A - z_s = h_w, B_{xx} = EA_s,$   
 $B_{xy} = B_{yx} = -EA_s y_A, B_{xz} = B_{zx} = EA_s z_A, B_{x\theta} = B_{\theta x} = -EA_s h_w y_A,$   
 $B_{yy} = E(I_z + A_s y_A^2), B_{yz} = B_{zy} = E(I_{yz} - y_A z_A A_s),$   
 $B_{y\theta} = B_{\theta y} = E h_w (I_z + A_s y_A^2), B_{zz} = E(I_y + A_s z_A^2),$   
 $B_{z\theta} = B_{\theta z} = E h_w (I_{yz} - A_s y_A z_A), B_{\theta\theta} = C_1 + E h_w^2 (I_z + A_s y_A^2)$
- (b)  $T$  型:  $y_A = y_s = 0, z_A - z_s = h_w, I_{yz} = 0, B_{xx} = EA_s,$   
 $B_{xy} = B_{yx} = 0, B_{xz} = B_{zx} = EA_s z_A, B_{x\theta} = B_{\theta x} = 0, B_{yy} = EI_z,$   
 $B_{yz} = B_{zy} = 0, B_{y\theta} = B_{\theta y} = E h_w I_z, B_{zz} = E(I_y + z_A^2 A_s),$   
 $B_{z\theta} = B_{\theta z} = 0, B_{\theta\theta} = C_1 + E h_w^2 I_z$
- (c)  $I$  型 or Flat Bar:  $y_A = y_s = 0, z_A = h_w/2, z_s = 0,$   
 $I_{yz} = 0, C_1 = 0, B_{xx} = EA_s, B_{xy} = B_{yx} = 0, B_{xz} = B_{zx} = EA_s h_w/2,$   
 $B_{x\theta} = B_{\theta x} = 0, B_{yy} = EI_z, B_{yz} = B_{zy} = 0, B_{y\theta} = B_{\theta y} = E h_w I_z/2,$   
 $B_{zz} = E(I_y + A_s h_w^2/4), B_{z\theta} = B_{\theta z} = 0, B_{\theta\theta} = E h_w^2 I_z/4$

第2章で仮定したように防撓材はその両端で自由支持され、回転に対しては拘束されるが、断面のそりは自由である。したがって変位および力を次のようにおけばこれらの条件が満足される。

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \bar{u}_A B \cos n\pi\xi e^{i\omega t} \\ v_A &= \bar{v}_A B \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \\ w_A &= \bar{w}_A B \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \\ \theta_A &= \bar{\theta}_A \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (A. 3. 22)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{Ax} &= \bar{q}_{Ax} \cos n\pi\xi e^{i\omega t} \\ q_{Ay} &= \bar{q}_{Ay} \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \\ q_{Az} &= \bar{q}_{Az} \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \\ m_{Ax} &= \bar{m}_{Ax} \sin n\pi\xi e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (A. 3. 23)$$

(A. 3. 22), (A. 3. 23)式を(A. 3. 21)式に代入し、これを無次元化すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (-1/Et_p)\bar{q}_{Ax} \\ (-1/Et_p)\bar{q}_{Ay} \\ (B^2/D)\bar{q}_{Az} \\ (-B/D)\bar{m}_{Ax} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{B}_{xx}\lambda^2 & -\bar{B}_{xy}\lambda^3 & -\bar{B}_{xz}\lambda^3 & -\bar{B}_{x\theta}\lambda^3 \\ -\bar{B}_{yx}\lambda^3 & -\bar{B}_{yy}\lambda^4 & -\bar{B}_{yz}\lambda^4 & -\bar{B}_{y\theta}\lambda^4 \\ \bar{B}_{zx}\lambda^3 & \bar{B}_{zy}\lambda^4 & \bar{B}_{zz}\lambda^4 & \bar{B}_{z\theta}\lambda^4 \\ -\bar{B}_{\theta x}\lambda^3 & -\bar{B}_{\theta y}\lambda^4 & -\bar{B}_{\theta z}\lambda^4 & -\bar{B}_{\theta\theta}\lambda^4 - \bar{C}\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_A \\ \bar{v}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\theta}_A \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_M'/\kappa^4 & 0 & K'_{Gz}\kappa^4 \\ 0 & 0 & -K_M\kappa^4 & K_{Gy}\kappa^4 \\ 0 & K_{Gz}\kappa^4 & -K_{Gy}\kappa^4 & K_R\kappa^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_A \\ \bar{v}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\theta}_A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A. 3. 24)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{B}_{xx} &= \frac{B_{xx}}{Et_p B}, & \bar{B}_{yz} &= \frac{B_{yz}}{Et_p B^3}, & \bar{B}_{z\theta} &= \frac{B_{z\theta}}{B^2 D} = \bar{B}_{\theta z}, \\ \bar{B}_{xy} &= \bar{B}_{yx} = \frac{B_{xy}}{Et_p B^2}, & \bar{B}_{y\theta} &= \frac{B_{y\theta}}{Et_p B^4}, & B_{\theta x} &= \frac{B_{\theta x}}{BD}, & \bar{B}_{xz} &= \frac{B_{xz}}{Et_p B^2}, \\ \bar{B}_{zx} &= \frac{B_{zx}}{D}, & \bar{B}_{\theta y} &= \frac{B_{\theta y}}{B^2 D}, & \bar{B}_{x\theta} &= \frac{B_{x\theta}}{Et_p B^3}, & \bar{B}_{zy} &= \frac{B_{zy}}{BD}, \\ \bar{B}_{\theta\theta} &= \frac{B_{\theta\theta}}{B^3 D}, & \bar{B}_{yy} &= \frac{B_{yy}}{Et_p B^3}, & \bar{B}_{zz} &= \frac{B_{zz}}{BD}, & \bar{C} &= \frac{C}{BD} \\ K_M &= \frac{m_{st}}{\left(\frac{r t_p}{g}\right) B}, & K_M' &= \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_p^2}{B^2}\right) K_M, \\ K_R &= \frac{\Theta_A}{\left(\frac{r t_p}{g}\right) B^2}, & K_{Gz}' &= \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_p^2}{B^2}\right) K_{Gz}, \end{aligned} \quad (A. 3. 25)$$

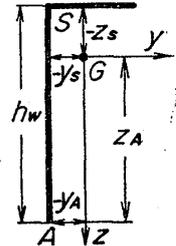


Fig. A. 3. 4

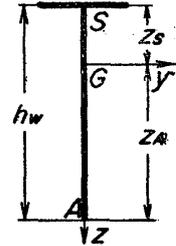


Fig. A. 3. 5

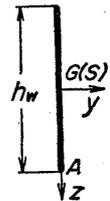


Fig. A. 3. 6

$$K_{Gy} = \frac{m_{st}}{\left(\frac{rt_p}{g}\right)B} \cdot \frac{y_A}{B}, \quad K_{Gz} = \frac{m_{st}}{\left(\frac{rt_p}{g}\right)B} \cdot \frac{z_A}{B}$$

(A. 2. 24)式を簡単に次のように書く。

$$\{\bar{Q}_s\} = [k_s] \{\bar{U}_A\} \quad (\text{A. 3. 26})$$

ただし

$$\{\bar{Q}_s\} = \{-q_{Ax}(1/Et_p) \quad -q_{Ay}(1/Et_p) \quad q_{Az}(B^2/D) \quad -m_{Ax}(B/D)\}$$

$$\{\bar{U}_A\} = \{\bar{u}_A \quad \bar{v}_A \quad \bar{w}_A \quad \bar{\theta}_A\}$$

$$[k_s] = [B + D] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} + D_{22} & B_{23} & B_{24} + D_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} + D_{33} & B_{34} + D_{34} \\ B_{41} & B_{42} + D_{42} & B_{43} + D_{43} & B_{44} + D_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 3. 27})$$

(A. 3. 27)式が防撓材に対する stiffness matrix である。